

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 14

MV 05	Blatt 09	Kapitel 6.4	trigonometrische
keine	ElementareFktn	Nummer: 42 0 200509008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 14.1.1: Bestimmen Sie die Summe $6 \sin(ax) - 9\sqrt{2} \cos(ax + \frac{\pi}{4})$ als Term von der Form $C \cdot \sin(ax + \varphi)$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$.

Parameter:

x_1 = Faktor vor dem Sinus $x_1 > 1$.

x_2 = Faktor vor dem Kosinus $x_1 > x_2 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 \sin(ax) - \sqrt{2}x_2 \cos(ax + \frac{\pi}{4})$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6$ $x_2 = 9$.

Erklärung:

Wenden Sie die Additionstheoreme des Kosinus und Sinus auf $\sin(ax + \varphi)$ und auf $\cos(ax + \frac{\pi}{4})$ an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

Rechnung:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \cdot 9 \cos(ax + \frac{\pi}{4}) &= -\sqrt{2} \cdot 9 \cos(ax) \cos(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot 9 \sin(ax) \sin(\frac{\pi}{4}) && \text{Kosinus - Additionstheorem} \\ &= -9\sqrt{2} \cdot \cos(ax) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9\sqrt{2} \sin(ax) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} && \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -9 \cos(ax) + 9 \sin(ax) \end{aligned}$$

$$C \sin(ax + \varphi) = C \sin(ax) \cos \varphi + C \cos(ax) \sin \varphi = -9 \cos(ax) + 9 \sin(ax) + 6 \sin(ax) = -9 \cos(ax) + 15 \sin(ax).$$

$$\text{Koeffizientenvergleich ergibt} \quad (1) \quad -9 = C \cos \varphi \quad \text{und} \quad (2) \quad 15 = C \sin \varphi.$$

$$\text{Beide Gleichungen quadriert ergeben } 9^2 + 15^2 = C^2, \text{ also } C = \pm\sqrt{9^2 + 15^2} = \pm\sqrt{306}.$$

$$\text{Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt } \frac{C \sin \varphi}{C \cos \varphi} = \frac{-15}{9} = \tan \varphi.$$

Also ist $\varphi = \arctan(\frac{-5}{3})$.

Hier kann der \arctan_0 verwendet werden, wenn das Vorzeichen von C entsprechend angepasst wird:

Wir wählen $x = 0$, dann gilt $15 \sin(ax) - 9 \cos(ax)|_{x=0} = -9$ und $\pm\sqrt{306} \cos(\arctan_0(\frac{-5}{3})) = -9$, wenn das negative Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus positiv gewesen, dann hätten wir das positive Vorzeichen wählen müssen.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | |
|-----------------------------|--|---------------------------------------|--|-----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $-\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | $-\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 3 | $15 \sin(ax + 9)$ |
| <input type="checkbox"/> 4 | $-\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 5 | $6 \sin(ax)$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\pm\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\pm\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 9 | $6 \sin(ax + 9)$ |
| <input type="checkbox"/> 10 | $-\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\pm\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ |

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Fehler beim Additionstheorem
<input checked="" type="checkbox"/>	$-\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	richtig
<input type="checkbox"/>	$15 \sin(ax + 9)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: Fehler beim Satz von Pythagoras
<input type="checkbox"/>	$6 \sin(ax)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: falsche Punktprobe
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$6 \sin(ax + 9)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Fehler beim Satz von Pythagoras
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{306} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$\sqrt{144} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$	DF: Fehler beim Satz von Pythagoras

MV 05 Blatt 06 Kapitel 4.2 Grenzwerte
keine Stetigkeit Nummer: 56 0 200506011 Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 14.1.2: Sei $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definiert durch $f(x) = -x^2 + 4x + 7$, $x_0 = 2$ und sei $\varepsilon = \frac{1}{25}$ gewählt. Bestimmen Sie das maximale $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle x , für die $|x - x_0| < \delta$ gilt, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist oder $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Parameter:

$x_2 = x$ - Wert des Scheitels = x_0 , $x_3 = y$ - Wert des y - Achsenschnittpunktes, $\varepsilon = \frac{1}{(x_1)^2}$, $x_i > 1$, $i = 1, 2, 3$
Es gilt also $f(x) = -x^2 + \{2 \cdot x_2\}x + x_3$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 2$ $x_3 = 7$.

Erklärung:

Um das δ zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

Rechnung:

$f(x_0) = f(2) = 11$. x_0 ist der Scheitel bzw. Hochpunkt der Parabel. Um $f^{-1}(x)$ zu berechnen, müssen wir die Gleichung $x = -y^2 + 4y + 7$ nach y auflösen:

$$y^2 - 4y - 7 + x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 28 - 4x}}{2} \Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{11 - x}$$

$$f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) = f^{-1}\left(\frac{275 - 1}{25}\right) = 2 \pm \sqrt{11 - \frac{274}{25}} = 2 \pm \sqrt{\frac{275 - 274}{25}} = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{25}} = 2 \pm \frac{1}{5}.$$

Damit ist $f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) - x_0 = \pm\frac{1}{5}$. Mit $\delta = \frac{1}{5}$ gilt $|f(x_0) - f(x_0 - \delta)| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| = \varepsilon$. Aus den diversen Monotonieeigenschaften folgt $\delta = \frac{1}{5}$. $f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon) - x_0$ ist nicht definiert. Bitte beachten Sie, dass $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0))$ ist und damit die Teilmengenbeziehung echt ist.

Angeborene Lösungen:

<input type="checkbox"/>	$\delta = \pm\frac{1}{5}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = \frac{1}{625}$	<input checked="" type="checkbox"/>	$\delta = \frac{1}{5}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = x_0$
<input type="checkbox"/>	$\delta = \pm x_0$	<input type="checkbox"/>	$\delta = -\frac{1}{5}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = \frac{1}{25}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = -\frac{1}{625}$
<input type="checkbox"/>	es gibt keines	<input type="checkbox"/>	$\delta = -\frac{1}{25}$	<input type="checkbox"/>	$\delta = \pm\varepsilon$	<input type="checkbox"/>	$\delta = \pm\frac{1}{625}$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$\delta = \pm \frac{1}{5}$	DF: δ ist eindeutig
<input type="checkbox"/> 2	$\delta = \frac{1}{625}$	DF: Lösung geraten
<input checked="" type="checkbox"/> 3	$\delta = \frac{1}{5}$	richtig
<input type="checkbox"/> 4	$\delta = x_0$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 5	$\delta = \pm x_0$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 6	$\delta = -\frac{1}{5}$	DF: $\delta > 0$
<input type="checkbox"/> 7	$\delta = \frac{1}{25}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 8	$\delta = -\frac{1}{625}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 9	es gibt keines	DF: doch, f ist stetig
<input type="checkbox"/> 10	$\delta = -\frac{1}{25}$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 11	$\delta = \pm \varepsilon$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 12	$\delta = \pm \frac{1}{625}$	DF: Lösung geraten

MV 05 Blatt 06 Kapitel 4.2 Grenzwerte
 Asymptoten Funktionen Nummer: 57 0 2005060009 Kl: 14G
 Grad: 40 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 14.1.3: Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 + 7x^2} \right)$$

Parameter:

x_i = Nullstellen und Asymptoten des Logarithmusargumentes, $x_3 > x_2 > x_1 > 1$.

Die Funktion lautet so: $\ln \left(\frac{x^2 + \{x_2 - x_1\}x - \{x_2 \cdot x_1\}}{x^3 + x_3x^2} \right)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $x_2 = 5$ $x_3 = 7$.

Erklärung:

Die wichtigen Werte des \ln sind: $\ln(0) = -\infty$, $\ln 1 = 0$ und $\ln \infty = \infty$. $\ln x$ ist nur für $x > 0$ definiert.

Rechnung:

$\ln x$ ist genau dann definiert, wenn $x > 0$ ist. Deshalb betrachten wir zuerst das Argument des \ln :

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 + 7x^2} > 0.$$

Wir wenden die Methode von Knapp an. Die Grenzen sind: -7 , -5 , 0 , 3 . Mittels Punktprobe erhalten wir folgende Lösungen:

$(-\infty, -7)$: Nein ; $(-7, -5)$: Ja ; $(-5, 0)$: Nein ; $(0, 3)$: Nein ; $(3, \infty)$: Ja ;

Damit ist $ID = (-7, -5) \cup (3, \infty)$ $\ln h$ hat genau für $h = 0$ und $h = \infty$ senkrechte Asymptoten. Bei $h = -\infty$ hat $\ln h$ nicht unbedingt senkrechte Asymptoten. Damit gilt: $f(x)$ hat senkrechte Asymptoten bei $x = -7$, $x = -5$ und bei $x = 3$. Für $x \rightarrow \infty$ geht $h(x)$ gegen 0 und damit $\ln(h(x)) \rightarrow -\infty$. $f(x)$ hat weder waagrechte noch schiefe Asymptoten. Bei schiefen Asymptoten müsste es eine Gerade $g = mx + c$ geben mit $|\ln(h(x)) - g(x)| \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$.

Angebotene Lösungen:

<input type="checkbox"/> 1	f hat keine	<input type="checkbox"/> 2	f hat unendlich viele
<input type="checkbox"/> 3	$x = -7$	<input type="checkbox"/> 4	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3$
<input type="checkbox"/> 5	$x = -7, x = 0, y = 0$	<input checked="" type="checkbox"/> 5	$x = -7, x = -5, x = 3$
<input type="checkbox"/> 7	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3, y = 0$	<input type="checkbox"/> 8	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3, y = 1$
<input type="checkbox"/> 9	$x = -7, x = -5, x = 3, y = 0$	<input type="checkbox"/> 10	$x = -7, x = -5, y = 0$
<input type="checkbox"/> 11	$x = -7, x = 0$	<input type="checkbox"/> 12	$x = -7, x = -5, x = 0$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	f hat keine	DF: falsch
<input type="checkbox"/> 2	f hat unendlich viele	DF: falsch
<input type="checkbox"/> 3	$x = -7$	DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten
<input type="checkbox"/> 4	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3$	DF: $x = 0$ grenzt nicht an \mathbb{D}
<input type="checkbox"/> 5	$x = -7, x = 0, y = 0$	DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten
<input checked="" type="checkbox"/> 6	$x = -7, x = -5, x = 3$	richtig
<input type="checkbox"/> 7	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3, y = 0$	DF: $x = 0$ grenzt nicht an \mathbb{D}
<input type="checkbox"/> 8	$x = -7, x = -5, x = 0, x = 3, y = 1$	DF: $x = 0$ grenzt nicht an \mathbb{D}
<input type="checkbox"/> 9	$x = -7, x = -5, x = 3, y = 0$	DF: f hat keine waagrechten Asymptoten
<input type="checkbox"/> 10	$x = -7, x = -5, y = 0$	DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten
<input type="checkbox"/> 11	$x = -7, x = 0$	DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten
<input type="checkbox"/> 12	$x = -7, x = -5, x = 0$	DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten

MV 05 Blatt 06 Kapitel 4.2 Grenzwerte
 Asymptoten Funktionen Nummer: 87 0 200506009 Kl: 14G
 Grad: 40 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 14.1.4: Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \arctan_0 \left(\frac{(3x + 15) \cdot (x + 8)}{(3x + 33) \cdot (x + 5)} \right)$$

Parameter:

x_i = Nullstellen und Asymptoten des Arkustangensargumentes, $x_i \geq 2$
 x_2, x_3, x_4 paarweise verschieden.

$$\text{Die Funktion lautet so: } f(x) = \arctan_0 \left(\frac{(x_1 x + \{x_1 \cdot x_2\}) \cdot (x + x_3)}{(x_1 x + \{x_1 \cdot x_4\}) \cdot (x + x_2)} \right) .$$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $x_2 = 5$ $x_3 = 8$ $x_4 = 11$.

Erklärung:

Die wichtigen Werte des \arctan_0 sind: $\arctan_0(0) = 0$, $\arctan_0(\pm 1) = \frac{\pm\pi}{4}$ und $\arctan_0(\pm\infty) = \frac{\pm\pi}{2}$.

Rechnung:

Senkrechte Asymptoten des Arkustangensargumentes erzeugen lediglich eine Unstetigkeitsstelle aber keine senkrechte Asymptote. Zum Beispiel gilt für die Funktion $g(x) = \arctan_0(\frac{1}{x})$:

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \arctan_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \arctan_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Der Betrag beider Grenzwerte ist ungleich unendlich, damit liegen keine senkrechten Asymptoten vor.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan_0 \left(\frac{(3x + 15) \cdot (x + 8)}{(3x + 33) \cdot (x + 5)} \right) = \arctan_0(1) = \frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan_0 \left(\frac{(3x + 15) \cdot (x + 8)}{(3x + 33) \cdot (x + 5)} \right) .$$

Damit ist die einzige (waagrechte) Asymptote $y = \frac{\pi}{4}$.

Angeborene Lösungen:

<input type="checkbox"/> 1	$y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -11$	<input type="checkbox"/> 2	f hat keine	<input type="checkbox"/> 3	$y = 0$
<input checked="" type="checkbox"/> 4	$y = \frac{\pi}{4}$	<input type="checkbox"/> 5	$y = \pm \frac{\pi}{2}$	<input type="checkbox"/> 6	f hat unendlich viele
<input type="checkbox"/> 7	$y = 0$, $x = -5$ und $x = -11$	<input type="checkbox"/> 8	$y = 0$ und $x = 0$	<input type="checkbox"/> 9	$y = \frac{\pi}{4}$ und $x = -11$
<input type="checkbox"/> 10	$y = \frac{\pi}{2}$, $x = -5$ und $x = -11$	<input type="checkbox"/> 11	$x = -11$	<input type="checkbox"/> 12	$y = \pm \frac{\pi}{4}$

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -11$	DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$
<input type="checkbox"/> 2	f hat keine	DF: falsch
<input type="checkbox"/> 3	$y = 0$	DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$
<input checked="" type="checkbox"/> 4	$y = \pm \frac{\pi}{4}$	richtig
<input type="checkbox"/> 5	$y = \pm \frac{\pi}{2}$	DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$
<input type="checkbox"/> 6	f hat unendlich viele	DF: falsch
<input type="checkbox"/> 7	$y = 0$, $x = -5$ und $x = -11$	DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$
<input type="checkbox"/> 8	$y = 0$ und $x = 0$	DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$
<input type="checkbox"/> 9	$y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -11$	DF: f hat keine senkrechten Asymptoten
<input type="checkbox"/> 10	$y = \pm \frac{\pi}{2}$, $x = -5$ und $x = -11$	DF: f hat keine senkrechten Asymptoten
<input type="checkbox"/> 11	$x = -11$	DF: f hat keine senkrechten Asymptoten
<input type="checkbox"/> 12	$y = \pm \frac{\pi}{4}$	DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$

MV 05 Blatt 06 Kapitel 4.2 Grenzwerte
keine Stetigkeit Nummer: 98 0 200506010 Kl: 14G
Grad: 40 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 14.1.5: Sei $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definiert durch $f(x) = -2x + 5$, $x_0 = 4$ und sei ein $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Bestimmen Sie das maximale $\delta > 0$ (abhängig von ε) mit der Eigenschaft, dass für alle x , für die $|x - x_0| < \delta$ gilt, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist oder $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Damit haben Sie die Stetigkeit von f an der Stelle x_0 gezeigt.

Parameter:

$x_1 =$ (negative) Steigung, $x_2 = y$ - Achsenabschnitt von f , x_3 entspricht x_0 , $x_2 \neq x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2$ $x_2 = 5$ $x_3 = 4$.

Erklärung:

Um das δ zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

Rechnung:

$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{-2}$. Nach der Formel von Schmid ist

$$\delta = \pm(f^{-1}(f(4) \pm \varepsilon) - 4) = \pm(f^{-1}(-3 \pm \varepsilon) - 4) = \pm\left(\frac{(-3 \pm \varepsilon) - 5}{-2} - 4\right) = \pm\left(\frac{-8}{-2} - 4 \pm \frac{\varepsilon}{-2}\right) = \pm\frac{\varepsilon}{-2}.$$

Wenn wir das negative Vorzeichen wählen, erhalten wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Es gilt $f(x_0 - \delta) = f(x_0) + \varepsilon$ und $f(x_0 + \delta) = f(x_0) - \varepsilon$.

Weil f streng monoton fallend ist, folgt die Behauptung. Bitte beachten Sie hierbei, dass $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ ist. Die gilt normalerweise nicht.

Angeborene Lösungen:

<input type="checkbox"/> 1	$\frac{-\varepsilon+4}{5}$	<input type="checkbox"/> 2	$\frac{\varepsilon-5}{2}$	<input type="checkbox"/> 3	$\pm \frac{\varepsilon}{5}$	<input type="checkbox"/> 4	$\frac{-\varepsilon+5}{2}$
<input type="checkbox"/> 5	$\frac{\varepsilon-5}{4}$	<input type="checkbox"/> 6	ε	<input type="checkbox"/> 7	$\frac{\varepsilon-4}{5}$	<input type="checkbox"/> 8	$\frac{2}{5}$
<input type="checkbox"/> 9	0	<input type="checkbox"/> 10	$\pm \frac{\varepsilon}{2}$	<input checked="" type="checkbox"/> 11	$\frac{\varepsilon}{2}$	<input type="checkbox"/> 12	Es gibt keines

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/> 1	$\frac{-\varepsilon+4}{5}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 2	$\frac{\varepsilon-5}{2}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 3	$\pm\frac{\varepsilon}{5}$	DF: δ ist eindeutig
<input type="checkbox"/> 4	$\frac{-\varepsilon+5}{2}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 5	$\frac{\varepsilon-5}{4}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 6	ε	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/> 7	$\frac{\varepsilon-4}{5}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 8	$\frac{2}{5}$	DF: geraten
<input type="checkbox"/> 9	0	DF: $\delta > 0$
<input type="checkbox"/> 10	$\pm\frac{\varepsilon}{2}$	DF: δ ist eindeutig
<input checked="" type="checkbox"/> 11	$\frac{\varepsilon}{2}$	richtig
<input type="checkbox"/> 12	Es gibt keines	DF: doch, f ist stetig

MV 05 Blatt 09 Kapitel 6.4 trigonometrische
keine ElementareFktn Nummer: 101 0 200509007 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 14.1.6: Bestimmen Sie die Summe $4 \sin(ax) + 6 \cos(ax)$ als Term von der Form $C \cdot \cos(ax + \varphi)$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$.

Parameter:

x_1 = Faktor vor dem Sinus $x_1 > 1$.
 x_2 = Faktor vor dem Kosinus $x_2 > x_1$.

Die Formel lautet: $x_1 \sin(ax) + x_2 \cos(ax)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 6$.

Erklärung:

Wenden Sie das Additionstheorem des Kosinus auf $\cos(ax + \varphi)$ an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

Rechnung:

$$C \cos(ax + \varphi) = C \cos(ax) \cos \varphi - C \sin(ax) \sin \varphi = 6 \cos(ax) + 4 \sin(ax).$$

Koeffizientenvergleich ergibt (1) $6 = C \cos \varphi$ und (2) $-4 = C \sin \varphi$.

Beide Gleichungen quadriert ergeben $6^2 + 4^2 = C^2$, also $C = \pm\sqrt{6^2 + 4^2} = \pm\sqrt{52}$.

Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt $\frac{C \sin \varphi}{C \cos \varphi} = \frac{-4}{6} = \tan \varphi$.

Also ist $\varphi = \arctan\left(\frac{-2}{3}\right)$.

Hier kann der \arctan_0 verwendet werden, wenn das Vorzeichen von C entsprechend angepasst wird:

Wir wählen $x = 0$, dann gilt $4 \sin(ax) + 6 \cos(ax)|_{x=0} = 6$ und $\pm\sqrt{52} \cos(\arctan_0(\frac{-2}{3})) = 6$, wenn das positive Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus negativ gewesen, dann hätten wir das negative Vorzeichen wählen müssen.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | |
|-----------------------------|---|-----------------------------|---|---------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$ | <input type="checkbox"/> 2 | $\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\pm\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$ |
| <input type="checkbox"/> 4 | $6 \cos(ax + 4)$ | <input type="checkbox"/> 5 | $\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{3}{2}))$ | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | $\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{2}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\pm\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 9 | $-\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 11 | $\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$ | <input type="checkbox"/> 12 | $-\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$ |

Fehlerinterpretation:

<input type="checkbox"/>	$\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Fehler beim Quadrieren
<input type="checkbox"/>	$\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Falsch dividiert
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$6 \cos(ax + 4)$	DF: Lösung geraten
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{3}{2}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input checked="" type="checkbox"/>	$\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	richtig
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{2}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Falsches Vorzeichen gewählt
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-2}{3}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$\pm\sqrt{20} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Ergebnis ist eindeutig
<input type="checkbox"/>	$-\sqrt{52} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{2}))$	DF: Falsches Vorzeichen gewählt

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>