Blatt Nr 15.01

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 3 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f:\ (-\infty,-5] \rightarrow \mathbb{R}: \quad f(x) \quad = \quad \sqrt[8]{27x^2+270x+675}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \sqrt[x_1]{\{x_2 \cdot x_2 \cdot x_4\}x^2 + \{2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\}x + \{x_3 \cdot x_3 \cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 8 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 15 \quad x_4 = 3$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[8]{27x^2+270x+675} && \\ &= \sqrt[8]{3(9x^2+90x+225)} && \text{3 ausgeklammert} \\ &= \sqrt[8]{3(3x+15)^2} && \text{binomische Formel} \\ &= \sqrt[4]{3|3x+15|} && \text{teilweise Wurzel gezogen} \\ &= \begin{cases} \sqrt[4]{9x+45} & \text{für } x > -5 \\ \sqrt[4]{-9x-45} & \text{für } x \leq -5 \end{cases} && \text{Betrag aufgelöst.} \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int \sqrt[4]{3|3x+15|}\ dx && \\ &= \int |3(3x+15)|^{\frac{1}{4}}\ dx && \\ &= \begin{cases} \int (9x+45)^{\frac{1}{4}}\,dx & \text{für } x > -5 \\ \int (-9x-45)^{\frac{1}{4}}\,dx & \text{für } x \leq -5 \end{cases} && \text{Betrag aufgelöst} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{5\cdot 9}(9x+45)^{\frac{5}{4}} & \text{für } x > -5 \\ -\frac{4}{5\cdot 9}(-9x-45)^{\frac{5}{4}} & \text{für } x \leq -5 \end{cases} && \text{integriert.} \end{aligned}$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -5]$ ist $\displaystyle\int \sqrt[8]{27x^2+270x+675}\,dx \quad = \quad -\frac{4}{45}(-9x-45)^{\frac{5}{4}}$

Angebotene Lösungen:

1 $-\frac{4}{5}(-9x-45)^{\frac{5}{4}}$	2 es gibt keine	☒ $-\frac{4}{45}(-9x-45)^{\frac{5}{4}}$	4 $-\frac{3\sqrt[8]{-15-3x}}{3}$
5 $\frac{3\sqrt[8]{15+3x}}{3}$	6 $15 \cdot \arcsin(15+3x)$	7 $-\frac{4}{5}(9x+45)^{\frac{5}{4}}$	8 $15 \cdot \arcsin(-15-3x)$
9 $\frac{4}{45}(9x+45)^{\frac{5}{4}}$	10 $-\frac{3\sqrt[8]{15+3x}}{3}$	11 $-15 \cdot \arcsin(15+3x)$	12 $\frac{4}{5}(9x+45)^{\frac{5}{4}}$

Fehlerinterpretation:

1	$-\frac{4}{5}(-9x-45)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen
2	es gibt keine	DF: doch f ist definiert und integrierbar
☒	$-\frac{4}{45}(-9x-45)^{\frac{5}{4}}$	richtig
4	$-\frac{3\sqrt[8]{-15-3x}}{3}$	DF: Lösung geraten
5	$\frac{3\sqrt[8]{15+3x}}{3}$	DF: Lösung geraten
6	$15\cdot\arcsin(15+3x)$	DF: Lösung geraten
7	$-\frac{4}{5}(9x+45)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen
8	$15\cdot\arcsin(-15-3x)$	DF: Lösung geraten
9	$\frac{4}{45}(9x+45)^{\frac{5}{4}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
10	$-\frac{3\sqrt[8]{15+3x}}{3}$	DF: Lösung geraten
11	$-15\cdot\arcsin(15+3x)$	DF: Lösung geraten
12	$\frac{4}{5}(9x+45)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 16 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n\cdot(2x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2 =$ Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n\cdot(x_2 x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int\sum_{n=1}^{\infty} 3n\cdot(2x)^{n-1} \quad = \quad 3\sum_{n=1}^{\infty}\int n\cdot(2x)^{n-1} \quad = \quad 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{2} \quad = \quad 3\left(\frac{1}{1-2x}-1\right)\cdot\frac{1}{2}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$3\left(\int\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(2x)^{n-1}\right)' \quad = \quad 3\left((\frac{1}{1-2x}-1)\cdot\frac{1}{2}\right)' \quad = \quad 3\frac{2}{(1-2x)^2}\cdot\frac{1}{2} \quad = \quad \frac{3}{(1-2x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-3\ln(1-2x)$	2 $-\frac{3}{2(1-2x)^2}$	3 Es gibt keine	4 T ist keine Taylorreihe
☒ $\frac{3}{(1-2x)^2}$	6 $\frac{6}{(1-x)^2}$	7 $\frac{1}{\ln(1-2x)}$	8 $\frac{6}{(1-x)}$
9 $\frac{3}{2(1-x)}$	10 $\ln(1-2x)$	11 $\frac{3}{2(1-2x)^2}$	12 $-\frac{3}{(1-x)^2}$

Fehlerinterpretation:

1 $-3\ln(1-2x)$ — DF: Falsche Reihe verwendet
2 $-\frac{3}{2(1-2x)^2}$ — DF: Innere Ableitung vergessen
3 Es gibt keine — DF: Doch
4 T ist keine Taylorreihe — DF: Doch
☒ $\frac{3}{(1-2x)^2}$ — richtig
6 $\frac{6}{(1-x)^2}$ — DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden
7 $\frac{1}{\ln(1-2x)}$ — DF: Falsche Reihe verwendet
8 $\frac{6}{(1-x)}$ — DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden
9 $\frac{3}{2(1-x)}$ — DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden
10 $\ln(1-2x)$ — DF: Falsche Reihe verwendet
11 $\frac{3}{2(1-2x)^2}$ — DF: Innere Ableitung vergessen
12 $-\frac{3}{(1-x)^2}$ — DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 24 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(3 \cdot e^{5\cos(10x+9)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2\cos(x_3x+x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 10 \quad x_4 = 9$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b)$ und $\ln e^x = x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int \ln(3 \cdot e^{5\cos(10x+9)})\,dx &= \int \ln 3 + \ln e^{5\cos(10x+9)})\,dx && \ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b) \\
&= \int \ln 3 + 5\cos(10x+9)\,dx && \ln e^x = x \\
&= x\ln 3 + \tfrac{5}{10}\sin(10x+9) && \int \cos(ax+b)\,dx = \tfrac{\sin(ax+b)}{a} \text{ und } \int c\,dx = c\,x
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{50\sin(10x+9)}{3+e^{5\cos(10x+9)}}$
2 $\frac{1}{3} - \frac{5}{10}\sin(10x+9)$
3 $3 \cdot e^{5\cos(10x+9)}(\ln(3 \cdot e^{5\cos(10x+9)}) - 1)$
4 $\ln(3x \cdot e^{5\sin(10x+9)})$
5 $\frac{1}{3} + \frac{5}{10}\sin(10x+9)$
6 $\frac{-e^{5\cos(10x+9)}(\ln(3\cdot e^{5\cos(10x+9)})-1)}{50\sin(10x+9)(3+e^{5\cos(10x+9)})}$
7 $\ln(3x \cdot e^{-\frac{5}{10}\sin(10x+9)})$
☒ $x\ln 3 + \frac{5}{10}\sin(10x+9)$
9 keine der angegebenen Funktionen
10 $\frac{10}{3x\cdot e^{-\frac{5}{10}\sin(10x+9)}}$
11 $x\ln 3 - \frac{5}{10}\sin(10x+9)$
12 f ist nicht integrierbar

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{50\sin(10x+9)}{3+e^{5\cos(10x+9)}}$	DF: Lösung geraten
2	$\frac{1}{3}-\frac{5}{10}\sin(10x+9)$	DF: $\int \ln 3 \;=\; x\ln 3$
3	$3\cdot e^{5\cos(10x+9)}(\ln(3\cdot e^{5\cos(10x+9)})-1)$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
4	$\ln(3x\cdot e^{5\sin(10x+9)})$	DF: Lösung geraten
5	$\frac{1}{3}+\frac{5}{10}\sin(10x+9)$	DF: $\int \ln 3 \;=\; x\ln 3$
6	$\frac{-e^{5\cos(10x+9)}(\ln(3\cdot e^{5\cos(10x+9)})-1)}{50\sin(10x+9)(3+e^{5\cos(10x+9)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
7	$\ln(3x\cdot e^{-\frac{5}{10}\sin(10x+9)})$	DF: Lösung geraten
☒	$x\ln 3+\frac{5}{10}\sin(10x+9)$	richtig
9	keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
10	$\frac{10}{3x\cdot e^{-\frac{5}{10}\sin(10x+9)}}$	DF: Lösung geraten
11	$x\ln 3-\frac{5}{10}\sin(10x+9)$	DF: $\int \cos x \;=\; \sin x$
12	f ist nicht integrierbar	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 36 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{14x+42}{9x^2+54x+117}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n>1,\;\; n=1..4 \quad x_4$ durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x)=\frac{\{2\cdot x_3\}x+\{2\cdot x_3\cdot x_1\}}{x_4x^2+\{2\cdot x_1\cdot x_4\}x+\{x_4(x_1\cdot x_1+x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=3 \quad x_2=4 \quad x_3=7 \quad x_4=9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int\frac{1}{x} \;=\; \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx &=& \int\frac{14x+42}{9x^2+54x+117}\,dx & \text{Definition}\\
&=& \frac{7}{9}\cdot\int\frac{2x+6}{x^2+6x+13}\,dx & \frac{7}{9}\text{ ausgeklammert}\\
&=& \frac{7}{9}\cdot\int\frac{g'}{g}\,dx & \text{mit } g=x^2+6x+13\\
&=& \frac{7}{9}\cdot\int\frac{1}{g}\,dg & \text{Substitutionsregel}\\
&=& \frac{7}{9}\cdot\ln|g| & \text{integriert}\\
&=& \frac{7}{9}\cdot\ln|x^2+6x+13| & \text{Rücksubstitution}\\
&=& \frac{7}{9}\cdot\ln(x^2+6x+13) & g(x)>0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R}\\
&=& \ln\sqrt[9]{(x^2+6x+13)^7} & \text{Logarithmusgesetz.}
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\sqrt[9]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-4)})^7}$	2 keine der angegebenen Funktionen	3 $\ln\sqrt[9]{((x-3)(x-4))^7}$
4 $\frac{7}{9}\cdot\arctan_0(\frac{x+3}{4})$	5 $\ln\sqrt[9]{(\frac{x+3}{4})^7}$	6 $\frac{7}{9}\cdot\arctan_0(14x+42)$
7 $\frac{7}{9((x+3)^2+4)}$	8 $\frac{(x+3)^7}{(x+4)^9}$	☒ $\ln\sqrt[9]{(x^2+6x+13)^7}$
10 $\frac{7}{9}\cdot\ln\lvert\frac{x+3}{4}\rvert$	11 $\frac{7}{9(x+3)}+\frac{7}{9(x+4)}$	12 $\frac{7}{9}\cdot\arctan_0(x^2+6x+13)$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	$\sqrt[9]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-4)})^7}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{2}$	keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
$\boxed{3}$	$\ln\sqrt[9]{((x-3)(x-4))^7}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{4}$	$\frac{7}{9}\cdot\arctan_0(\frac{x+3}{4})$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$
$\boxed{5}$	$\ln\sqrt[9]{(\frac{x+3}{4})^7}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{6}$	$\frac{7}{9}\cdot\arctan_0(14x+42)$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$
$\boxed{7}$	$\frac{7}{9((x+3)^2+4)}$	DF: nicht integriert
$\boxed{8}$	$\frac{(x+3)^7}{(x+4)^9}$	DF: Lösung geraten
$\boxtimes$	$\ln\sqrt[9]{(x^2+6x+13)^7}$	richtig
$\boxed{10}$	$\frac{7}{9}\cdot\ln\lvert\frac{x+3}{4}\rvert$	DF: Lösung geraten
$\boxed{11}$	$\frac{7}{9(x+3)}+\frac{7}{9(x+4)}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{12}$	$\frac{7}{9}\cdot\arctan_0(x^2+6x+13)$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 37 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}4\cdot\frac{(3x+6)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x=0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x=0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x=0$).

Parameter:

$x_1,x_2,x_3=$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1,x_2,x_3>1$, $x_2\neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty}x_1\cdot\frac{(x_2\,x+\{x_2\cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=4 \qquad x_2=3 \qquad x_3=2$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}4\cdot\frac{(3x+6)^n}{n!} \quad=\quad 4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+6)^n}{n!} \quad=\quad 4\cdot e^{3x+6}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $3x+6=0\Leftrightarrow x=-2$.

$$\begin{aligned}(4\cdot e^{3x+6})'\big|_{x=0} &= 4\cdot 3e^{3x+6}\big|_{x=0} &&= 4\cdot 3e^6\\ (4\cdot e^{3x+6})''\big|_{x=0} &= 4\cdot 3^2e^{3x+6}\big|_{x=0} &&= 4\cdot 3^2e^6\\ (4\cdot e^{3x+6})^{(n)}\big|_{x=0} &= 4\cdot 3^ne^{3x+6}\big|_{x=0} &&= 4\cdot 3^ne^6.\end{aligned}$$

Damit ist $a_n=4\cdot 3^ne^6$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty}4\cdot 3^ne^6\cdot\frac{x^n}{n!} \quad=\quad 4\cdot e^6\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}\ .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$4\cdot e^{3x+6} \quad=\quad 4\cdot e^6\cdot e^{3x} \quad=\quad 4\cdot e^6\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}\ .$$

Angebotene Lösungen:

1 $4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+6)^n}{n!}$	2 $4 \cdot e^{3x+6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(3n)!}$	3 $4 \cdot e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-6)^n}{n!}$
4 T ist keine Taylorreihe	5 $4 \cdot e^{18} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	6 $4 \cdot e^{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
7 $4 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$	8 $4 \cdot e^{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6x)^n}{n!}$	9 $4 \cdot e^{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$
10 $4 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!}$	11 $4 \cdot e^{3x+6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	☒ $4 \cdot e^{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!}$

Fehlerinterpretation:

1 $4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+6)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
2 $4 \cdot e^{3x+6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(3n)!}$	DF: Lösung geraten
3 $4 \cdot e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-6)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
4 T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
5 $4 \cdot e^{18} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
6 $4 \cdot e^{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
7 $4 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
8 $4 \cdot e^{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
9 $4 \cdot e^{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
10 $4 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
11 $4 \cdot e^{3x+6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten
☒ $4 \cdot e^{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!}$	richtig

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 55 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{6}{x-5} - \frac{5}{x+9}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6$ $x_2 = 5$ $x_3 = 5$ $x_4 = 9$.

Erklärung:

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{6}{x-5} - \tfrac{5}{x+9}\,dx &= 6\int \tfrac{1}{x-5}\,dx - 5\int \tfrac{1}{x+9}\,dx && \text{Integration ist linear} \\
&= 6\ln|x-5| - 5\ln|x+9| && \textstyle\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \\
&= \ln|x-5|^6 - \ln|x+9|^5 && a\ln b = \ln b^a \\
&= \ln\left|\tfrac{(x-5)^6}{(x+9)^5}\right| && \ln(a/b) = \ln a - \ln b
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{1}{(x-5)^6} - \frac{1}{(x+9)^5}$	2 $\frac{1}{\ln|x-5|^6 - \ln|x+9|^5}$	3 $\sqrt{\frac{6(x-5)}{5(x+9)}}$
4 $\left(\sqrt[5]{(x-5)-(x+9)}\right)^6$	☒ $\ln\left|\frac{(x-5)^6}{(x+9)^5}\right|$	6 $\ln\left|\frac{x-5}{x+9}\right|^1$
7 $\sqrt{6(x-5)-5(x+9)}$	8 $\ln\left|\frac{6(x-5)}{5(x+9)}\right|$	9 $\frac{-6}{(x-5)^2} + \frac{5}{(x+9)^2}$
10 $\frac{12x}{x^2-10x} - \frac{10x}{x^2+18x}$	11 $\frac{\ln|x-5|^6}{\ln|x+9|^5}$	12 $\ln\left|\frac{x-5}{x+9}\right|^{\frac{6}{5}}$

Fehlerinterpretation:

$\square_1$ $\frac{1}{(x-5)^6} - \frac{1}{(x+9)^5}$ DF: Lösung geraten

$\square_2$ $\frac{1}{\ln|x-5|^6 - \ln|x+9|^5}$ DF: Logarithmusgesetze falsch

$\square_3$ $\sqrt{\frac{6(x-5)}{5(x+9)}}$ DF: Lösung geraten

$\square_4$ $\left(\sqrt[5]{(x-5)-(x+9)}\right)^6$ DF: Lösung geraten

$\boxtimes$ $\ln\left|\frac{(x-5)^6}{(x+9)^5}\right|$ richtig

$\square_6$ $\ln\left|\frac{x-5}{x+9}\right|^1$ DF: Potenzgesetze falsch

$\square_7$ $\sqrt{6(x-5)-5(x+9)}$ DF: Lösung geraten

$\square_8$ $\ln\left|\frac{6(x-5)}{5(x+9)}\right|$ DF: Logarithmusgesetze falsch

$\square_9$ $\frac{-6}{(x-5)^2} + \frac{5}{(x+9)^2}$ DF: abgeleitet

$\square_{10}$ $\frac{12x}{x^2-10x} - \frac{10x}{x^2+18x}$ DF: Quotient nicht beachtet

$\square_{11}$ $\frac{\ln|x-5|^6}{\ln|x+9|^5}$ DF: Logarithmusgesetze falsch

$\square_{12}$ $\ln\left|\frac{x-5}{x+9}\right|^{\frac{6}{5}}$ DF: Potenzgesetze falsch

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 65 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(-1)^n (6\cdot x)^{2(n-3)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n (x_2\cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 3$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(-1)^n (6\cdot x)^{2(n-3)}}{(2n)!} \\ &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6\cdot x)^{2(n-3)}}{(2n)!} \\ &= 2 \cdot (6\cdot x)^{-6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6\cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{2}{(6\cdot x)^6} \cdot \cos(6\cdot x)\ . \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand ($n = 0$) heißt $2 \cdot \frac{(6\cdot x)^{-6}}{(0)!} = \frac{2}{(6\cdot x)^6}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

$\boxtimes$ T ist keine Taylorreihe	$\square_2$ $2\cdot\cos(6x-3)$	$\square_3$ $2\cdot(\sin(6x))^{-3}$	$\square_4$ $\frac{2}{6}\cdot e^{-3x}$
$\square_5$ $2\cdot\sin(6x-3)$	$\square_6$ $\frac{2}{(6\cdot x)^6}\cdot\sin(6x)$	$\square_7$ $2\cdot\left(e^{6x}\right)^{-3}$	$\square_8$ $\frac{2}{(6\cdot x)^6}\cdot\cos(6x)$
$\square_9$ $\frac{2}{(6\cdot x)^6}\cdot e^{(6x)}$	$\square_{10}$ $\frac{2}{6}\cdot(\sin x)^{-3}$	$\square_{11}$ $\frac{2}{6}\cdot(\cos x)^{-3}$	$\square_{12}$ $2\cdot(\cos(6x))^{-3}$

Fehlerinterpretation:

☒	T ist keine Taylorreihe	richtig
2	$2 \cdot \cos(6x-3)$	DF: falscher Ansatz
3	$2 \cdot (\sin(6x))^{-3}$	DF: falscher Ansatz
4	$\frac{2}{6} \cdot e^{-3x}$	DF: falscher Ansatz
5	$2 \cdot \sin(6x-3)$	DF: falscher Ansatz
6	$\frac{2}{(6 \cdot x)^6} \cdot \sin(6x)$	DF: falsche Reihe verwendet
7	$2 \cdot \left(e^{6x}\right)^{-3}$	DF: falscher Ansatz
8	$\frac{2}{(6 \cdot x)^6} \cdot \cos(6x)$	DF: fast richtig
9	$\frac{2}{(6 \cdot x)^6} \cdot e^{(6x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
10	$\frac{2}{6} \cdot (\sin x)^{-3}$	DF: falscher Ansatz
11	$\frac{2}{6} \cdot (\cos x)^{-3}$	DF: falscher Ansatz
12	$2 \cdot (\cos(6x))^{-3}$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 72 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -7 \cdot \frac{(-3 \cdot x)^{n+5}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1 \cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 7$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -7 und $(-3x)^5$ aus und substituieren Sie dann $u = -3x$.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{n=0}^{\infty} -7 \cdot \frac{(-3 \cdot x)^{n+5}}{n!} & = & -7 \sum_{n=0}^{\infty} (-3 \cdot x)^5 \cdot \frac{(-3 \cdot x)^n}{n!} & -7 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\
& = & -7(-3 \cdot x)^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3 \cdot x)^n}{n!} & (-3 \cdot x)^5 \text{ausgeklammert} \\
& = & -7(-3 \cdot x)^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -3 \cdot x \\
& = & -7(-3 \cdot x)^5 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; = \; e^x \\
& = & -7(-3 \cdot x)^5 \cdot e^{-3 \cdot x} & u = -3 \cdot x
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1	$-7x^5 \cdot e^{-3 \cdot x}$	2	$21x^5 \cdot \cos x$	3	$-7e^{-3x+5}$	4	$-7\sin(-3x)^5$
5	$-7\cos(-3x+5)$	6	$-7\sin(-3x+5)$	7	$21x^5 \cdot e^x$	8	$-7(-3 \cdot x)^5 \cos(-3x)$
9	$21x^5 \cdot \sin x$	10	Es gibt keine	11	$-7(e^{-3x})^5$	☒	$-7(-3 \cdot x)^5 \cdot e^{-3 \cdot x}$

Fehlerinterpretation:

$\square_1$	$-7x^5 \cdot e^{-3\cdot x}$	DF: -3 hätte beim x ausgeklammert werden müssen
$\square_2$	$21x^5 \cdot \cos x$	DF: falsche Reihe verwendet
$\square_3$	$-7e^{-3x+5}$	DF: falscher Ansatz
$\square_4$	$-7\sin(-3x)^5$	DF: falsche Reihe verwendet
$\square_5$	$-7\cos(-3x+5)$	DF: falsche Reihe verwendet
$\square_6$	$-7\sin(-3x+5)$	DF: falsche Reihe verwendet
$\square_7$	$21x^5 \cdot e^x$	DF: falsch ausgeklammert
$\square_8$	$-7(-3\cdot x)^5\cos(-3x)$	DF: falsche Reihe verwendet
$\square_9$	$21x^5 \cdot \sin x$	DF: falsche Reihe verwendet
$\square_{10}$	Es gibt keine	DF: Doch
$\square_{11}$	$-7(e^{-3x})^5$	DF: falscher Ansatz
$\boxtimes$	$-7(-3\cdot x)^5 \cdot e^{-3\cdot x}$	richtig

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 91 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=6}^{\infty} 7 \cdot \frac{(4x)^n}{(n-5)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2 \cdot \frac{(x_3 x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 4$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n-5$ oder $n = k+5$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=6}^{n=\infty} 7 \cdot \frac{(4x)^n}{(n-5)!} &= \sum_{k+5=6}^{k+5=\infty} 7 \cdot \frac{(4x)^{k+5}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n-5 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-5} 7 \cdot (4x)^5 \cdot \frac{(4x)^k}{k!} \\
&= 7 \cdot (4x)^5 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(4x)^k}{k!} && 7 \cdot (4x)^5 \text{ausgeklammert und } \infty - 5 = \infty \\
&= 7168\, x^5 \cdot (e^{4x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1: \textstyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

$\square_1$ $7 \cdot e^{4x} - e^5$	$\square_2$ $7 \cdot \tan(4x-5)$	$\square_3$ $7 \cdot \sin(4x-5)$	$\square_4$ $7 \cdot e^{4x-5}$
$\square_5$ T ist keine Taylorreihe	$\square_6$ $7 \cdot (e^{4x-5} - 1)$	$\square_7$ $7 \cdot (e^{4x} - e^5 - 1)$	$\square_8$ $\frac{7}{1024x^5} \cdot (e^{4x} - 1)$
$\square_9$ $\frac{7}{1024x^5} \cdot e^{4x}$	$\square_{10}$ $7 \cdot (\ln(4x-5) - 1)$	$\boxtimes$ $7168\, x^5 \cdot (e^{4x} - 1)$	$\square_{12}$ $7 \cdot (\cos(4x-5) - 1)$

Fehlerinterpretation:

1	$7 \cdot e^{4x} - e^5$	DF: falscher Ansatz
2	$7 \cdot \tan(4x - 5)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
3	$7 \cdot \sin(4x - 5)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
4	$7 \cdot e^{4x-5}$	DF: falscher Ansatz
5	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
6	$7 \cdot (e^{4x-5} - 1)$	DF: falscher Ansatz
7	$7 \cdot (e^{4x} - e^5 - 1)$	DF: falscher Ansatz
8	$\frac{7}{1024x^5} \cdot (e^{4x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern
9	$\frac{7}{1024x^5} \cdot e^{4x}$	DF: Fehler beim Ausklammern
10	$7 \cdot (\ln(4x - 5) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
☒	$7168\ x^5 \cdot (e^{4x} - 1)$	richtig
12	$7 \cdot (\cos(4x - 5) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu