

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 14

MV 05	Blatt 06	Kapitel 4.2	Grenzwerte
keine	Stetigkeit	Nummer: 11 0 200506010	Kl: 14G
Grad: 40	Zeit: 30	Quelle: keine	W

Aufgabe 14.1.1: Sei $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definiert durch $f(x) = -4x + 5$, $x_0 = 4$ und sei ein $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Bestimmen Sie das maximale $\delta > 0$ (abhängig von ε) mit der Eigenschaft, dass für alle x , für die $|x - x_0| < \delta$ gilt, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist oder $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Damit haben Sie die Stetigkeit von f an der Stelle x_0 gezeigt.

Parameter:

$x_1 =$ (negative) Steigung, $x_2 = y$ - Achsenabschnitt von f , x_3 entspricht x_0 , $x_2 \neq x_3$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 5$ $x_3 = 4$.

Erklärung:

Um das δ zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

Rechnung:

$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{-4}$. Nach der Formel von Schmid ist

$$\delta = \pm(f^{-1}(f(4) \pm \varepsilon) - 4) = \pm(f^{-1}(-11 \pm \varepsilon) - 4) = \pm\left(\frac{(-11 \pm \varepsilon) - 5}{-4} - 4\right) = \pm\left(\frac{-16}{-4} - 4 \pm \frac{\varepsilon}{-4}\right) = \pm\frac{\varepsilon}{-4}.$$

Wenn wir das negative Vorzeichen wählen, erhalten wir $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Es gilt $f(x_0 - \delta) = f(x_0) + \varepsilon$ und $f(x_0 + \delta) = f(x_0) - \varepsilon$.

Weil f streng monoton fallend ist, folgt die Behauptung. Bitte beachten Sie hierbei, dass $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ ist. Die gilt normalerweise nicht.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | | | |
|---------------------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | 0 | <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{-\varepsilon+5}{4}$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{\varepsilon-5}{4}$ | <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{\varepsilon-4}{5}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\pm\varepsilon$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{4}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{\varepsilon}{5}$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\pm\frac{\varepsilon}{5}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 | $\frac{\varepsilon}{4}$ | <input type="checkbox"/> 10 | ε | <input type="checkbox"/> 11 | $\pm\frac{\varepsilon}{4}$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{-\varepsilon+4}{5}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | 0 | DF: $\delta > 0$ |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\frac{-\varepsilon+5}{4}$ | DF: geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\frac{\varepsilon-5}{4}$ | DF: geraten |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\frac{\varepsilon-4}{5}$ | DF: geraten |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\pm\varepsilon$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\frac{1}{4}$ | DF: geraten |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\frac{\varepsilon}{5}$ | DF: geraten |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\pm\frac{\varepsilon}{5}$ | DF: δ ist eindeutig |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 | $\frac{\varepsilon}{4}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 10 | ε | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11 | $\pm\frac{\varepsilon}{4}$ | DF: δ ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 12 | $\frac{-\varepsilon+4}{5}$ | DF: geraten |

MV 05	Blatt 06	Kapitel 4.2	Grenzwerte
Asymptoten	Funktionen	Nummer: 21 0 2005060009	Kl: 14G
Grad: 40	Zeit: 30	Quelle: keine	W

Aufgabe 14.1.2: Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 2x - 24}{x^3 + 9x^2}\right)$$

Parameter:

x_i = Nullstellen und Asymptoten des Logarithmusargumentes, $x_3 > x_2 > x_1 > 1$.

Die Funktion lautet so:
$$\ln\left(\frac{x^2 + \{x_2 - x_1\}x - \{x_2 \cdot x_1\}}{x^3 + x_3x^2}\right).$$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 6$ $x_3 = 9$.

Erklärung:

Die wichtigen Werte des ln sind: $\ln(0) = -\infty$, $\ln 1 = 0$ und $\ln \infty = \infty$. $\ln x$ ist nur für $x > 0$ definiert.

Rechnung:

$\ln x$ ist genau dann definiert, wenn $x > 0$ ist. Deshalb betrachten wir zuerst das Argument des ln:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x - 24}{x^3 + 9x^2} > 0.$$

Wir wenden die Methode von Knapp an. Die Grenzen sind: -9 , -6 , 0 , 4 . Mittels Punktprobe erhalten wir folgende Lösungen:

$(-\infty, -9)$: Nein ; $(-9, -6)$: Ja ; $(-6, 0)$: Nein ; $(0, 4)$: Nein ; $(4, \infty)$: Ja ;

Damit ist $\mathbb{D} = (-9, -6) \cup (4, \infty)$ $\ln h$ hat genau für $h = 0$ und $h = \infty$ senkrechte Asymptoten. Bei $h = -\infty$ hat $\ln h$ nicht unbedingt senkrechte Asymptoten. Damit gilt: $f(x)$ hat senkrechte Asymptoten bei $x = -9$, $x = -6$ und bei $x = 4$. Für $x \rightarrow \infty$ geht $h(x)$ gegen 0 und damit $\ln(h(x)) \rightarrow -\infty$. $f(x)$ hat weder waagrechte noch schiefe Asymptoten. Bei schiefen Asymptoten müsste es eine Gerade $g = mx + c$ geben mit $|\ln(h(x)) - g(x)| \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$.

Angebote Lösung:

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> 1 $x = -9, x = 0$ | <input type="checkbox"/> 2 $x = -9, x = -6, x = 0, x = 4, y = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 3 $x = -9, x = 0, y = 0$ | <input type="checkbox"/> 4 $x = -9, x = -6, x = 0, x = 4$ |
| <input type="checkbox"/> 5 $x = -9$ | <input type="checkbox"/> 6 $x = -9, x = -6, x = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 7 f hat unendlich viele | <input type="checkbox"/> 8 f hat keine |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 $x = -9, x = -6, x = 4$ | <input type="checkbox"/> 10 $x = -9, x = -6, x = 0, x = 4, y = 1$ |
| <input type="checkbox"/> 11 $x = -9, x = -6, y = 0$ | <input type="checkbox"/> 12 $x = -9, x = -6, x = 4, y = 0$ |

Fehlerinterpretation:

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> 1 $x = -9, x = 0$ | DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 2 $x = -9, x = -6, x = 0, x = 4, y = 0$ | DF: $x = 0$ grenzt nicht an \mathbb{D} |
| <input type="checkbox"/> 3 $x = -9, x = 0, y = 0$ | DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 4 $x = -9, x = -6, x = 0, x = 4$ | DF: $x = 0$ grenzt nicht an \mathbb{D} |
| <input type="checkbox"/> 5 $x = -9$ | DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 6 $x = -9, x = -6, x = 0$ | DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 7 f hat unendlich viele | DF: falsch |
| <input type="checkbox"/> 8 f hat keine | DF: falsch |
| <input checked="" type="checkbox"/> 9 $x = -9, x = -6, x = 4$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 10 $x = -9, x = -6, x = 0, x = 4, y = 1$ | DF: $x = 0$ grenzt nicht an \mathbb{D} |
| <input type="checkbox"/> 11 $x = -9, x = -6, y = 0$ | DF: Nullstellen von h sind senkrechte Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 12 $x = -9, x = -6, x = 4, y = 0$ | DF: f hat keine waagrecht Asymptoten |

MV 05	Blatt 06	Kapitel 4.2	Grenzwerte
keine	Stetigkeit	Nummer: 22 0 200506011	Kl: 14G
Grad: 40	Zeit: 30	Quelle: keine	W

Aufgabe 14.1.3: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = -x^2 + 4x + 4$, $x_0 = 2$ und sei $\varepsilon = \frac{1}{25}$ gewählt. Bestimmen Sie das maximale $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle x , für die $|x - x_0| < \delta$ gilt, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist oder $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Parameter:

$x_2 = x$ – Wert des Scheitels = x_0 , $x_3 = y$ – Wert des y - Achsenschnittpunktes, $\varepsilon = \frac{1}{(x_1)^2}$, $x_i > 1$, $i = 1, 2, 3$

Es gilt also $f(x) = -x^2 + \{2 \cdot x_2\}x + x_3$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 2$ $x_3 = 4$.

Erklärung:

Um das δ zu finden, kann folgende Formel (nach Schmid) probiert werden:

$$\delta(\varepsilon, x_0) = \pm(f^{-1}(f(x_0) \pm \varepsilon) - x_0)$$

Rechnung:

$f(x_0) = f(2) = 8$. x_0 ist der Scheitel bzw. Hochpunkt der Parabel. Um $f^{-1}(x)$ zu berechnen, müssen wir die Gleichung $x = -y^2 + 4y + 4$ nach y auflösen:

$$y^2 - 4y - 4 + x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16 - 4x}}{2} \Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{8 - x}$$

$$f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) = f^{-1}\left(\frac{200 - 1}{25}\right) = 2 \pm \sqrt{8 - \frac{199}{25}} = 2 \pm \sqrt{\frac{200 - 199}{25}} = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{25}} = 2 \pm \frac{1}{5}.$$

Damit ist $f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon) - x_0 = \pm \frac{1}{5}$. Mit $\delta = \frac{1}{5}$ gilt $|f(x_0) - f(x_0 - \delta)| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| = \varepsilon$. Aus den diversen Monotonieeigenschaften folgt $\delta = \frac{1}{5}$. $f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon) - x_0$ ist nicht definiert. Bitte beachten Sie, dass $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0))$ ist und damit die Teilmengenbeziehung echt ist.

Angeborene Lösungen:

- | | | | |
|---|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 $\delta = \frac{1}{25}$ | <input type="checkbox"/> 2 $\delta = \pm x_0$ | <input type="checkbox"/> 3 $\delta = \pm \frac{1}{5}$ | <input type="checkbox"/> 4 $\delta = -\frac{1}{5}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 $\delta = \frac{1}{625}$ | <input type="checkbox"/> 6 $\delta = x_0$ | <input checked="" type="checkbox"/> 7 $\delta = \frac{1}{5}$ | <input type="checkbox"/> 8 es gibt keines |
| <input type="checkbox"/> 9 $\delta = \pm \varepsilon$ | <input type="checkbox"/> 10 $\delta = -\frac{1}{625}$ | <input type="checkbox"/> 11 $\delta = -\frac{1}{25}$ | <input type="checkbox"/> 12 $\delta = \pm \frac{1}{625}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | |
|--|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 $\delta = \frac{1}{25}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 2 $\delta = \pm x_0$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 $\delta = \pm \frac{1}{5}$ | DF: δ ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 4 $\delta = -\frac{1}{5}$ | DF: $\delta > 0$ |
| <input type="checkbox"/> 5 $\delta = \frac{1}{625}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 6 $\delta = x_0$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 7 $\delta = \frac{1}{5}$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 8 es gibt keines | DF: doch, f ist stetig |
| <input type="checkbox"/> 9 $\delta = \pm \varepsilon$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 10 $\delta = -\frac{1}{625}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 11 $\delta = -\frac{1}{25}$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 12 $\delta = \pm \frac{1}{625}$ | DF: Lösung geraten |

MV 05 Blatt 09 Kapitel 6.4 trigonometrische
keine ElementareFktn Nummer: 23 0 200509007 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 14.1.4: Bestimmen Sie die Summe $6 \sin(ax) + 10 \cos(ax)$ als Term von der Form $C \cdot \cos(ax + \varphi)$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$.

Parameter:

$x_1 =$ Faktor vor dem Sinus $x_1 > 1$.

$x_2 =$ Faktor vor dem Kosinus $x_2 > x_1$.

Die Formel lautet: $x_1 \sin(ax) + x_2 \cos(ax)$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6$ $x_2 = 10$.

Erklärung:

Wenden Sie das Additionstheorem des Kosinus auf $\cos(ax + \varphi)$ an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

Rechnung:

$$C \cos(ax + \varphi) = C \cos(ax) \cos \varphi - C \sin(ax) \sin \varphi = 10 \cos(ax) + 6 \sin(ax).$$

Koeffizientenvergleich ergibt (1) $10 = C \cos \varphi$ und (2) $-6 = C \sin \varphi$.

Beide Gleichungen quadriert ergeben $10^2 + 6^2 = C^2$, also $C = \pm\sqrt{10^2 + 6^2} = \pm\sqrt{136}$.

Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt $\frac{C \sin \varphi}{C \cos \varphi} = \frac{-6}{10} = \tan \varphi$.

Also ist $\varphi = \arctan\left(\frac{-3}{5}\right)$.

Hier kann der \arctan_0 verwendet werden, wenn das Vorzeichen von C entsprechend angepasst wird:

Wir wählen $x = 0$, dann gilt $6 \sin(ax) + 10 \cos(ax)|_{x=0} = 10$ und $\pm\sqrt{136} \cos(\arctan_0(\frac{-3}{5})) = 10$, wenn das positive Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus negativ gewesen, dann hätten wir das negative Vorzeichen wählen müssen.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | |
|---------------------------------------|--|-----------------------------|---|-----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\pm\sqrt{136} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 2 | $\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 3 | $10 \cos(ax + 6)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $\sqrt{136} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 5 | $\pm\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 6 | $-\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | <input type="checkbox"/> 8 | $-\sqrt{136} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 9 | $\pm\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\pm\sqrt{136} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 11 | $-\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 12 | $\pm\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{5}{3}))$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|--|---------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\pm\sqrt{136} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{5}{3}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 2 | $\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | DF: Fehler beim Quadrieren |
| <input type="checkbox"/> 3 | $10 \cos(ax + 6)$ | DF: Lösung geraten |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $\sqrt{136} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | richtig |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\pm\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{3}{5}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 6 | $-\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{3}))$ | DF: Falsches Vorzeichen gewählt |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-5}{3}))$ | DF: Fehler beim Quadrieren |
| <input type="checkbox"/> 8 | $-\sqrt{136} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | DF: Falsches Vorzeichen gewählt |
| <input type="checkbox"/> 9 | $\pm\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{3}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 10 | $\pm\sqrt{136} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 11 | $-\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | DF: Falsches Vorzeichen gewählt |
| <input type="checkbox"/> 12 | $\pm\sqrt{64} \cos(ax + \arctan_0(\pm\frac{5}{3}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |

MV 05 Blatt 06 Kapitel 4.2 Grenzwerte
 Asymptoten Funktionen Nummer: 29 0 200506009 Kl: 14G
 Grad: 40 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 14.1.5: Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \arctan_0 \left(\frac{(3x + 6) \cdot (x + 4)}{(3x + 21) \cdot (x + 2)} \right)$$

Parameter:

x_i = Nullstellen und Asymptoten des Arkustangensargumentes, $x_i \geq 2$
 x_2, x_3, x_4 paarweise verschieden.

$$\text{Die Funktion lautet so: } f(x) = \arctan_0 \left(\frac{(x_1 x + \{x_1 \cdot x_2\}) \cdot (x + x_3)}{(x_1 x + \{x_1 \cdot x_4\}) \cdot (x + x_2)} \right).$$

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $x_2 = 2$ $x_3 = 4$ $x_4 = 7$.

Erklärung:

Die wichtigen Werte des \arctan_0 sind: $\arctan_0(0) = 0$, $\arctan_0(\pm 1) = \frac{\pm\pi}{4}$ und $\arctan_0(\pm\infty) = \frac{\pm\pi}{2}$.

Rechnung:

Senkrechte Asymptoten des Arkustangensargumentes erzeugen lediglich eine Unstetigkeitsstelle aber keine senkrechte Asymptote. Zum Beispiel gilt für die Funktion $g(x) = \arctan_0(\frac{1}{x})$:

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \arctan_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \arctan_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Der Betrag beider Grenzwerte ist ungleich unendlich, damit liegen keine senkrechten Asymptoten vor.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan_0 \left(\frac{(3x + 6) \cdot (x + 4)}{(3x + 21) \cdot (x + 2)} \right) = \arctan_0(1) = \frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan_0 \left(\frac{(3x + 6) \cdot (x + 4)}{(3x + 21) \cdot (x + 2)} \right).$$

Damit ist die einzige (waagrechte) Asymptote $y = \frac{\pi}{4}$.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | |
|-----------------------------|---|-----------------------------|---|---------------------------------------|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x = -2$ und $x = -7$ | <input type="checkbox"/> 2 | $y = 0$ | <input type="checkbox"/> 3 | $y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -7$ |
| <input type="checkbox"/> 4 | $y = \frac{\pi}{4}$, $x = -2$ und $x = -7$ | <input type="checkbox"/> 5 | $x = -7$ | <input type="checkbox"/> 6 | f hat unendlich viele |
| <input type="checkbox"/> 7 | $y = \frac{\pi}{2}$, $x = -2$ und $x = -7$ | <input type="checkbox"/> 8 | $y = \frac{\pi}{2}$ und $x = -7$ | <input type="checkbox"/> 9 | $y = 0$ und $x = -7$ |
| <input type="checkbox"/> 10 | $y = \pm \frac{\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> 11 | $y = \pm \frac{\pi}{2}$, $x = -2$ und $x = -7$ | <input checked="" type="checkbox"/> X | $y = \frac{\pi}{4}$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $x = -2$ und $x = -7$ | DF: f hat keine senkrechten Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 2 | $y = 0$ | DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ |
| <input type="checkbox"/> 3 | $y = \pm \frac{\pi}{4}$ und $x = -7$ | DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$ |
| <input type="checkbox"/> 4 | $y = \frac{\pi}{4}$, $x = -2$ und $x = -7$ | DF: f hat keine senkrechten Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 5 | $x = -7$ | DF: f hat keine senkrechten Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 6 | f hat unendlich viele | DF: falsch |
| <input type="checkbox"/> 7 | $y = \frac{\pi}{2}$, $x = -2$ und $x = -7$ | DF: f hat keine senkrechten Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 8 | $y = \frac{\pi}{2}$ und $x = -7$ | DF: f hat keine senkrechten Asymptoten |
| <input type="checkbox"/> 9 | $y = 0$ und $x = -7$ | DF: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ |
| <input type="checkbox"/> 10 | $y = \pm \frac{\pi}{4}$ | DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$ |
| <input type="checkbox"/> 11 | $y = \pm \frac{\pi}{2}$, $x = -2$ und $x = -7$ | DF: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> X | $y = \frac{\pi}{4}$ | richtig |

MV 05 Blatt 09 Kapitel 6.4 trigonometrische
keine ElementareFktn Nummer: 68 0 200509008 Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30 Quelle: keine W

Aufgabe 14.1.6: Bestimmen Sie die Summe $6 \sin(ax) - 10\sqrt{2} \cos(ax + \frac{\pi}{4})$ als Term von der Form $C \cdot \sin(ax + \varphi)$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$.

Parameter:

x_1 = Faktor vor dem Sinus $x_1 > 1$.
 x_2 = Faktor vor dem Kosinus $x_1 > x_2 > 1$.

Die Formel lautet: $x_1 \sin(ax) - \sqrt{2}x_2 \cos(ax + \frac{\pi}{4})$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6$ $x_2 = 10$.

Erklärung:

Wenden Sie die Additionstheoreme des Kosinus und Sinus auf $\sin(ax + \varphi)$ und auf $\cos(ax + \frac{\pi}{4})$ an und machen Sie dann einen Koeffizientenvergleich.

Rechnung:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \cdot 10 \cos(ax + \frac{\pi}{4}) &= -\sqrt{2} \cdot 10 \cos(ax) \cos(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cdot 10 \sin(ax) \sin(\frac{\pi}{4}) \quad \text{Kosinus - Additionstheorem} \\ &= -10\sqrt{2} \cdot \cos(ax) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10\sqrt{2} \sin(ax) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -10 \cos(ax) + 10 \sin(ax) \end{aligned}$$

$$C \sin(ax + \varphi) = C \sin(ax) \cos \varphi + C \cos(ax) \sin \varphi = -10 \cos(ax) + 10 \sin(ax) + 6 \sin(ax) = -10 \cos(ax) + 16 \sin(ax).$$

Koeffizientenvergleich ergibt (1) $-10 = C \cos \varphi$ und (2) $16 = C \sin \varphi$.

Beide Gleichungen quadriert ergeben $10^2 + 16^2 = C^2$, also $C = \pm \sqrt{10^2 + 16^2} = \pm \sqrt{356}$.

Gleichung (2) durch Gleichung (1) dividiert ergibt $\frac{C \sin \varphi}{C \cos \varphi} = \frac{-16}{-10} = \tan \varphi$.

Also ist $\varphi = \arctan(\frac{-8}{5})$.

Hier kann der \arctan_0 verwendet werden, wenn das Vorzeichen von C entsprechend angepasst wird:

Wir wählen $x = 0$, dann gilt $16 \sin(ax) - 10 \cos(ax)|_{x=0} = -10$ und $\pm \sqrt{356} \cos(\arctan_0(\frac{-8}{5})) = -10$, wenn das negative Zeichen gewählt wurde. Wäre der Faktor vor dem Kosinus positiv gewesen, dann hätten wir das positive Vorzeichen wählen müssen.

Angebotene Lösungen:

- | | | | | | |
|-----------------------------|--|-----------------------------|---|----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\pm \sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 2 | $6 \sin(ax + 10)$ | <input type="checkbox"/> 3 | $\pm \sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 5 | $\pm \sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 6 | $\sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\pm \sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\pm \frac{3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\pm \sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 9 | $-\sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ |
| <input type="checkbox"/> 10 | $-\sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> 11 | $-\sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | <input type="checkbox"/> X | $-\sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ |

Fehlerinterpretation:

- | | | |
|-----------------------------|--|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $\pm \sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 2 | $6 \sin(ax + 10)$ | DF: Lösung geraten |
| <input type="checkbox"/> 3 | $\pm \sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 4 | $\sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ | DF: Fehler beim Satz von Pythagoras |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\pm \sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 6 | $\sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ | DF: falsche Punktprobe |
| <input type="checkbox"/> 7 | $\pm \sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\pm \frac{3}{5}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 8 | $\pm \sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | DF: Ergebnis ist eindeutig |
| <input type="checkbox"/> 9 | $-\sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ | DF: Fehler beim Satz von Pythagoras |
| <input type="checkbox"/> 10 | $-\sqrt{156} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | DF: Fehler beim Satz von Pythagoras |
| <input type="checkbox"/> 11 | $-\sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-3}{5}))$ | DF: Fehler beim Additionstheorem |
| <input type="checkbox"/> X | $-\sqrt{356} \sin(ax + \arctan_0(\frac{-8}{5}))$ | richtig |

Allgemeine Hinweise:

Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).

Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: <http://www.vorkurs.de.vu>