

## Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 14

MV 05                      Blatt 06                      Kapitel 4.2                      Grenzwerte  
 Asymptoten                      Funktionen                      Nummer: 11 0 200506009                      Kl: 14G  
 Grad: 40 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 14.1.1:** Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \arctan_0 \left( \frac{(4x + 12) \cdot (x + 6)}{(4x + 32) \cdot (x + 3)} \right)$$

**Parameter:**

$x_i$  = Nullstellen und Asymptoten des Arkustangensargumentes,  $x_i \geq 2$   
 $x_2, x_3, x_4$  paarweise verschieden.

$$\text{Die Funktion lautet so: } f(x) = \arctan_0 \left( \frac{(x_1 x + \{x_1 \cdot x_2\}) \cdot (x + x_3)}{(x_1 x + \{x_1 \cdot x_4\}) \cdot (x + x_2)} \right).$$

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 4$      $x_2 = 3$      $x_3 = 6$      $x_4 = 8$ .

**Erklärung:**

Die wichtigen Werte des  $\arctan_0$  sind:  $\arctan_0(0) = 0$ ,  $\arctan_0(\pm 1) = \frac{\pm\pi}{4}$  und  $\arctan_0(\pm\infty) = \frac{\pm\pi}{2}$ .

**Rechnung:**

Senkrechte Asymptoten des Arkustangensargumentes erzeugen lediglich eine Unstetigkeitsstelle aber keine senkrechte Asymptote. Zum Beispiel gilt für die Funktion  $g(x) = \arctan_0(\frac{1}{x})$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \arctan_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \arctan_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Der Betrag beider Grenzwerte ist ungleich unendlich, damit liegen keine senkrechten Asymptoten vor.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan_0 \left( \frac{(4x + 12) \cdot (x + 6)}{(4x + 32) \cdot (x + 3)} \right) = \arctan_0(1) = \frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan_0 \left( \frac{(4x + 12) \cdot (x + 6)}{(4x + 32) \cdot (x + 3)} \right).$$

Damit ist die einzige (waagrechte) Asymptote  $y = \frac{\pi}{4}$ .

**Angebote Lösung:**

- |  |  |   |
|--|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 $y = \pm \frac{\pi}{2}$                         | <input type="checkbox"/> 2 $f$ hat keine                   | <input type="checkbox"/> 3 $y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -8$ |
| <input type="checkbox"/> 4 $y = \pm \frac{\pi}{2}$ , $x = -3$ und $x = -8$ | <input type="checkbox"/> 5 $x = -8$                        | <input type="checkbox"/> 6 $f$ hat unendlich viele              |
| <input type="checkbox"/> 7 $y = 0$ und $x = 0$                             | <input type="checkbox"/> 8 $y = 0$                         | <input type="checkbox"/> 9 $y = \frac{\pi}{4}$ und $x = -8$     |
| <input type="checkbox"/> 10 $y = \frac{\pi}{4}$ , $x = -3$ und $x = -8$    | <input checked="" type="checkbox"/> 11 $y = \frac{\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> 12 $y = 0$ , $x = -3$ und $x = -8$     |

**Fehlerinterpretation:**

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 $y = \pm \frac{\pi}{2}$                         | DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$  |
| <input type="checkbox"/> 2 $f$ hat keine                                   | DF: falsch  |
| <input type="checkbox"/> 3 $y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -8$            | DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$  |
| <input type="checkbox"/> 4 $y = \pm \frac{\pi}{2}$ , $x = -3$ und $x = -8$ | DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$  |
| <input type="checkbox"/> 5 $x = -8$  | DF: $f$ hat keine senkrechten Asymptoten                  |
| <input type="checkbox"/> 6 $f$ hat unendlich viele                         | DF: falsch  |
| <input type="checkbox"/> 7 $y = 0$ und $x = 0$                             | DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ |
| <input type="checkbox"/> 8 $y = 0$   | DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ |
| <input type="checkbox"/> 9 $y = \frac{\pi}{4}$ und $x = -8$                | DF: $f$ hat keine senkrechten Asymptoten                  |
| <input type="checkbox"/> 10 $y = \frac{\pi}{4}$ , $x = -3$ und $x = -8$    | DF: $f$ hat keine senkrechten Asymptoten                  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 11 $y = \frac{\pi}{4}$                 | richtig   |
| <input type="checkbox"/> 12 $y = 0$ , $x = -3$ und $x = -8$                | DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ |

MV 05                      Blatt 09                      Kapitel 6.4                      trigonometrische  
 keine                      ElementareFktn                      Nummer: 14 0 200509007                      Kl: 14G  
 Grad: 20 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 14.1.2:** Bestimmen Sie die Summe  $5 \sin(ax) + 8 \cos(ax)$  als Term von der Form  $C \cdot \cos(ax + \varphi)$  für alle  $a \in \mathbb{R}^+$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

**Parameter:**

$x_1 =$  Faktor vor dem Sinus  $x_1 > 1$ .

$x_2 =$  Faktor vor dem Kosinus  $x_2 > x_1$ .

Die Formel lautet:  $x_1 \sin(ax) + x_2 \cos(ax)$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 5$   $x_2 = 8$ .

**Erklärung:**

Wenden Sie das Additionstheorem des Kosinus auf  $\cos(ax + \varphi)$  an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

**Rechnung:**

$$C \cos(ax + \varphi) = C \cos(ax) \cos \varphi - C \sin(ax) \sin \varphi = 8 \cos(ax) + 5 \sin(ax).$$

Koeffizientenvergleich ergibt (1)  $8 = C \cos \varphi$  und (2)  $-5 = C \sin \varphi$ .

Beide Gleichungen quadriert ergeben  $8^2 + 5^2 = C^2$ , also  $C = \pm\sqrt{8^2 + 5^2} = \pm\sqrt{89}$ .

Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt  $\frac{C \sin \varphi}{C \cos \varphi} = \frac{-5}{8} = \tan \varphi$ .

Also ist  $\varphi = \arctan\left(\frac{-5}{8}\right)$ .

Hier kann der  $\arctan_0$  verwendet werden, wenn das Vorzeichen von  $C$  entsprechend angepasst wird:

Wir wählen  $x = 0$ , dann gilt  $5 \sin(ax) + 8 \cos(ax)|_{x=0} = 8$  und  $\pm\sqrt{89} \cos(\arctan_0(\frac{-5}{8})) = 8$ , wenn das positive Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus negativ gewesen, dann hätten wir das negative Vorzeichen wählen müssen.

**Angebotene Lösungen:**

- |                             |   |                                       |   |                             |   |
|-----------------------------|---|---------------------------------------|---|-----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1  | $\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$    | <input type="checkbox"/> 2            | $\pm\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$   | <input type="checkbox"/> 3  | $-\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$ |
| <input type="checkbox"/> 4  | $\sqrt{39} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$    | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | $\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$      | <input type="checkbox"/> 6  | $\sqrt{39} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$  |
| <input type="checkbox"/> 7  | $\pm\sqrt{39} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$ | <input type="checkbox"/> 8            | $\pm\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$   | <input type="checkbox"/> 9  | $8 \cos(ax)$                                    |
| <input type="checkbox"/> 10 | $8 \cos(ax + 5)$                                  | <input type="checkbox"/> 11           | $\pm\sqrt{39} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{5}{8}))$ | <input type="checkbox"/> 12 | $-\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ |

**Fehlerinterpretation:**

- |                                       |   |                                 |
|---------------------------------------|---|---------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | $\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$      | DF: Falsch dividiert            |
| <input type="checkbox"/> 2            | $\pm\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$   | DF: Ergebnis ist eindeutig      |
| <input type="checkbox"/> 3            | $-\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$     | DF: Falsches Vorzeichen gewählt |
| <input type="checkbox"/> 4            | $\sqrt{39} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$      | DF: Fehler beim Quadrieren      |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 | $\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$      | richtig                         |
| <input type="checkbox"/> 6            | $\sqrt{39} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$      | DF: Fehler beim Quadrieren      |
| <input type="checkbox"/> 7            | $\pm\sqrt{39} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{8}))$   | DF: Ergebnis ist eindeutig      |
| <input type="checkbox"/> 8            | $\pm\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$   | DF: Ergebnis ist eindeutig      |
| <input type="checkbox"/> 9            | $8 \cos(ax)$  | DF: Lösung geraten              |
| <input type="checkbox"/> 10           | $8 \cos(ax + 5)$                                    | DF: Lösung geraten              |
| <input type="checkbox"/> 11           | $\pm\sqrt{39} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{5}{8}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig      |
| <input type="checkbox"/> 12           | $-\sqrt{89} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$     | DF: Falsches Vorzeichen gewählt |

MV 05	Blatt 06	Kapitel 4.2	Grenzwerte
keine	Stetigkeit	Nummer: 19 0 200506011	Kl: 14G
Grad: 40	Zeit: 30	Quelle: keine	W

**Aufgabe 14.1.3:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = -x^2 + 10x + 3$ ,  $x_0 = 5$  und sei  $\varepsilon = \frac{1}{9}$  gewählt. Bestimmen Sie das maximale  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $x$ , für die  $|x - x_0| < \delta$  gilt,  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  ist oder  $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ .

**Parameter:**

$x_2 = x$  – Wert des Scheitels =  $x_0$ ,  $x_3 = y$  – Wert des  $y$ - Achsenschnittpunktes,  $\varepsilon = \frac{1}{(x_1)^2}$ ,  $x_i > 1$ ,  $i = 1, 2, 3$

Es gilt also  $f(x) = -x^2 + \{2 \cdot x_2\}x + x_3$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 3$   $x_2 = 5$   $x_3 = 3$ .

**Erklärung:**

Um das  $\delta$  zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

**Rechnung:**

$f(x_0) = f(5) = 28$ .  $x_0$  ist der Scheitel bzw. Hochpunkt der Parabel. Um  $f^{-1}(x)$  zu berechnen, müssen wir die Gleichung  $x = -y^2 + 10y + 3$  nach  $y$  auflösen:

$$y^2 - 10y - 3 + x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 12 - 4x}}{2} \Leftrightarrow y = 5 \pm \sqrt{28 - x}$$

$$f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) = f^{-1}\left(\frac{252 - 1}{9}\right) = 5 \pm \sqrt{28 - \frac{251}{9}} = 5 \pm \sqrt{\frac{252 - 251}{9}} = 5 \pm \sqrt{\frac{1}{9}} = 5 \pm \frac{1}{3}.$$

Damit ist  $f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) - x_0 = \pm \frac{1}{3}$ . Mit  $\delta = \frac{1}{3}$  gilt  $|f(x_0) - f(x_0 - \delta)| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| = \varepsilon$ . Aus den diversen Monotonieeigenschaften folgt  $\delta = \frac{1}{3}$ .  $f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon) - x_0$  ist nicht definiert. Bitte beachten Sie, dass  $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0))$  ist und damit die Teilmengenbeziehung echt ist.

**Angebotene Lösungen:**

- |   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 $\delta = x_0$             | <input type="checkbox"/> 2 $\delta = \frac{1}{81}$      | <input type="checkbox"/> 3 $\delta = 0$            | <input type="checkbox"/> 4 $\delta = -\frac{1}{81}$        |
| <input type="checkbox"/> 5 $\delta = -\frac{1}{9}$    | <input type="checkbox"/> 6 $\delta = \pm \frac{1}{3}$   | <input type="checkbox"/> 7 es gibt keines          | <input type="checkbox"/> 8 $\delta = -\frac{1}{3}$         |
| <input type="checkbox"/> 9 $\delta = \pm \varepsilon$ | <input type="checkbox"/> 10 $\delta = \pm \frac{1}{81}$ | <input type="checkbox"/> 11 $\delta = \frac{1}{9}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\delta = \frac{1}{3}$ |

**Fehlerinterpretation:**

- |  |                            |
|--|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $\delta = x_0$                  | DF: Lösung geraten         |
| <input type="checkbox"/> 2 $\delta = \frac{1}{81}$         | DF: Lösung geraten         |
| <input type="checkbox"/> 3 $\delta = 0$                    | DF: $\delta > 0$           |
| <input type="checkbox"/> 4 $\delta = -\frac{1}{81}$        | DF: Lösung geraten         |
| <input type="checkbox"/> 5 $\delta = -\frac{1}{9}$         | DF: Lösung geraten         |
| <input type="checkbox"/> 6 $\delta = \pm \frac{1}{3}$      | DF: $\delta$ ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 7 es gibt keines                  | DF: doch, $f$ ist stetig   |
| <input type="checkbox"/> 8 $\delta = -\frac{1}{3}$         | DF: $\delta > 0$           |
| <input type="checkbox"/> 9 $\delta = \pm \varepsilon$      | DF: Lösung geraten         |
| <input type="checkbox"/> 10 $\delta = \pm \frac{1}{81}$    | DF: Lösung geraten         |
| <input type="checkbox"/> 11 $\delta = \frac{1}{9}$         | DF: Lösung geraten         |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\delta = \frac{1}{3}$ | richtig                    |

MV 05                      Blatt 09                      Kapitel 6.4                      trigonometrische  
keine                      ElementareFktn                      Nummer: 35 0 200509008                      Kl: 14G  
Grad: 20 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 14.1.4:** Bestimmen Sie die Summe  $2 \sin(ax) - 5\sqrt{2} \cos(ax + \frac{\pi}{4})$  als Term von der Form  $C \cdot \sin(ax + \varphi)$  für alle  $a \in \mathbb{R}^+$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

**Parameter:**

$x_1 =$  Faktor vor dem Sinus  $x_1 > 1$ .

$x_2 =$  Faktor vor dem Kosinus  $x_1 > x_2 > 1$ .

Die Formel lautet:  $x_1 \sin(ax) - \sqrt{2}x_2 \cos(ax + \frac{\pi}{4})$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 2$   $x_2 = 5$ .

**Erklärung:**

Wenden Sie die Additionstheoreme des Kosinus und Sinus auf  $\sin(ax + \varphi)$  und auf  $\cos(ax + \frac{\pi}{4})$  an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

**Rechnung:**

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \cdot 5 \cos(ax + \frac{\pi}{4}) &= -\sqrt{2} \cdot 5 \cos(ax) \cos(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot 5 \sin(ax) \sin(\frac{\pi}{4}) && \text{Kosinus - Additionstheorem} \\ &= -5\sqrt{2} \cdot \cos(ax) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5\sqrt{2} \sin(ax) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} && \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -5 \cos(ax) + 5 \sin(ax) \end{aligned}$$

$$C \sin(ax + \varphi) = C \sin(ax) \cos \varphi + C \cos(ax) \sin \varphi = -5 \cos(ax) + 5 \sin(ax) + 2 \sin(ax) = -5 \cos(ax) + 7 \sin(ax).$$

Koeffizientenvergleich ergibt (1)  $-5 = C \cos \varphi$  und (2)  $7 = C \sin \varphi$ .

Beide Gleichungen quadriert ergeben  $5^2 + 7^2 = C^2$ , also  $C = \pm\sqrt{5^2 + 7^2} = \pm\sqrt{74}$ .

Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt  $\frac{C \sin \varphi}{C \cos \varphi} = \frac{7}{-5} = \tan \varphi$ .

Also ist  $\varphi = \arctan(\frac{-7}{5})$ .

Hier kann der  $\arctan_0$  verwendet werden, wenn das Vorzeichen von  $C$  entsprechend angepasst wird:

Wir wählen  $x = 0$ , dann gilt  $7 \sin(ax) - 5 \cos(ax)|_{x=0} = -5$  und  $\pm\sqrt{74} \cos(\arctan_0(\frac{-7}{5})) = -5$ , wenn das negative Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus positiv gewesen, dann hätten wir das positive Vorzeichen wählen müssen.

**Angebotene Lösungen:**

- |                                       |   |                             |   |                             |   |
|---------------------------------------|---|-----------------------------|---|-----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1            | $\sqrt{24} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$      | <input type="checkbox"/> 2  | $\pm\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 3  | $-\sqrt{24} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{5}))$   |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $-\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$     | <input type="checkbox"/> 5  | $7 \sin(ax + 5)$                                  | <input type="checkbox"/> 6  | $\pm\sqrt{24} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$ |
| <input type="checkbox"/> 7            | $\pm\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\pm\frac{2}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 8  | $2 \sin(ax + 5)$                                  | <input type="checkbox"/> 9  | $\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$    |
| <input type="checkbox"/> 10           | $\pm\sqrt{24} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{5}))$   | <input type="checkbox"/> 11 | $\pm\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{5}))$    |

**Fehlerinterpretation:**

- |                                       |   |                                     |
|---------------------------------------|---|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1            | $\sqrt{24} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$      | DF: Fehler beim Satz von Pythagoras |
| <input type="checkbox"/> 2            | $\pm\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{5}))$   | DF: Ergebnis ist eindeutig          |
| <input type="checkbox"/> 3            | $-\sqrt{24} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{5}))$     | DF: Fehler beim Satz von Pythagoras |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $-\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$     | richtig                             |
| <input type="checkbox"/> 5            | $7 \sin(ax + 5)$                                    | DF: Lösung geraten                  |
| <input type="checkbox"/> 6            | $\pm\sqrt{24} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$   | DF: Ergebnis ist eindeutig          |
| <input type="checkbox"/> 7            | $\pm\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\pm\frac{2}{5}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig          |
| <input type="checkbox"/> 8            | $2 \sin(ax + 5)$                                    | DF: Lösung geraten                  |
| <input type="checkbox"/> 9            | $\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$      | DF: falsche Punktprobe              |
| <input type="checkbox"/> 10           | $\pm\sqrt{24} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{5}))$   | DF: Ergebnis ist eindeutig          |
| <input type="checkbox"/> 11           | $\pm\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-7}{5}))$   | DF: Ergebnis ist eindeutig          |
| <input type="checkbox"/> 12           | $\sqrt{74} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-2}{5}))$      | DF: Fehler beim Additionstheorem    |

MV 05                      Blatt 06                      Kapitel 4.2                      Grenzwerte  
keine                      Stetigkeit                      Nummer: 94 0 200506010                      Kl: 14G  
Grad: 40 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 14.1.5:** Sei  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definiert durch  $f(x) = -5x + 2$ ,  $x_0 = 3$  und sei ein  $\varepsilon > 0$  fest gewählt. Bestimmen Sie das maximale  $\delta > 0$  (abhängig von  $\varepsilon$ ) mit der Eigenschaft, dass für alle  $x$ , für die  $|x - x_0| < \delta$  gilt,  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  ist oder  $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ . Damit haben Sie die Stetigkeit von  $f$  an der Stelle  $x_0$  gezeigt.

**Parameter:**

$x_1 =$  (negative) Steigung,  $x_2 = y$ - Achsenabschnitt von  $f$ ,  $x_3$  entspricht  $x_0$ ,  $x_2 \neq x_3$

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 5$   $x_2 = 2$   $x_3 = 3$ .

**Erklärung:**

Um das  $\delta$  zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

**Rechnung:**

$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{-5}$ . Nach der Formel von Schmid ist

$$\delta = \pm(f^{-1}(f(3) \pm \varepsilon) - 3) = \pm(f^{-1}(-13 \pm \varepsilon) - 3) = \pm\left(\frac{(-13 \pm \varepsilon) - 2}{-5} - 3\right) = \pm\left(\frac{-15}{-5} - 3 \pm \frac{\varepsilon}{-5}\right) = \pm\frac{\varepsilon}{-5}.$$

Wenn wir das negative Vorzeichen wählen, erhalten wir  $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ .

Es gilt  $f(x_0 - \delta) = f(x_0) + \varepsilon$  und  $f(x_0 + \delta) = f(x_0) - \varepsilon$ .

Weil  $f$  streng monoton fallend ist, folgt die Behauptung. Bitte beachten Sie hierbei, dass  $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$  ist. Die gilt normalerweise nicht.

**Angeborene Lösungen:**

- |  |   |   |   |
|--|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> 1                         | <input type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon}{3}$            | <input type="checkbox"/> 0                          | <input type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon-3}{2}$  |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon-2}{5}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon}{5}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{-\varepsilon+2}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\pm\frac{\varepsilon}{3}$ |
| <input type="checkbox"/> $\varepsilon$             | <input type="checkbox"/> $\pm\varepsilon$                   | <input type="checkbox"/> $\frac{-\varepsilon+3}{2}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon-2}{3}$  |

**Fehlerinterpretation:**

- |   |                            |
|---|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1                                  | DF: geraten                |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon}{3}$            | DF: geraten                |
| <input type="checkbox"/> 0                                  | DF: $\delta > 0$           |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon-3}{2}$          | DF: geraten                |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon-2}{5}$          | DF: geraten                |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon}{5}$ | richtig                    |
| <input type="checkbox"/> $\frac{-\varepsilon+2}{3}$         | DF: geraten                |
| <input type="checkbox"/> $\pm\frac{\varepsilon}{3}$         | DF: $\delta$ ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> $\varepsilon$                      | DF: Lösung geraten         |
| <input type="checkbox"/> $\pm\varepsilon$                   | DF: Lösung geraten         |
| <input type="checkbox"/> $\frac{-\varepsilon+3}{2}$         | DF: geraten                |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\varepsilon-2}{3}$          | DF: geraten                |

MV 05                      Blatt 06                      Kapitel 4.2                      Grenzwerte  
 Asymptoten                      Funktionen                      Nummer: 102 0 2005060009                      Kl: 14G  
 Grad: 40 Zeit: 30                      Quelle: keine                      W

**Aufgabe 14.1.6:** Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 12x^2}\right)$$

**Parameter:**

$x_i =$  Nullstellen und Asymptoten des Logarithmusargumentes,  $x_3 > x_2 > x_1 > 1$ .

Die Funktion lautet so:  $\ln\left(\frac{x^2 + \{x_2 - x_1\}x - \{x_2 \cdot x_1\}}{x^3 + x_3x^2}\right)$ .

In dieser Aufgabe sind  $x_1 = 4$   $x_2 = 9$   $x_3 = 12$ .

**Erklärung:**

Die wichtigen Werte des  $\ln$  sind:  $\ln(0) = -\infty$ ,  $\ln 1 = 0$  und  $\ln \infty = \infty$ .  $\ln x$  ist nur für  $x > 0$  definiert.

**Rechnung:**

$\ln x$  ist genau dann definiert, wenn  $x > 0$  ist. Deshalb betrachten wir zuerst das Argument des  $\ln$ :

$$h(x) = \frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 12x^2} > 0.$$

Wir wenden die Methode von Knapp an. Die Grenzen sind:  $-12$ ,  $-9$ ,  $0$ ,  $4$ . Mittels Punktprobe erhalten wir folgende Lösungen:

$(-\infty, -12)$  : Nein ;  $(-12, -9)$  : Ja ;  $(-9, 0)$  : Nein ;  $(0, 4)$  : Nein ;  $(4, \infty)$  : Ja ;

Damit ist  $\mathbb{D} = (-12, -9) \cup (4, \infty)$   $\ln h$  hat genau für  $h = 0$  und  $h = \infty$  senkrechte Asymptoten. Bei  $h = -\infty$  hat  $\ln h$  nicht unbedingt senkrechte Asymptoten. Damit gilt:  $f(x)$  hat senkrechte Asymptoten bei  $x = -12$ ,  $x = -9$  und bei  $x = 4$ . Für  $x \rightarrow \infty$  geht  $h(x)$  gegen  $0$  und damit  $\ln(h(x)) \rightarrow -\infty$ .  $f(x)$  hat weder waagrechte noch schiefe Asymptoten. Bei schiefen Asymptoten müsste es eine Gerade  $g = mx + c$  geben mit  $|\ln(h(x)) - g(x)| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ .

**Angebote Lösungen:**

- |                             |  |  |  |
|-----------------------------|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1  | $x = -12, x = -9, x = 0$               | <input type="checkbox"/> 2             | $x = -12, x = -9, y = 0$               |
| <input type="checkbox"/> 3  | $x = -12, x = 0$                       | <input type="checkbox"/> 4             | $x = -12, x = -9, x = 0, x = 4, y = 1$ |
| <input type="checkbox"/> 5  | $f$ hat unendlich viele                | <input type="checkbox"/> 6             | $f$ hat keine                          |
| <input type="checkbox"/> 7  | $x = -12, x = -9, x = 0, x = 4$        | <input type="checkbox"/> 8             | $x = -12$                              |
| <input type="checkbox"/> 9  | $x = -12, x = 0, y = 0$                | <input checked="" type="checkbox"/> 10 | $x = -12, x = -9, x = 4$               |
| <input type="checkbox"/> 11 | $x = -12, x = -9, x = 0, x = 4, y = 0$ | <input type="checkbox"/> 12            | $x = -12, x = -9, x = 4, y = 0$        |

**Fehlerinterpretation:**

- |  |  |  |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1             | $x = -12, x = -9, x = 0$               | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 2             | $x = -12, x = -9, y = 0$               | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 3             | $x = -12, x = 0$                       | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 4             | $x = -12, x = -9, x = 0, x = 4, y = 1$ | DF: $x = 0$ grenzt nicht an $\mathbb{D}$           |
| <input type="checkbox"/> 5             | $f$ hat unendlich viele                | DF: falsch   |
| <input type="checkbox"/> 6             | $f$ hat keine                          | DF: falsch   |
| <input type="checkbox"/> 7             | $x = -12, x = -9, x = 0, x = 4$        | DF: $x = 0$ grenzt nicht an $\mathbb{D}$           |
| <input type="checkbox"/> 8             | $x = -12$                              | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 9             | $x = -12, x = 0, y = 0$                | DF: Nullstellen von $h$ sind senkrechte Asymptoten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 10 | $x = -12, x = -9, x = 4$               | richtig  |
| <input type="checkbox"/> 11            | $x = -12, x = -9, x = 0, x = 4, y = 0$ | DF: $x = 0$ grenzt nicht an $\mathbb{D}$           |
| <input type="checkbox"/> 12            | $x = -12, x = -9, x = 4, y = 0$        | DF: $f$ hat keine waagrecht Asymptoten             |

**Allgemeine Hinweise:**

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>