Blatt Nr 14.04

**Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 14**

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 05 | Blatt 06 | Kapitel 4.2 | Grenzwerte |
| keine | Stetigkeit | Nummer: 35 0 200506011 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 14.1.1:** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = -x^2+8x+2$, $x_0 = 4$ und sei $\varepsilon = \frac{1}{9}$ gewählt. Bestimmen Sie das maximale $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x$, für die $|x - x_0| < \delta$ gilt, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist oder $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

**Parameter:**

$x_2 = x-$ Wert des Scheitels $= x_0$, $x_3 = y-$ Wert des $y-$ Achsenschnittpunktes, $\varepsilon = \frac{1}{(x_1)^2}$ , $x_i > 1$, $i = 1, 2, 3$
Es gilt also $f(x) = -x^2 + \{2 \cdot x_2\}x + x_3$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $\quad x_2 = 4$ $\quad x_3 = 2$.

**Erklärung:**

Um das $\delta$ zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

**Rechnung:**

$f(x_0) = f(4) = 18$. $x_0$ ist der Scheitel bzw. Hochpunkt der Parabel. Um $f^{-1}(x)$ zu berechnen, müssen wir die Gleichung $x = -y^2 + 8y + 2$ nach $y$ auflösen:

$$y^2 - 8y - 2 + x = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 8 - 4x}}{2} \;\Leftrightarrow\; y = 4 \pm \sqrt{18 - x}$$

$$f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) = f^{-1}\left(\frac{162 - 1}{9}\right) = 4 \pm \sqrt{18 - \frac{161}{9}} = 4 \pm \sqrt{\frac{162 - 161}{9}} = 4 \pm \sqrt{\frac{1}{9}} = 4 \pm \frac{1}{3}.$$

Damit ist $f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) - x_0 = \pm\frac{1}{3}$. Mit $\delta = \frac{1}{3}$ gilt $|f(x_0) - f(x_0 - \delta)| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| = \varepsilon$. Aus den diversen Monotonieeigenschaften folgt $\delta = \frac{1}{3}$. $f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon) - x_0$ ist nicht definiert. Bitte beachten Sie, dass $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f_(x_0)]$ ist und damit die Teilmengenbeziehung echt ist.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 $\delta = x_0$ | 2 $\delta = -\frac{1}{9}$ | 3 $\delta = \frac{1}{9}$ | ☒ $\delta = \frac{1}{3}$ |
| 5 $\delta = \pm\frac{1}{81}$ | 6 $\delta = -\frac{1}{3}$ | 7 $\delta = \pm\frac{1}{3}$ | 8 $\delta = \pm x_0$ |
| 9 $\delta = 0$ | 10 $\delta = \frac{1}{81}$ | 11 $\delta = \pm\varepsilon$ | 12 $\delta = -\frac{1}{81}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\delta = x_0$ | DF: Lösung geraten |
| 2 | $\delta = -\frac{1}{9}$ | DF: Lösung geraten |
| 3 | $\delta = \frac{1}{9}$ | DF: Lösung geraten |
| ☒ | $\delta = \frac{1}{3}$ | richtig |
| 5 | $\delta = \pm\frac{1}{81}$ | DF: Lösung geraten |
| 6 | $\delta = -\frac{1}{3}$ | DF: $\delta > 0$ |
| 7 | $\delta = \pm\frac{1}{3}$ | DF: $\delta$ ist eindeutig |
| 8 | $\delta = \pm x_0$ | DF: Lösung geraten |
| 9 | $\delta = 0$ | DF: $\delta > 0$ |
| 10 | $\delta = \frac{1}{81}$ | DF: Lösung geraten |
| 11 | $\delta = \pm\varepsilon$ | DF: Lösung geraten |
| 12 | $\delta = -\frac{1}{81}$ | DF: Lösung geraten |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 05 | Blatt 06 | Kapitel 4.2 | Grenzwerte |
| Asymptoten | Funktionen | Nummer: 39 0 2005060009 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 14.1.2:** Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 5x - 50}{x^3 + 13x^2}\right)$$

**Parameter:**

$x_i$ = Nullstellen und Asymptoten des Logarithmusargumentes, $x_3 > x_2 > x_1 > 1$.

$$\text{Die Funktion lautet so:} \quad \ln\left(\frac{x^2 + \{x_2 - x_1\}x - \{x_2 \cdot x_1\}}{x^3 + x_3 x^2}\right).$$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 10 \quad x_3 = 13$.

**Erklärung:**

Die wichtigen Werte des ln sind: $\ln(0) = -\infty$, $\ln 1 = 0$ und $\ln\infty = \infty$. $\ln x$ ist nur für $x > 0$ definiert.

**Rechnung:**

$\ln x$ ist genau dann definiert, wenn $x > 0$ ist. Deshalb betrachten wir zuerst das Argument des ln:
$h(x) = \frac{x^2+5x-50}{x^3+13x^2} > 0$.
Wir wenden die Methode von Knapp an. Die Grenzen sind: $-13$, - 10, 0, 5. Mittels Punktprobe erhalten wir folgende Lösungen:
$(-\infty, -13)$ : Nein ; $(-13, -10)$ : Ja ; $(-10, 0)$ : Nein ; $(0, 5)$ : Nein ; $(5, \infty)$ : Ja ;
Damit ist $\mathbb{D} = (-13, -10) \cup (5, \infty)$ $\ln h$ hat genau für $h = 0$ und $h = \infty$ senkrechte Asymptoten. Bei $h = -\infty$ hat $\ln h$ nicht unbedingt senkrechte Asymptoten. Damit gilt: $f(x)$ hat senkrechte Asymptoten bei $x = -13$, $x = -10$ und bei $x = 5$. Für $x \to \infty$ geht $h(x)$ gegen 0 und damit $\ln(h(x)) \to -\infty$. $f(x)$ hat weder waagrechte noch schiefe Asymptoten. Bei schiefen Asymptoten müsste es eine Gerade $g = mx + c$ geben mit $|\ln(h(x)) - g(x)| \to 0$ für $x \to \infty$ .

**Angebotene Lösungen:**

| | |
|---|---|
| [1] $x = -13$ | [2] $x = -13, x = 0, y = 0$ |
| [3] $x = -13, x = -10, x = 0, x = 5$ | [4] $f$ hat keine |
| [5] $x = -13, x = 0$ | [6] $x = -13, x = -10, x = 5, y = 0$ |
| [X] $x = -13, x = -10, x = 5$ | [8] $f$ hat unendlich viele |
| [9] $x = -13, x = -10, y = 0$ | [10] $x = -13, x = -10, x = 0, x = 5, y = 0$ |
| [11] $x = -13, x = -10, x = 0$ | [12] $x = -13, x = -10, x = 0, x = 5, y = 1$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| [1] $x = -13$ | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| [2] $x = -13, x = 0, y = 0$ | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| [3] $x = -13, x = -10, x = 0, x = 5$ | DF: $x = 0$ grenzt nicht an $\mathbb{D}$ |
| [4] $f$ hat keine | DF: falsch |
| [5] $x = -13, x = 0$ | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| [6] $x = -13, x = -10, x = 5, y = 0$ | DF: $f$ hat keine waagrechten Asymptoten |
| [X] $x = -13, x = -10, x = 5$ | richtig |
| [8] $f$ hat unendlich viele | DF: falsch |
| [9] $x = -13, x = -10, y = 0$ | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| [10] $x = -13, x = -10, x = 0, x = 5, y = 0$ | DF: $x = 0$ grenzt nicht an $\mathbb{D}$ |
| [11] $x = -13, x = -10, x = 0$ | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| [12] $x = -13, x = -10, x = 0, x = 5, y = 1$ | DF: $x = 0$ grenzt nicht an $\mathbb{D}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 05 | Blatt 06 | Kapitel 4.2 | Grenzwerte |
| Asymptoten | Funktionen | Nummer: 75 0 200506009 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 14.1.3:** Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \arctan_0\left(\frac{(5x+10)\cdot(x+5)}{(5x+35)\cdot(x+2)}\right)$$

**Parameter:**

$x_i$ = Nullstellen und Asymptoten des Arkustangensargumentes, $x_i \geq 2$
$x_2, x_3, x_4$ paarweise verschieden.

$$\text{Die Funktion lautet so: } f(x) = \arctan_0\left(\frac{(x_1x+\{x_1\cdot x_2\})\cdot(x+x_3)}{(x_1x+\{x_1\cdot x_4\})\cdot(x+x_2)}\right) \quad .$$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 7$.

**Erklärung:**

Die wichtigen Werte des $\arctan_0$ sind: $\arctan_0(0) = 0$, $\arctan_0(\pm 1) = \frac{\pm\pi}{4}$ und $\arctan_0(\pm\infty) = \frac{\pm\pi}{2}$.

**Rechnung:**

Senkrechte Asymptoten des Arkustangesargumentes erzeugen lediglich eine Unstetigkeitsstelle aber keine senkrechte Asymptote. Zum Beispiel gilt für die Funktion $g(x) = \arctan_0(\frac{1}{x})$:

$$\lim_{x\to 0, x<0} \arctan_0(\frac{1}{x}) = \frac{-\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 0, x>0} \arctan_0(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

Der Betrag beider Grenzwerte ist ungleich unendlich, damit liegen keine senkrechten Asymptoten vor.

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan_0\left(\frac{(5x+10)\cdot(x+5)}{(5x+35)\cdot(x+2)}\right) = \arctan_0(1) = \frac{\pi}{4} = \lim_{x\to+\infty} \arctan_0\left(\frac{(5x+10)\cdot(x+5)}{(5x+35)\cdot(x+2)}\right) .$$

Damit ist die einzige (waagrechte) Asymptote $y = \frac{\pi}{4}$.

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| [1] $y = 0$ und $x = -7$ | [2] $y = \pm\frac{\pi}{2}$ , $x = -2$ und $x = -7$ | [3] $f$ hat unendlich viele |
| [4] $y = \frac{\pi}{2}$ und $x = -7$ | [X] $y = \frac{\pi}{4}$ | [6] $y = \pm\frac{\pi}{4}$ und $x = -7$ |
| [7] $y = \pm\frac{\pi}{2}$ | [8] $y = \frac{\pi}{4}$ , $x = -2$ und $x = -7$ | [9] $f$ hat keine |
| [10] $y = 0$ , $x = -2$ und $x = -7$ | [11] $y = 0$ und $x = 0$ | [12] $y = \pm\frac{\pi}{4}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| [1] $y = 0$ und $x = -7$ | DF: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ |
| [2] $y = \pm\frac{\pi}{2}$ , $x = -2$ und $x = -7$ | DF: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$ |
| [3] $f$ hat unendlich viele | DF: falsch |
| [4] $y = \frac{\pi}{2}$ und $x = -7$ | DF: $f$ hat keine senkrechten Asymptoten |
| [X] $y = \frac{\pi}{4}$ | richtig |
| [6] $y = \pm\frac{\pi}{4}$ und $x = -7$ | DF: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$ |
| [7] $y = \pm\frac{\pi}{2}$ | DF: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$ |
| [8] $y = \frac{\pi}{4}$ , $x = -2$ und $x = -7$ | DF: $f$ hat keine senkrechten Asymptoten |
| [9] $f$ hat keine | DF: falsch |
| [10] $y = 0$ , $x = -2$ und $x = -7$ | DF: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ |
| [11] $y = 0$ und $x = 0$ | DF: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ |
| [12] $y = \pm\frac{\pi}{4}$ | DF: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 05 | Blatt 09 | Kapitel 6.4 | trigonometrische |
| keine | ElementareFktn | Nummer: 76 0 200509007 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 14.1.4:** Bestimmen Sie die Summe $3\sin(ax)+7\cos(ax)$ als Term von der Form $C\cdot\cos(ax+\varphi)$ für alle $a\in\mathbb{R}^+$ und $x\in\mathbb{R}$.

**Parameter:**

$x_1$ = Faktor vor dem Sinus $x_1>1$.
$x_2$ = Faktor vor dem Kosinus $x_2>x_1$.

Die Formel lautet: $x_1\sin(ax)+x_2\cos(ax)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=3$ $\quad x_2=7$.

**Erklärung:**

Wenden Sie das Additionstheorem des Kosinus auf $\cos(ax+\varphi)$ an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

**Rechnung:**

$$C\cos(ax+\varphi) = C\cos(ax)\cos\varphi - C\sin(ax)\sin\varphi = 7\cos(ax)+3\sin(ax).$$

Koeffizientenvergleich ergibt (1) $7 = C\cos\varphi$ und (2) $-3 = C\sin\varphi$.

Beide Gleichungen quadriert ergeben $7^2+3^2=C^2$, also $C = \pm\sqrt{7^2+3^2} = \pm\sqrt{58}$.

Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt $\frac{C\sin\varphi}{C\cos\varphi} = \frac{-3}{7} = \tan\varphi$.

Also ist $\varphi=\arctan(\frac{-3}{7})$.
Hier kann der $\arctan_0$ verwendet werden, wenn das Vorzeichen von $C$ entsprechend angepasst wird:
Wir wählen $x=0$, dann gilt $3\sin(ax)+7\cos(ax)|_{x=0} = 7$ und $\pm\sqrt{58}\cos(\arctan(\frac{-3}{7}))=7$, wenn das positive Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus negativ gewesen, dann hätten wir das negative Vorzeichen wählen müssen.

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 $\pm\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-3}{7}))$ | 2 $\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ | ☒ $\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-3}{7}))$ |
| 4 $-\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-3}{7}))$ | 5 $\pm\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\pm\frac{3}{7}))$ | 6 $7\cos(ax)$ |
| 7 $\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ | 8 $\pm\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-3}{7}))$ | 9 $-\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ |
| 10 $\pm\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\pm\frac{7}{3}))$ | 11 $\pm\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ | 12 $-\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| 1 $\pm\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-3}{7}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| 2 $\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ | DF: Fehler beim Quadrieren |
| ☒ $\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-3}{7}))$ | richtig |
| 4 $-\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-3}{7}))$ | DF: Falsches Vorzeichen gewählt |
| 5 $\pm\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\pm\frac{3}{7}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| 6 $7\cos(ax)$ | DF: Lösung geraten |
| 7 $\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ | DF: Falsch dividiert |
| 8 $\pm\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-3}{7}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| 9 $-\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ | DF: Falsches Vorzeichen gewählt |
| 10 $\pm\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\pm\frac{7}{3}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| 11 $\pm\sqrt{58}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| 12 $-\sqrt{40}\cos(ax+\arctan_0(\frac{-7}{3}))$ | DF: Falsches Vorzeichen gewählt |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 05 | Blatt 09 | Kapitel 6.4 | trigonometrische |
| keine | ElementareFktn | Nummer: 104 0 200509008 | Kl: 14G |
| Grad: 20 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 14.1.5:** Bestimmen Sie die Summe $2\sin(ax) - 6\sqrt{2}\cos(ax+\frac{\pi}{4})$ als Term von der Form $C \cdot \sin(ax+\varphi)$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$.

**Parameter:**

$x_1$ = Faktor vor dem Sinus $x_1 > 1$.
$x_2$ = Faktor vor dem Kosinus $x_1 > x_2 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 \sin(ax) - \sqrt{2}x_2 \cos(ax+\frac{\pi}{4})$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 6$.

**Erklärung:**

Wenden Sie die Additionstheoreme des Kosinus und Sinus auf $\sin(ax+\varphi)$ und auf $\cos(ax+\frac{\pi}{4})$ an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

**Rechnung:**

$$\begin{array}{rcll} -\sqrt{2}\cdot 6\cos(ax+\frac{\pi}{4}) & = & -\sqrt{2}\cdot 6\cos(ax)\cos(\frac{\pi}{4}) \quad + \quad \sqrt{2}\cdot 6\sin(ax)\sin(\frac{\pi}{4}) & \text{Kosinus - Additionstheorem} \\ & = & -6\sqrt{2}\cdot\cos(ax)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad + \quad 6\sqrt{2}\sin(ax)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & = & -6\cos(ax) + 6\sin(ax) & \end{array}$$

$C\sin(ax+\varphi) = C\sin(ax)\cos\varphi + C\cos(ax)\sin\varphi = -6\cos(ax)+6\sin(ax)+2\sin(ax) = -6\cos(ax)+8\sin(ax)$.
Koeffizientenvergleich ergibt (1) $-6 = C\cos\varphi$ und (2) $8 = C\sin\varphi$.
Beide Gleichungen quadriert ergeben $6^2+8^2 = C^2$, also $C = \pm\sqrt{6^2+8^2} = \pm\sqrt{100}$.

Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt $\frac{C\sin\varphi}{C\cos\varphi} = \frac{-8}{6} = \tan\varphi$.

Also ist $\varphi = \arctan(\frac{-4}{3})$.
Hier kann der $\arctan_0$ verwendet werden, wenn das Vorzeichen von $C$ entsprechend angepasst wird:
Wir wählen $x = 0$, dann gilt $8\sin(ax) - 6\cos(ax)|_{x=0} = -6$ und $\pm\sqrt{100}\cos(\arctan(\frac{-4}{3})) = -6$, wenn das negative Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus positiv gewesen, dann hätten wir das positive Vorzeichen wählen müssen.

**Angebotene Lösungen:**

| | | |
|---|---|---|
| ☐1 $-\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-1}{3}))$ | ☐2 $\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | ☐3 $\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ |
| ☐4 $\pm\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | ☐5 $2\sin(ax+6)$ | ☐6 $\pm\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ |
| ☐7 $8\sin(ax+6)$ | ☐8 $-\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | ☐9 $-\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-1}{3}))$ |
| ☐10 $\pm\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\pm\frac{1}{3}))$ | ☒ $-\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | ☐12 $\pm\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-1}{3}))$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | |
|---|---|
| ☐1 $-\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-1}{3}))$ | DF: Fehler beim Additionstheorem |
| ☐2 $\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | DF: falsche Punktprobe |
| ☐3 $\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | DF: Fehler beim Satz von Pythagoras |
| ☐4 $\pm\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| ☐5 $2\sin(ax+6)$ | DF: Lösung geraten |
| ☐6 $\pm\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| ☐7 $8\sin(ax+6)$ | DF: Lösung geraten |
| ☐8 $-\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | DF: Fehler beim Satz von Pythagoras |
| ☐9 $-\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-1}{3}))$ | DF: Fehler beim Satz von Pythagoras |
| ☐10 $\pm\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\pm\frac{1}{3}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| ☒ $-\sqrt{100}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-4}{3}))$ | richtig |
| ☐12 $\pm\sqrt{28}\sin(ax+\arctan_0(\frac{-1}{3}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MV 05 | Blatt 06 | Kapitel 4.2 | Grenzwerte |
| keine | Stetigkeit | Nummer: 107 0 200506010 | Kl: 14G |
| Grad: 40 Zeit: 30 | Quelle: keine | W | |

**Aufgabe 14.1.6:** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = -3x + 2$, $x_0 = 7$ und sei ein $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Bestimmen Sie das maximale $\delta > 0$ (abhängig von $\varepsilon$) mit der Eigenschaft, dass für alle $x$, für die $|x - x_0| < \delta$ gilt, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist oder $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Damit haben Sie die Stetigkeit von $f$ an der Stelle $x_0$ gezeigt.

**Parameter:**

$x_1 =$ (negative) Steigung, $x_2 = y-$ Achsenabschnitt von $f$, $x_3$ entspricht $x_0$, $x_2 \neq x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 7$.

**Erklärung:**

Um das $\delta$ zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

**Rechnung:**

$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{-3}$. Nach der Formel von Schmid ist

$$\delta = \pm(f^{-1}(f(7)\pm\varepsilon)-7) = \pm(f^{-1}(-19\pm\varepsilon)-7) = \pm(\frac{(-19 \pm \varepsilon) - 2}{-3}-7) = \pm(\frac{-21}{-3}-7\pm\frac{\varepsilon}{-3}) = \pm\frac{\varepsilon}{-3}.$$

Wenn wir das negative Vorzeichen wählen, erhalten wir $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.
Es gilt $f(x_0 - \delta) = f(x_0) + \varepsilon$ und $f(x_0 + \delta) = f(x_0) - \varepsilon$.
Weil $f$ streng monoton fallend ist, folgt die Behauptung. Bitte beachten Sie hierbei, dass $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ ist. Die gilt normalerweise nicht.

**Angebotene Lösungen:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| [1] $\frac{1}{7}$ | [2] 2 | [3] $\frac{\varepsilon}{7}$ | [4] $\pm\varepsilon$ |
| [X] $\frac{\varepsilon}{3}$ | [6] $\frac{-\varepsilon+2}{3}$ | [7] $\pm\frac{\varepsilon}{2}$ | [8] Es gibt keines |
| [9] $\frac{5}{3}$ | [10] $\pm\frac{\varepsilon}{3}$ | [11] $\varepsilon$ | [12] $\frac{\varepsilon-2}{3}$ |

**Fehlerinterpretation:**

| | | |
|---|---|---|
| [1] | $\frac{1}{7}$ | DF: geraten |
| [2] | 2 | DF: geraten |
| [3] | $\frac{\varepsilon}{7}$ | DF: geraten |
| [4] | $\pm\varepsilon$ | DF: Lösung geraten |
| [X] | $\frac{\varepsilon}{3}$ | richtig |
| [6] | $\frac{-\varepsilon+2}{3}$ | DF: geraten |
| [7] | $\pm\frac{\varepsilon}{2}$ | DF: $\delta$ ist eindeutig |
| [8] | Es gibt keines | DF: doch, $f$ ist stetig |
| [9] | $\frac{5}{3}$ | DF: geraten |
| [10] | $\pm\frac{\varepsilon}{3}$ | DF: $\delta$ ist eindeutig |
| [11] | $\varepsilon$ | DF: Lösung geraten |
| [12] | $\frac{\varepsilon-2}{3}$ | DF: geraten |

**Allgemeine Hinweise:**
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de ).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu