

**Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 14**

MV 05	Blatt 09	Kapitel 6.4	trigonometrische
keine	ElementareFktn	Nummer: 42 0 200509008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

**Aufgabe 14.1.1:** Bestimmen Sie die Summe  $6 \sin(ax) - 9\sqrt{2} \cos(ax + \frac{\pi}{4})$  als Term von der Form  $C \cdot \sin(ax + \varphi)$  für alle  $a \in \mathbb{R}^+$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

**Parameter:**

$x_1$  = Faktor vor dem Sinus  $x_1 > 1$ .

$x_2$  = Faktor vor dem Kosinus  $x_1 > x_2 > 1$ .

Die Formel lautet:  $x_1 \sin(ax) - \sqrt{2}x_2 \cos(ax + \frac{\pi}{4})$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 6$   $x_2 = 9$ .

**Erklärung:**

Wenden Sie die Additionstheoreme des Kosinus und Sinus auf  $\sin(ax + \varphi)$  und auf  $\cos(ax + \frac{\pi}{4})$  an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

**Rechnung:**

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \cdot 9 \cos(ax + \frac{\pi}{4}) &= -\sqrt{2} \cdot 9 \cos(ax) \cos(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot 9 \sin(ax) \sin(\frac{\pi}{4}) && \text{Kosinus - Additionstheorem} \\ &= -9\sqrt{2} \cdot \cos(ax) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9\sqrt{2} \sin(ax) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} && \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -9 \cos(ax) + 9 \sin(ax) \end{aligned}$$

$$C \sin(ax + \varphi) = C \sin(ax) \cos \varphi + C \cos(ax) \sin \varphi = -9 \cos(ax) + 9 \sin(ax) + 6 \sin(ax) = -9 \cos(ax) + 15 \sin(ax).$$

$$\text{Koeffizientenvergleich ergibt} \quad (1) \quad -9 = C \cos \varphi \quad \text{und} \quad (2) \quad 15 = C \sin \varphi.$$

$$\text{Beide Gleichungen quadriert ergeben } 9^2 + 15^2 = C^2, \text{ also } C = \pm\sqrt{9^2 + 15^2} = \pm\sqrt{306}.$$

$$\text{Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt } \frac{C \sin \varphi}{C \cos \varphi} = \frac{-15}{9} = \tan \varphi.$$

Also ist  $\varphi = \arctan(\frac{-5}{3})$ .

Hier kann der  $\arctan_0$  verwendet werden, wenn das Vorzeichen von  $C$  entsprechend angepasst wird:

Wir wählen  $x = 0$ , dann gilt  $15 \sin(ax) - 9 \cos(ax)|_{x=0} = -9$  und  $\pm\sqrt{306} \cos(\arctan_0(\frac{-5}{3})) = -9$ , wenn das negative Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus positiv gewesen, dann hätten wir das positive Vorzeichen wählen müssen.

**Angebotene Lösungen:**

- |                             |  |                                       |  |                             |  |
|-----------------------------|--|---------------------------------------|--|-----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1  | $-\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | $-\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$   | <input type="checkbox"/> 3  | $15 \sin(ax + 9)$                                  |
| <input type="checkbox"/> 4  | $-\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 5            | $6 \sin(ax)$                                       | <input type="checkbox"/> 6  | $\pm\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ |
| <input type="checkbox"/> 7  | $\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$  | <input type="checkbox"/> 8            | $\pm\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 9  | $6 \sin(ax + 9)$                                   |
| <input type="checkbox"/> 10 | $-\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 11           | $\pm\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$    |

**Fehlerinterpretation:**

<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Fehler beim Additionstheorem
<input checked="" type="checkbox"/>	$-\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	richtig
<input type="checkbox"/>	$15 \sin(ax + 9)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: Fehler beim Satz von Pythagoras
<input type="checkbox"/>	$6 \sin(ax)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: falsche Punktprobe
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$6 \sin(ax + 9)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Fehler beim Satz von Pythagoras
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: Fehler beim Satz von Pythagoras

MV 05                      Blatt 06                      Kapitel 4.2                      Grenzwerte  
keine                      Stetigkeit                      Nummer: 56 0 200506011                      Kl: 14G  
Grad: 40 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 14.1.2:** Sei  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definiert durch  $f(x) = -x^2 + 4x + 7$ ,  $x_0 = 2$  und sei  $\varepsilon = \frac{1}{25}$  gewählt. Bestimmen Sie das maximale  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $x$ , für die  $|x - x_0| < \delta$  gilt,  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  ist oder  $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ .

**Parameter:**

$x_2 = x$ - Wert des Scheitels =  $x_0$ ,  $x_3 = y$ - Wert des  $y$ - Achsenschnittpunktes,  $\varepsilon = \frac{1}{(x_1)^2}$ ,  $x_i > 1$ ,  $i = 1, 2, 3$   
Es gilt also  $f(x) = -x^2 + \{2 \cdot x_2\}x + x_3$ .  
In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 5$      $x_2 = 2$      $x_3 = 7$ .

**Erklärung:**

Um das  $\delta$  zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

**Rechnung:**

$f(x_0) = f(2) = 11$ .  $x_0$  ist der Scheitel bzw. Hochpunkt der Parabel. Um  $f^{-1}(x)$  zu berechnen, müssen wir die Gleichung  $x = -y^2 + 4y + 7$  nach  $y$  auflösen:

$$y^2 - 4y - 7 + x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 28 - 4x}}{2} \Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{11 - x}$$

$$f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) = f^{-1}\left(\frac{275 - 1}{25}\right) = 2 \pm \sqrt{11 - \frac{274}{25}} = 2 \pm \sqrt{\frac{275 - 274}{25}} = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{25}} = 2 \pm \frac{1}{5}.$$

Damit ist  $f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) - x_0 = \pm\frac{1}{5}$ . Mit  $\delta = \frac{1}{5}$  gilt  $|f(x_0) - f(x_0 - \delta)| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| = \varepsilon$ . Aus den diversen Monotonieeigenschaften folgt  $\delta = \frac{1}{5}$ .  $f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon) - x_0$  ist nicht definiert. Bitte beachten Sie, dass  $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0))$  ist und damit die Teilmengenbeziehung echt ist.

**Angeborene Lösungen:**

<input type="checkbox"/>	$\delta = \pm\frac{1}{5}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = \frac{1}{625}$	<input checked="" type="checkbox"/>	$\delta = \frac{1}{5}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = x_0$
<input type="checkbox"/>	$\delta = \pm x_0$	<input type="checkbox"/>	$\delta = -\frac{1}{5}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = \frac{1}{25}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = -\frac{1}{625}$
<input type="checkbox"/>	es gibt keines	<input type="checkbox"/>	$\delta = -\frac{1}{25}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = \pm\varepsilon$	<input type="checkbox"/>	$\delta = \pm\frac{1}{625}$

**Fehlerinterpretation:**

<input type="checkbox"/> 1	$\delta = \pm \frac{1}{5}$	DF: $\delta$ ist eindeutig
<input type="checkbox"/> 2	$\delta = \frac{1}{625}$	DF: Lösung geraten
<input checked="" type="checkbox"/> 3	$\delta = \frac{1}{5}$	richtig
<input type="checkbox"/> 4	$\delta = x_0$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 5	$\delta = \pm x_0$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 6	$\delta = -\frac{1}{5}$	DF: $\delta > 0$
<input type="checkbox"/> 7	$\delta = \frac{1}{25}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 8	$\delta = -\frac{1}{625}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 9	es gibt keines	DF: doch, $f$ ist stetig
<input type="checkbox"/> 10	$\delta = -\frac{1}{25}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 11	$\delta = \pm \varepsilon$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 12	$\delta = \pm \frac{1}{625}$	DF: Lösung geraten

MV 05                      Blatt 06                      Kapitel 4.2                      Grenzwerte  
 Asymptoten              Funktionen              Nummer: 57 0 2005060009      Kl: 14G  
 Grad: 40 Zeit: 30      Quelle: keine      W

**Aufgabe 14.1.3:** Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \ln \left( \frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 + 7x^2} \right)$$

**Parameter:**

$x_i$  = Nullstellen und Asymptoten des Logarithmusargumentes,  $x_3 > x_2 > x_1 > 1$ .

Die Funktion lautet so:  $\ln \left( \frac{x^2 + \{x_2 - x_1\}x - \{x_2 \cdot x_1\}}{x^3 + x_3x^2} \right)$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 3$      $x_2 = 5$      $x_3 = 7$ .

**Erklärung:**

Die wichtigen Werte des  $\ln$  sind:  $\ln(0) = -\infty$ ,  $\ln 1 = 0$  und  $\ln \infty = \infty$ .  $\ln x$  ist nur für  $x > 0$  definiert.

**Rechnung:**

$\ln x$  ist genau dann definiert, wenn  $x > 0$  ist. Deshalb betrachten wir zuerst das Argument des  $\ln$ :

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 + 7x^2} > 0.$$

Wir wenden die Methode von Knapp an. Die Grenzen sind:  $-7$ ,  $-5$ ,  $0$ ,  $3$ . Mittels Punktprobe erhalten wir folgende Lösungen:

$(-\infty, -7)$  : Nein ;  $(-7, -5)$  : Ja ;  $(-5, 0)$  : Nein ;  $(0, 3)$  : Nein ;  $(3, \infty)$  : Ja ;

Damit ist  $ID = (-7, -5) \cup (3, \infty)$   $\ln h$  hat genau für  $h = 0$  und  $h = \infty$  senkrechte Asymptoten. Bei  $h = -\infty$  hat  $\ln h$  nicht unbedingt senkrechte Asymptoten. Damit gilt:  $f(x)$  hat senkrechte Asymptoten bei  $x = -7$ ,  $x = -5$  und bei  $x = 3$ . Für  $x \rightarrow \infty$  geht  $h(x)$  gegen  $0$  und damit  $\ln(h(x)) \rightarrow -\infty$ .  $f(x)$  hat weder waagrechte noch schiefe Asymptoten. Bei schiefen Asymptoten müsste es eine Gerade  $g = mx + c$  geben mit  $|\ln(h(x)) - g(x)| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ .

**Angebotene Lösungen:**

<input type="checkbox"/> 1	$f$ hat keine	<input type="checkbox"/> 2	$f$ hat unendlich viele
<input type="checkbox"/> 3	$x = -7$	<input type="checkbox"/> 4	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3$
<input type="checkbox"/> 5	$x = -7, x = 0, y = 0$	<input checked="" type="checkbox"/> 5	$x = -7, x = -5, x = 3$
<input type="checkbox"/> 7	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3, y = 0$	<input type="checkbox"/> 8	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3, y = 1$
<input type="checkbox"/> 9	$x = -7, x = -5, x = 3, y = 0$	<input type="checkbox"/> 10	$x = -7, x = -5, y = 0$
<input type="checkbox"/> 11	$x = -7, x = 0$	<input type="checkbox"/> 12	$x = -7, x = -5, x = 0$

**Fehlerinterpretation:**

<input type="checkbox"/> 1	$f$ hat keine	DF: falsch
<input type="checkbox"/> 2	$f$ hat unendlich viele	DF: falsch
<input type="checkbox"/> 3	$x = -7$	DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten
<input type="checkbox"/> 4	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3$	DF: $x = 0$ grenzt nicht an $\mathbb{D}$
<input type="checkbox"/> 5	$x = -7, x = 0, y = 0$	DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten
<input checked="" type="checkbox"/> 6	$x = -7, x = -5, x = 3$	richtig
<input type="checkbox"/> 7	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3, y = 0$	DF: $x = 0$ grenzt nicht an $\mathbb{D}$
<input type="checkbox"/> 8	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3, y = 1$	DF: $x = 0$ grenzt nicht an $\mathbb{D}$
<input type="checkbox"/> 9	$x = -7, x = -5, x = 3, y = 0$	DF: $f$ hat keine waagrechten Asymptoten
<input type="checkbox"/> 10	$x = -7, x = -5, y = 0$	DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten
<input type="checkbox"/> 11	$x = -7, x = 0$	DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten
<input type="checkbox"/> 12	$x = -7, x = -5, x = 0$	DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten

MV 05                      Blatt 06                      Kapitel 4.2                      Grenzwerte  
 Asymptoten                      Funktionen                      Nummer: 87 0 200506009                      Kl: 14G  
 Grad: 40 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 14.1.4:** Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \arctan_0 \left( \frac{(3x + 15) \cdot (x + 8)}{(3x + 33) \cdot (x + 5)} \right)$$

**Parameter:**

$x_i$  = Nullstellen und Asymptoten des Arkustangensargumentes,  $x_i \geq 2$   
 $x_2, x_3, x_4$  paarweise verschieden.

$$\text{Die Funktion lautet so: } f(x) = \arctan_0 \left( \frac{(x_1 x + \{x_1 \cdot x_2\}) \cdot (x + x_3)}{(x_1 x + \{x_1 \cdot x_4\}) \cdot (x + x_2)} \right) .$$

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 3$      $x_2 = 5$      $x_3 = 8$      $x_4 = 11$ .

**Erklärung:**

Die wichtigen Werte des  $\arctan_0$  sind:  $\arctan_0(0) = 0$ ,  $\arctan_0(\pm 1) = \frac{\pm\pi}{4}$  und  $\arctan_0(\pm\infty) = \frac{\pm\pi}{2}$ .

**Rechnung:**

Senkrechte Asymptoten des Arkustangensargumentes erzeugen lediglich eine Unstetigkeitsstelle aber keine senkrechte Asymptote. Zum Beispiel gilt für die Funktion  $g(x) = \arctan_0(\frac{1}{x})$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \arctan_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \arctan_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Der Betrag beider Grenzwerte ist ungleich unendlich, damit liegen keine senkrechten Asymptoten vor.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan_0 \left( \frac{(3x + 15) \cdot (x + 8)}{(3x + 33) \cdot (x + 5)} \right) = \arctan_0(1) = \frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan_0 \left( \frac{(3x + 15) \cdot (x + 8)}{(3x + 33) \cdot (x + 5)} \right) .$$

Damit ist die einzige (waagrechte) Asymptote  $y = \frac{\pi}{4}$ .

**Angeborene Lösungen:**

<input type="checkbox"/> 1	$y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -11$	<input type="checkbox"/> 2	$f$ hat keine	<input type="checkbox"/> 3	$y = 0$
<input checked="" type="checkbox"/> 4	$y = \frac{\pi}{4}$	<input type="checkbox"/> 5	$y = \pm \frac{\pi}{2}$	<input type="checkbox"/> 6	$f$ hat unendlich viele
<input type="checkbox"/> 7	$y = 0$ , $x = -5$ und $x = -11$	<input type="checkbox"/> 8	$y = 0$ und $x = 0$	<input type="checkbox"/> 9	$y = \frac{\pi}{4}$ und $x = -11$
<input type="checkbox"/> 10	$y = \frac{\pi}{2}$ , $x = -5$ und $x = -11$	<input type="checkbox"/> 11	$x = -11$	<input type="checkbox"/> 12	$y = \pm \frac{\pi}{4}$

**Fehlerinterpretation:**

<input type="checkbox"/> 1	$y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -11$	DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$
<input type="checkbox"/> 2	$f$ hat keine	DF: falsch
<input type="checkbox"/> 3	$y = 0$	DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$
<input checked="" type="checkbox"/> 4	$y = \pm \frac{\pi}{4}$	richtig
<input type="checkbox"/> 5	$y = \pm \frac{\pi}{2}$	DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$
<input type="checkbox"/> 6	$f$ hat unendlich viele	DF: falsch
<input type="checkbox"/> 7	$y = 0$ , $x = -5$ und $x = -11$	DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$
<input type="checkbox"/> 8	$y = 0$ und $x = 0$	DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$
<input type="checkbox"/> 9	$y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -11$	DF: $f$ hat keine senkrechten Asymptoten
<input type="checkbox"/> 10	$y = \pm \frac{\pi}{2}$ , $x = -5$ und $x = -11$	DF: $f$ hat keine senkrechten Asymptoten
<input type="checkbox"/> 11	$x = -11$	DF: $f$ hat keine senkrechten Asymptoten
<input type="checkbox"/> 12	$y = \pm \frac{\pi}{4}$	DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$

MV 05                      Blatt 06                      Kapitel 4.2                      Grenzwerte  
keine                              Stetigkeit                      Nummer: 98 0 200506010                      Kl: 14G  
Grad: 40 Zeit: 30              Quelle: keine              W

**Aufgabe 14.1.5:** Sei  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definiert durch  $f(x) = -2x + 5$ ,  $x_0 = 4$  und sei ein  $\varepsilon > 0$  fest gewählt. Bestimmen Sie das maximale  $\delta > 0$  (abhängig von  $\varepsilon$ ) mit der Eigenschaft, dass für alle  $x$ , für die  $|x - x_0| < \delta$  gilt,  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  ist oder  $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ . Damit haben Sie die Stetigkeit von  $f$  an der Stelle  $x_0$  gezeigt.

**Parameter:**

$x_1 =$  (negative) Steigung,  $x_2 = y$ - Achsenabschnitt von  $f$ ,  $x_3$  entspricht  $x_0$ ,  $x_2 \neq x_3$

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 2$      $x_2 = 5$      $x_3 = 4$ .

**Erklärung:**

Um das  $\delta$  zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

**Rechnung:**

$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{-2}$ . Nach der Formel von Schmid ist

$$\delta = \pm(f^{-1}(f(4) \pm \varepsilon) - 4) = \pm(f^{-1}(-3 \pm \varepsilon) - 4) = \pm\left(\frac{(-3 \pm \varepsilon) - 5}{-2} - 4\right) = \pm\left(\frac{-8}{-2} - 4 \pm \frac{\varepsilon}{-2}\right) = \pm\frac{\varepsilon}{-2}.$$

Wenn wir das negative Vorzeichen wählen, erhalten wir  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ .

Es gilt  $f(x_0 - \delta) = f(x_0) + \varepsilon$  und  $f(x_0 + \delta) = f(x_0) - \varepsilon$ .

Weil  $f$  streng monoton fallend ist, folgt die Behauptung. Bitte beachten Sie hierbei, dass  $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$  ist. Die gilt normalerweise nicht.

**Angeborene Lösungen:**

<input type="checkbox"/> 1	$\frac{-\varepsilon+4}{5}$	<input type="checkbox"/> 2	$\frac{\varepsilon-5}{2}$	<input type="checkbox"/> 3	$\pm \frac{\varepsilon}{5}$	<input type="checkbox"/> 4	$\frac{-\varepsilon+5}{2}$
<input type="checkbox"/> 5	$\frac{\varepsilon-5}{4}$	<input type="checkbox"/> 6	$\varepsilon$	<input type="checkbox"/> 7	$\frac{\varepsilon-4}{5}$	<input type="checkbox"/> 8	$\frac{2}{5}$
<input type="checkbox"/> 9	0	<input type="checkbox"/> 10	$\pm \frac{\varepsilon}{2}$	<input checked="" type="checkbox"/> 11	$\frac{\varepsilon}{2}$	<input type="checkbox"/> 12	Es gibt keines

**Fehlerinterpretation:**

<input type="checkbox"/> 1	$\frac{-\varepsilon+4}{5}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 2	$\frac{\varepsilon-5}{2}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 3	$\pm\frac{\varepsilon}{5}$	DF: $\delta$ ist eindeutig
<input type="checkbox"/> 4	$\frac{-\varepsilon+5}{2}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 5	$\frac{\varepsilon-5}{4}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 6	$\varepsilon$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 7	$\frac{\varepsilon-4}{5}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 8	$\frac{2}{5}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 9	0	DF: $\delta > 0$
<input type="checkbox"/> 10	$\pm\frac{\varepsilon}{2}$	DF: $\delta$ ist eindeutig
<input checked="" type="checkbox"/> 11	$\frac{\varepsilon}{2}$	richtig
<input type="checkbox"/> 12	Es gibt keines	DF: doch, $f$ ist stetig

MV 05                      Blatt 09                      Kapitel 6.4                      trigonometrische  
keine                      ElementareFktn                      Nummer: 101 0 200509007                      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 14.1.6:** Bestimmen Sie die Summe  $4 \sin(ax) + 6 \cos(ax)$  als Term von der Form  $C \cdot \cos(ax + \varphi)$  für alle  $a \in \mathbb{R}^+$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

**Parameter:**

$x_1$  = Faktor vor dem Sinus  $x_1 > 1$ .  
 $x_2$  = Faktor vor dem Kosinus  $x_2 > x_1$ .

Die Formel lautet:  $x_1 \sin(ax) + x_2 \cos(ax)$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 4$      $x_2 = 6$ .

**Erklärung:**

Wenden Sie das Additionstheorem des Kosinus auf  $\cos(ax + \varphi)$  an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

**Rechnung:**

$$C \cos(ax + \varphi) = C \cos(ax) \cos \varphi - C \sin(ax) \sin \varphi = 6 \cos(ax) + 4 \sin(ax).$$

Koeffizientenvergleich ergibt    (1)  $6 = C \cos \varphi$                       und (2)  $-4 = C \sin \varphi$ .

Beide Gleichungen quadriert ergeben  $6^2 + 4^2 = C^2$ , also  $C = \pm\sqrt{6^2 + 4^2} = \pm\sqrt{52}$ .

Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt  $\frac{C \sin \varphi}{C \cos \varphi} = \frac{-4}{6} = \tan \varphi$ .

Also ist  $\varphi = \arctan\left(\frac{-2}{3}\right)$ .

Hier kann der  $\arctan_0$  verwendet werden, wenn das Vorzeichen von  $C$  entsprechend angepasst wird:

Wir wählen  $x = 0$ , dann gilt  $4 \sin(ax) + 6 \cos(ax)|_{x=0} = 6$  und  $\pm\sqrt{52} \cos(\arctan_0(\frac{-2}{3})) = 6$ , wenn das positive Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus negativ gewesen, dann hätten wir das negative Vorzeichen wählen müssen.

**Angebotene Lösungen:**

- |                             |   |                             |   |                                       |   |
|-----------------------------|---|-----------------------------|---|---------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1  | $\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$      | <input type="checkbox"/> 2  | $\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$      | <input type="checkbox"/> 3            | $\pm\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$ |
| <input type="checkbox"/> 4  | $6 \cos(ax + 4)$                                    | <input type="checkbox"/> 5  | $\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{3}{2}))$ | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | $\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$    |
| <input type="checkbox"/> 7  | $\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{2}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 8  | $\pm\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$   | <input type="checkbox"/> 9            | $-\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$   |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$   | <input type="checkbox"/> 11 | $\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$   | <input type="checkbox"/> 12           | $-\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$   |

**Fehlerinterpretation:**

<input type="checkbox"/>	$\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Fehler beim Quadrieren
<input type="checkbox"/>	$\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Falsch dividiert
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$6 \cos(ax + 4)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{3}{2}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input checked="" type="checkbox"/>	$\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	richtig
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{2}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Falsches Vorzeichen gewählt
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Falsches Vorzeichen gewählt

**Allgemeine Hinweise:**

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>