Blatt Nr 15.00

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 9 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -4 \cdot \frac{(-5 \cdot x)^{n+5}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1 \cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 4$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -4 und $(-5x)^5$ aus und substituieren Sie dann $u = -5x$.

Rechnung:

$$
\begin{array}{rcll}
\sum_{n=0}^{\infty} -4 \cdot \frac{(-5\cdot x)^{n+5}}{n!} & = & -4 \sum_{n=0}^{\infty} (-5 \cdot x)^5 \cdot \frac{(-5\cdot x)^n}{n!} & -4 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\
& = & -4(-5 \cdot x)^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5\cdot x)^n}{n!} & (-5 \cdot x)^5 \text{ausgeklammert} \\
& = & -4(-5 \cdot x)^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -5 \cdot x \\
& = & -4(-5 \cdot x)^5 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \\
& = & -4(-5 \cdot x)^5 \cdot e^{-5 \cdot x} & u = -5 \cdot x
\end{array}
$$

Angebotene Lösungen:

1 $-4(e^{-5x})^5$	2 T ist keine Taylorreihe	3 $-4\cos(-5x)^5$	4 $-4(-5 \cdot x)^5 \sin(-5x)$
☒ $-4(-5 \cdot x)^5 \cdot e^{-5 \cdot x}$	6 Es gibt keine	7 $20x^5 \cdot e^x$	8 $20x^5 \cdot \sin x$
9 $-4\cos(-5x+5)$	10 $-4\sin(-5x+5)$	11 $-4(-5 \cdot x)^5 \cos(-5x)$	12 $20x^5 \cdot \cos x$

Fehlerinterpretation:

1 $-4(e^{-5x})^5$	DF: falscher Ansatz
2 T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
3 $-4\cos(-5x)^5$	DF: falsche Reihe verwendet
4 $-4(-5 \cdot x)^5 \sin(-5x)$	DF: falsche Reihe verwendet
☒ $-4(-5 \cdot x)^5 \cdot e^{-5 \cdot x}$	richtig
6 Es gibt keine	DF: Doch
7 $20x^5 \cdot e^x$	DF: falsch ausgeklammert
8 $20x^5 \cdot \sin x$	DF: falsche Reihe verwendet
9 $-4\cos(-5x+5)$	DF: falsche Reihe verwendet
10 $-4\sin(-5x+5)$	DF: falsche Reihe verwendet
11 $-4(-5 \cdot x)^5 \cos(-5x)$	DF: falsche Reihe verwendet
12 $20x^5 \cdot \cos x$	DF: falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 12 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(5 \cdot e^{4\cos(5x+9)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2 \cos(x_3 x + x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 9$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b)$ und $\ln e^x = x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll} \int \ln(5 \cdot e^{4\cos(5x+9)})\,dx &=& \int \ln 5 + \ln e^{4\cos(5x+9)})\,dx & \ln(a \cdot b) \;=\; \ln a + \ln b) \\ &=& \int \ln 5 + 4\cos(5x+9)\,dx & \ln e^x \;=\; x \\ &=& x \ln 5 + \frac{4}{5}\sin(5x+9) & \int \cos(ax+b)\,dx \;=\; \frac{\sin(ax+b)}{a} \text{ und } \int c\,dx \;=\; c\,x \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\sin(5x+9)$	2 $\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\sin(5x+9)$
3 $\frac{20\sin(5x+9)}{5+e^{4\cos(5x+9)}}$	4 $\ln(5 \cdot e^{4\cos(5x+9)})$
☒ $x\ln 5 + \frac{4}{5}\sin(5x+9)$	6 $\ln(5x \cdot e^{4\sin(5x+9)})$
7 $5 \cdot e^{4\cos(5x+9)}(\ln(5 \cdot e^{4\cos(5x+9)}) - 1)$	8 $x\ln 5 - \frac{4}{5}\sin(5x+9)$
9 keine der angegebenen Funktionen	10 $\ln(5x \cdot e^{-\frac{4}{5}\sin(5x+9)})$
11 $\frac{5}{5x \cdot e^{-\frac{4}{5}\sin(5x+9)}}$	12 $\frac{-5\sin(5x+9)}{e^{4\cos(5x+9)}}$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\sin(5x+9)$	DF: $\int \ln 5 = x\ln 5$
2	$\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\sin(5x+9)$	DF: $\int \ln 5 = x\ln 5$
3	$\frac{20\sin(5x+9)}{5+e^{4\cos(5x+9)}}$	DF: Lösung geraten
4	$\ln(5 \cdot e^{4\cos(5x+9)})$	DF: Lösung geraten
☒	$x\ln 5 + \frac{4}{5}\sin(5x+9)$	richtig
6	$\ln(5x \cdot e^{4\sin(5x+9)})$	DF: Lösung geraten
7	$5 \cdot e^{4\cos(5x+9)}(\ln(5 \cdot e^{4\cos(5x+9)}) - 1)$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
8	$x\ln 5 - \frac{4}{5}\sin(5x+9)$	DF: $\int \cos x = \sin x$
9	keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
10	$\ln(5x \cdot e^{-\frac{4}{5}\sin(5x+9)})$	DF: Lösung geraten
11	$\frac{5}{5x \cdot e^{-\frac{4}{5}\sin(5x+9)}}$	DF: Lösung geraten
12	$\frac{-5\sin(5x+9)}{e^{4\cos(5x+9)}}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 18 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot (5x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2 = Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n \cdot (x_2 x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 5$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot (5x)^{n-1} \quad = \quad 3\sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot (5x)^{n-1} \quad = \quad 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{5} \quad = \quad 3\left(\frac{1}{1-5x} - 1\right) \cdot \frac{1}{5}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$3\left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (5x)^{n-1}\right)' \quad = \quad 3\left((\frac{1}{1-5x} - 1) \cdot \frac{1}{5}\right)' \quad = \quad 3\frac{5}{(1-5x)^2} \cdot \frac{1}{5} \quad = \quad \frac{3}{(1-5x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $\frac{3}{(1-5x)^2}$	2 $\ln(1-5x)$	3 $\frac{15}{(1-5x)^2}$	4 $\frac{3}{5(1-x)^2}$
5 $-\frac{3}{(1-5x)^2}$	6 $\frac{3}{5(1-5x)^2}$	7 $\frac{15}{(1-x)^2}$	8 $-3\ln(1-5x)$
9 $\frac{3}{(1-x)^2}$	10 $-\frac{3}{(1-x)^2}$	11 $\frac{1}{\ln(1-5x)}$	12 $\frac{15}{(1-x)}$

Fehlerinterpretation:

☒	$\frac{3}{(1-5x)^2}$	richtig
2	$\ln(1-5x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
3	$\frac{15}{(1-5x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
4	$\frac{3}{5(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
5	$-\frac{3}{(1-5x)^2}$	DF: Falsches Vorzeichen
6	$\frac{3}{5(1-5x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
7	$\frac{15}{(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
8	$-3\ln(1-5x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
9	$\frac{3}{(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
10	$-\frac{3}{(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
11	$\frac{1}{\ln(1-5x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet
12	$\frac{15}{(1-x)}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 27 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{10x+40}{12x^2+96x+252}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1, \ \ n = 1..4 \quad x_4$ durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{\{2\cdot x_3\}x+\{2\cdot x_3\cdot x_1\}}{x_4x^2+\{2\cdot x_1\cdot x_4\}x+\{x_4(x_1\cdot x_1+x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 12$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int \frac{1}{x} \ = \ \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx & = & \int \frac{10x+40}{12x^2+96x+252}\,dx & \text{Definition} \\
& = & \frac{5}{12} \cdot \int \frac{2x+8}{x^2+8x+21}\,dx & \frac{5}{12} \text{ ausgeklammert} \\
& = & \frac{5}{12} \cdot \int \frac{g'}{g}\,dx & \text{mit } g = x^2+8x+21 \\
& = & \frac{5}{12} \cdot \int \frac{1}{g}\,dg & \text{Substitutionsregel} \\
& = & \frac{5}{12} \cdot \ln|g| & \text{integriert} \\
& = & \frac{5}{12} \cdot \ln|x^2+8x+21| & \text{Rücksubstitution} \\
& = & \frac{5}{12} \cdot \ln(x^2+8x+21) & g(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\
& = & \ln \sqrt[12]{(x^2+8x+21)^5} & \text{Logarithmusgesetz.}
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{5}{12(x+4)} + \frac{5}{12(x+5)}$	2 keine der angegebenen Funktionen	3 $\ln \sqrt[12]{(\frac{x+4}{5})^5}$
4 $\frac{5}{12} \cdot \arctan_0(x^2+8x+21)$	5 $\frac{5}{12((x+4)^2+5)}$	6 $\frac{5}{12} \cdot \arctan_0(\frac{x+4}{5})$
☒ $\ln \sqrt[12]{(x^2+8x+21)^5}$	8 $\frac{5x^2+40x}{4x^3+48x^2+252x}$	9 $\frac{(x+4)^5}{(x+5)^{12}}$
10 $\frac{5}{12} \cdot \ln \lvert\frac{x+4}{5}\rvert$	11 $\ln \sqrt[12]{((x-4)(x-5))^5}$	12 $\sqrt[12]{(\frac{\ln(x-4)}{\ln(x-5)})^5}$

Fehlerinterpretation:

1 $\frac{5}{12(x+4)} + \frac{5}{12(x+5)}$	DF: Lösung geraten
2 keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
3 $\ln \sqrt[12]{(\frac{x+4}{5})^5}$	DF: Lösung geraten
4 $\frac{5}{12} \cdot \arctan_0(x^2+8x+21)$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
5 $\frac{5}{12((x+4)^2+5)}$	DF: nicht integriert
6 $\frac{5}{12} \cdot \arctan_0(\frac{x+4}{5})$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
☒ $\ln \sqrt[12]{(x^2+8x+21)^5}$	richtig
8 $\frac{5x^2+40x}{4x^3+48x^2+252x}$	DF: Zähler und Nenner integriert
9 $\frac{(x+4)^5}{(x+5)^{12}}$	DF: Lösung geraten
10 $\frac{5}{12} \cdot \ln \lvert\frac{x+4}{5}\rvert$	DF: Lösung geraten
11 $\ln \sqrt[12]{((x-4)(x-5))^5}$	DF: Lösung geraten
12 $\sqrt[12]{(\frac{\ln(x-4)}{\ln(x-5)})^5}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 30 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=5}^{\infty} 4 \cdot \frac{(2x)^n}{(n-4)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2 \cdot \frac{(x_3 x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 2$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n - 4$ oder $n = k + 4$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{n=\infty} 4 \cdot \frac{(2x)^n}{(n-4)!} &= \sum_{k+4=5}^{k+4=\infty} 4 \cdot \frac{(2x)^{k+4}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n-4 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-4} 4 \cdot (2x)^4 \cdot \frac{(2x)^k}{k!} \\
&= 4 \cdot (2x)^4 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(2x)^k}{k!} && 4 \cdot (2x)^4 \text{ausgeklammert und } \infty - 4 = \infty \\
&= 64\, x^4 \cdot (e^{2x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1: \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $4 \cdot (e^{2x-4} - 1)$	2 T ist keine Taylorreihe	3 $\frac{4}{16x^4} \cdot e^{2x}$	4 $4 \cdot e^{2x-4}$
5 $\frac{4}{16x^4} \cdot (e^{2x} - 1)$	6 $4 \cdot (e^{2x} - e^4 - 1)$	7 $4 \cdot e^{2x} - e^4$	8 $4 \cdot \sin(2x-4)$
☒ $64\ x^4 \cdot (e^{2x} - 1)$	10 $64\ x^4 \cdot e^{2x}$	11 $4 \cdot \tan(2x-4)$	12 $4 \cdot (\cos(2x-4) - 1)$

Fehlerinterpretation:

1	$4 \cdot (e^{2x-4} - 1)$	DF: falscher Ansatz
2	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
3	$\frac{4}{16x^4} \cdot e^{2x}$	DF: Fehler beim Ausklammern
4	$4 \cdot e^{2x-4}$	DF: falscher Ansatz
5	$\frac{4}{16x^4} \cdot (e^{2x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern
6	$4 \cdot (e^{2x} - e^4 - 1)$	DF: falscher Ansatz
7	$4 \cdot e^{2x} - e^4$	DF: falscher Ansatz
8	$4 \cdot \sin(2x-4)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
☒	$64\ x^4 \cdot (e^{2x} - 1)$	richtig
10	$64\ x^4 \cdot e^{2x}$	DF: Die Reihe beginnt bei 1
11	$4 \cdot \tan(2x-4)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
12	$4 \cdot (\cos(2x-4) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 31 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{5}{x-5} - \frac{4}{x+9}$.

Parameter:

$x_n =$ Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 5$ $x_3 = 4$ $x_4 = 9$.

Erklärung:

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{5}{x-5} - \tfrac{4}{x+9}\, dx &= 5\int \tfrac{1}{x-5}\, dx - 4\int \tfrac{1}{x+9}\, dx && \text{Integration ist linear} \\
&= 5\ln|x-5| - 4\ln|x+9| && \int \tfrac{1}{x+a} = \ln|x+a| \\
&= \ln|x-5|^5 - \ln|x+9|^4 && a\ln b = \ln b^a \\
&= \ln\left|\tfrac{(x-5)^5}{(x+9)^4}\right| && \ln(a/b) = \ln a - \ln b
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{10x}{x^2-10x} - \frac{8x}{x^2+18x}$	2 $\ln\left|\frac{x-5}{x+9}\right|^{\frac{5}{4}}$	3 $\left(\sqrt[4]{(x-5)-(x+9)}\right)^5$
☒ $\ln\left|\frac{(x-5)^5}{(x+9)^4}\right|$	5 $\ln|5(x-5) - 4(x+9)|$	6 $\ln\left|\frac{x-5}{x+9}\right|^1$
7 $\sqrt{5(x-5) - 4(x+9)}$	8 $\frac{1}{(x-5)^5} - \frac{1}{(x+9)^4}$	9 $\frac{1}{\ln|x-5|^5 - \ln|x+9|^4}$
10 $\frac{\ln|x-5|^5}{\ln|x+9|^4}$	11 $\frac{-5}{(x-5)^2} + \frac{4}{(x+9)^2}$	12 $\ln\left|\frac{5(x-5)}{4(x+9)}\right|$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{10x}{x^2-10x} - \frac{8x}{x^2+18x}$	DF: Quotient nicht beachtet
2	$\ln\left\|\frac{x-5}{x+9}\right\|^{\frac{5}{4}}$	DF: Potenzgesetze falsch
3	$\left(\sqrt[4]{(x-5)-(x+9)}\right)^5$	DF: Lösung geraten
☒	$\ln\left\|\frac{(x-5)^5}{(x+9)^4}\right\|$	richtig
5	$\ln\|5(x-5)-4(x+9)\|$	DF: Logarithmusgesetze falsch
6	$\ln\left\|\frac{x-5}{x+9}\right\|^1$	DF: Potenzgesetze falsch
7	$\sqrt{5(x-5)-4(x+9)}$	DF: Lösung geraten
8	$\frac{1}{(x-5)^5} - \frac{1}{(x+9)^4}$	DF: Lösung geraten
9	$\frac{1}{\ln\|x-5\|^5 - \ln\|x+9\|^4}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
10	$\frac{\ln\|x-5\|^5}{\ln\|x+9\|^4}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
11	$\frac{-5}{(x-5)^2} + \frac{4}{(x+9)^2}$	DF: abgeleitet
12	$\ln\left\|\frac{5(x-5)}{4(x+9)}\right\|$	DF: Logarithmusgesetze falsch

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 34 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(5x+10)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x = 0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x = 0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x = 0$).

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_2 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(x_2\, x + \{x_2 \cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 2$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(5x+10)^n}{n!} \quad = \quad 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+10)^n}{n!} \quad = \quad 2 \cdot e^{5x+10}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $5x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

$$\begin{array}{lclcl} (2 \cdot e^{5x+10})'\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 5e^{5x+10}\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 5e^{10} \\ (2 \cdot e^{5x+10})''\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 5^2 e^{5x+10}\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 5^2 e^{10} \\ (2 \cdot e^{5x+10})^{(n)}\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 5^n e^{5x+10}\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 5^n e^{10}. \end{array}$$

Damit ist $a_n = 2 \cdot 5^n e^{10}$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 5^n e^{10} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad = \quad 2 \cdot e^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!} \; .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$2 \cdot e^{5x+10} \quad = \quad 2 \cdot e^{10} \cdot e^{5x} \quad = \quad 2 \cdot e^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!} \; .$$

Angebotene Lösungen:

1 $2 \cdot e^{-10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x-10)^n}{n!}$	2 $2 \cdot e^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	3 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+10)^n}{n!}$
☒ $2 \cdot e^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!}$	5 $2 \cdot e^{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$	6 $2 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!}$
7 $2 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$	8 $2 \cdot e^{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10x)^n}{n!}$	9 T ist keine Taylorreihe
10 $2 \cdot e^{5x+10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{(5n)!}$	11 $2 \cdot e^{50} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	12 $2 \cdot e^{5x+10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Fehlerinterpretation:

1 $2 \cdot e^{-10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x-10)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
2 $2 \cdot e^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
3 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+10)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☒ $2 \cdot e^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!}$	richtig
5 $2 \cdot e^{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
6 $2 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
7 $2 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
8 $2 \cdot e^{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
9 T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
10 $2 \cdot e^{5x+10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{(5n)!}$	DF: Lösung geraten
11 $2 \cdot e^{50} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
12 $2 \cdot e^{5x+10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 37 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f : (-\infty, -2] \to \mathbb{R} : \quad f(x) = \sqrt[8]{100x^2 + 400x + 400}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \sqrt[x_1]{\{x_2 \cdot x_2 \cdot x_4\}x^2 + \{2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\}x + \{x_3 \cdot x_3 \cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 8$ $x_2 = 5$ $x_3 = 10$ $x_4 = 4$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[8]{100x^2 + 400x + 400} \\
&= \sqrt[8]{4(25x^2 + 100x + 100)} && \text{4 ausgeklammert} \\
&= \sqrt[8]{4(5x + 10)^2} && \text{binomische Formel} \\
&= \sqrt[4]{4|5x + 10|} && \text{teilweise Wurzel gezogen} \\
&= \begin{cases} \sqrt[4]{20x + 40} & \text{für } x > -2 \\ \sqrt[4]{-20x - 40} & \text{für } x \leq -2 \end{cases} && \text{Betrag aufgelöst.}
\end{aligned}$$

Damit gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \sqrt[4]{4|5x + 10|}\ dx \\
&= \int |4(5x + 10)|^{\frac{1}{4}}\ dx \\
&= \begin{cases} \int (20x + 40)^{\frac{1}{4}}\,dx & \text{für } x > -2 \\ \int (-20x - 40)^{\frac{1}{4}}\,dx & \text{für } x \leq -2 \end{cases} && \text{Betrag aufgelöst} \\
&= \begin{cases} \frac{4}{5 \cdot 20}(20x + 40)^{\frac{5}{4}} & \text{für } x > -2 \\ -\frac{4}{5 \cdot 20}(-20x - 40)^{\frac{5}{4}} & \text{für } x \leq -2 \end{cases} && \text{integriert.}
\end{aligned}$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -2]$ ist $\int \sqrt[8]{100x^2 + 400x + 400}\, dx \quad = \quad -\frac{1}{25}(-20x-40)^{\frac{5}{4}}$

Angebotene Lösungen:

1	$\frac{1}{25}(20x+40)^{\frac{5}{4}}$	2	$-8 \cdot \arcsin(10+5x)$	3	$-\frac{4\sqrt[8]{-10-5x}}{5}$	4	es gibt keine
☒	$-\frac{1}{25}(-20x-40)^{\frac{5}{4}}$	6	$-\frac{1}{25}(20x+40)^{\frac{5}{4}}$	7	$8 \cdot \arcsin(10+5x)$	8	$\frac{4}{5}(20x+40)^{\frac{5}{4}}$
9	$\frac{4\sqrt[8]{10+5x}}{5}$	10	$\frac{4\sqrt[8]{-10-5x}}{5}$	11	$-\frac{4}{5}(-20x-40)^{\frac{5}{4}}$	12	$-\frac{4}{5}(20x+40)^{\frac{5}{4}}$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{1}{25}(20x+40)^{\frac{5}{4}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
2	$-8 \cdot \arcsin(10+5x)$	DF: Lösung geraten
3	$-\frac{4\sqrt[8]{-10-5x}}{5}$	DF: Lösung geraten
4	es gibt keine	DF: doch f ist definiert und integrierbar
☒	$-\frac{1}{25}(-20x-40)^{\frac{5}{4}}$	richtig
6	$-\frac{1}{25}(20x+40)^{\frac{5}{4}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
7	$8 \cdot \arcsin(10+5x)$	DF: Lösung geraten
8	$\frac{4}{5}(20x+40)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen
9	$\frac{4\sqrt[8]{10+5x}}{5}$	DF: Lösung geraten
10	$\frac{4\sqrt[8]{-10-5x}}{5}$	DF: Lösung geraten
11	$-\frac{4}{5}(-20x-40)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen
12	$-\frac{4}{5}(20x+40)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 76 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^n(5\cdot x)^{2(n-6)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n(x_2\cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 6$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^n(5\cdot x)^{2(n-6)}}{(2n)!} \\ &= 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(5\cdot x)^{2(n-6)}}{(2n)!} \\ &= 4 \cdot (5\cdot x)^{-12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(5\cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{4}{(5\cdot x)^{12}} \cdot \cos(5\cdot x)\ . \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand ($n = 0$) heißt $4 \cdot \frac{(5\cdot x)^{-12}}{(0)!} = \frac{4}{(5\cdot x)^{12}}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

[1] $\frac{4}{5} \cdot (\cos x)^{-6}$	[2] $\frac{4}{(5\cdot x)^{12}} \cdot \sin(5x)$	[3] $\frac{4}{(5\cdot x)^{12}} \cdot e^{(5x)}$	[4] $4 \cdot e^{(5x-6)}$
[5] $\frac{4}{(5\cdot x)^{12}} \cdot \cos(5x)$	[6] $4 \cdot \cos(5x-6)$	[7] $4 \cdot (\cos(5x))^{-6}$	[8] $4 \cdot \left(e^{5x}\right)^{-6}$
[9] $4 \cdot (\sin(5x))^{-6}$	[X] T ist keine Taylorreihe	[11] $4 \cdot \sin(5x-6)$	[12] $\frac{4}{5} \cdot e^{-6x}$

Fehlerinterpretation:

[1] $\frac{4}{5} \cdot (\cos x)^{-6}$	DF: falscher Ansatz
[2] $\frac{4}{(5\cdot x)^{12}} \cdot \sin(5x)$	DF: falsche Reihe verwendet
[3] $\frac{4}{(5\cdot x)^{12}} \cdot e^{(5x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
[4] $4 \cdot e^{(5x-6)}$	DF: falscher Ansatz
[5] $\frac{4}{(5\cdot x)^{12}} \cdot \cos(5x)$	DF: fast richtig
[6] $4 \cdot \cos(5x-6)$	DF: falscher Ansatz
[7] $4 \cdot (\cos(5x))^{-6}$	DF: falscher Ansatz
[8] $4 \cdot \left(e^{5x}\right)^{-6}$	DF: falscher Ansatz
[9] $4 \cdot (\sin(5x))^{-6}$	DF: falscher Ansatz
[X] T ist keine Taylorreihe	richtig
[11] $4 \cdot \sin(5x-6)$	DF: falscher Ansatz
[12] $\frac{4}{5} \cdot e^{-6x}$	DF: falscher Ansatz

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu