Blatt Nr 15.02

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 4 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -6 \cdot \frac{(-5 \cdot x)^{n+5}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1 \cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 6$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -6 und $(-5x)^5$ aus und substituieren Sie dann $u = -5x$.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{n=0}^{\infty} -6 \cdot \frac{(-5 \cdot x)^{n+5}}{n!} & = & -6 \sum_{n=0}^{\infty} (-5 \cdot x)^5 \cdot \frac{(-5 \cdot x)^n}{n!} & -6 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\
& = & -6(-5 \cdot x)^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5 \cdot x)^n}{n!} & (-5 \cdot x)^5 \text{ausgeklammert} \\
& = & -6(-5 \cdot x)^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -5 \cdot x \\
& = & -6(-5 \cdot x)^5 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \\
& = & -6(-5 \cdot x)^5 \cdot e^{-5 \cdot x} & u = -5 \cdot x
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $-6\cos(-5x)^5$	[X] $-6(-5 \cdot x)^5 \cdot e^{-5 \cdot x}$	[3] $30x^5 \cdot \sin x$	[4] $30x^5 \cdot \cos x$
[5] $-6\sin(-5x)^5$	[6] $-6\cos(-5x+5)$	[7] $-6(-5 \cdot x)^5 \cos(-5x)$	[8] $-6x^5 \cdot e^{-5 \cdot x}$
[9] $-6e^{-5x+5}$	[10] $30x^5 \cdot e^x$	[11] $-6(e^{-5x})^5$	[12] T ist keine Taylorreihe

Fehlerinterpretation:

[1] $-6\cos(-5x)^5$	DF: falsche Reihe verwendet
[X] $-6(-5 \cdot x)^5 \cdot e^{-5 \cdot x}$	richtig
[3] $30x^5 \cdot \sin x$	DF: falsche Reihe verwendet
[4] $30x^5 \cdot \cos x$	DF: falsche Reihe verwendet
[5] $-6\sin(-5x)^5$	DF: falsche Reihe verwendet
[6] $-6\cos(-5x+5)$	DF: falsche Reihe verwendet
[7] $-6(-5 \cdot x)^5 \cos(-5x)$	DF: falsche Reihe verwendet
[8] $-6x^5 \cdot e^{-5 \cdot x}$	DF: -5 hätte beim x ausgeklammert werden müssen
[9] $-6e^{-5x+5}$	DF: falscher Ansatz
[10] $30x^5 \cdot e^x$	DF: falsch ausgeklammert
[11] $-6(e^{-5x})^5$	DF: falscher Ansatz
[12] T ist keine Taylorreihe	DF: Doch

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 5 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=4}^{\infty} 6 \cdot \frac{(4x)^n}{(n-3)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2 \cdot \frac{(x_3 x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 4$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n - 3$ oder $n = k + 3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{n=\infty} 6 \cdot \frac{(4x)^n}{(n-3)!} &= \sum_{k+3=4}^{k+3=\infty} 6 \cdot \frac{(4x)^{k+3}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n-3 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-3} 6 \cdot (4x)^3 \cdot \frac{(4x)^k}{k!} \\
&= 6 \cdot (4x)^3 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(4x)^k}{k!} && 6 \cdot (4x)^3 \text{ausgeklammert und } \infty - 3 = \infty \\
&= 384\, x^3 \cdot (e^{4x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1: \textstyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $6 \cdot (\cos(4x-3) - 1)$	2 $6 \cdot (\ln(4x-3) - 1)$	3 $6 \cdot (e^{4x-3} - 1)$	4 $6 \cdot (e^{4x} - e^3 - 1)$
5 $6 \cdot e^{4x} - e^3$	6 $384\, x^3 \cdot e^{4x}$	7 $6 \cdot \sin(4x-3)$	8 T ist keine Taylorreihe
☒ $384\, x^3 \cdot (e^{4x} - 1)$	10 $6 \cdot \tan(4x-3)$	11 $\frac{6}{64x^3} \cdot (e^{4x} - 1)$	12 $6 \cdot e^{4x-3}$

Fehlerinterpretation:

1	$6 \cdot (\cos(4x-3) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
2	$6 \cdot (\ln(4x-3) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
3	$6 \cdot (e^{4x-3} - 1)$	DF: falscher Ansatz
4	$6 \cdot (e^{4x} - e^3 - 1)$	DF: falscher Ansatz
5	$6 \cdot e^{4x} - e^3$	DF: falscher Ansatz
6	$384\, x^3 \cdot e^{4x}$	DF: Die Reihe beginnt bei 1
7	$6 \cdot \sin(4x-3)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
8	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
☒	$384\, x^3 \cdot (e^{4x} - 1)$	richtig
10	$6 \cdot \tan(4x-3)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
11	$\frac{6}{64x^3} \cdot (e^{4x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern
12	$6 \cdot e^{4x-3}$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 6 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot (5x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2 = Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n \cdot (x_2 x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 5$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot (5x)^{n-1} \quad = \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot (5x)^{n-1} \quad = \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{5} \quad = \quad 3 \left(\frac{1}{1-5x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{5}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$3 \left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (5x)^{n-1} \right)' \quad = \quad 3 \left((\frac{1}{1-5x} - 1) \cdot \frac{1}{5} \right)' \quad = \quad 3 \frac{5}{(1-5x)^2} \cdot \frac{1}{5} \quad = \quad \frac{3}{(1-5x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{15}{(1-x)^2}$	2 $-\frac{3}{5(1-x)^2}$	3 $\frac{3}{\ln(1-5x)}$	4 $\frac{15}{(1-x)}$
5 $\frac{15}{(1-5x)^2}$	☒ $\frac{3}{(1-5x)^2}$	7 $\frac{3}{5(1-5x)^2}$	8 $-3\ln(1-5x)$
9 Es gibt keine	10 $\frac{3}{5(1-x)}$	11 $\frac{1}{\ln(1-5x)}$	12 $\ln(1-5x)$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{15}{(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
2	$-\frac{3}{5(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
3	$\frac{3}{\ln(1-5x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet
4	$\frac{15}{(1-x)}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
5	$\frac{15}{(1-5x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
☒	$\frac{3}{(1-5x)^2}$	richtig
7	$\frac{3}{5(1-5x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
8	$-3\ln(1-5x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
9	Es gibt keine	DF: Doch
10	$\frac{3}{5(1-x)}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
11	$\frac{1}{\ln(1-5x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet
12	$\ln(1-5x)$	DF: Falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 15 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f: \ (-\infty, -6] \ \rightarrow \ \mathbb{R}: \quad f(x) \quad = \quad \sqrt[4]{100x^2 + 1200x + 3600}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \sqrt[x_1]{\{x_2 \cdot x_2 \cdot x_4\}x^2 + \{2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\}x + \{x_3 \cdot x_3 \cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $\quad x_2 = 5$ $\quad x_3 = 30$ $\quad x_4 = 4$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[4]{100x^2+1200x+3600} \\
&= \sqrt[4]{4(25x^2+300x+900)} && \text{4 ausgeklammert} \\
&= \sqrt[4]{4(5x+30)^2} && \text{binomische Formel} \\
&= \sqrt[2]{4|5x+30|} && \text{teilweise Wurzel gezogen} \\
&= \begin{cases} \sqrt[2]{20x+120} & \text{für } x > -6 \\ \sqrt[2]{-20x-120} & \text{für } x \le -6 \end{cases} && \text{Betrag aufgelöst.}
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \sqrt[2]{4|5x+30|}\ dx \\
&= \int |4(5x+30)|^{\frac{1}{2}}\ dx \\
&= \begin{cases} \int (20x+120)^{\frac{1}{2}}\,dx & \text{für } x > -6 \\ \int (-20x-120)^{\frac{1}{2}}\,dx & \text{für } x \le -6 \end{cases} && \text{Betrag aufgelöst} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{3\cdot 20}(20x+120)^{\frac{3}{2}} & \text{für } x > -6 \\ -\frac{2}{3\cdot 20}(-20x-120)^{\frac{3}{2}} & \text{für } x \le -6 \end{cases} && \text{integriert.}
\end{aligned}
$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -6]$ ist $\displaystyle\int \sqrt[4]{100x^2+1200x+3600}\,dx \;=\; -\frac{1}{30}(-20x-120)^{\frac{3}{2}}$

Angebotene Lösungen:

[1] $-\frac{1}{30}(20x+120)^{\frac{3}{2}}$	[☒] $-\frac{1}{30}(-20x-120)^{\frac{3}{2}}$	[3] $-\frac{2}{3}(20x+120)^{\frac{3}{2}}$	[4] $\frac{1}{30}(20x+120)^{\frac{3}{2}}$
[5] $-\frac{2}{3}(-20x-120)^{\frac{3}{2}}$	[6] $24 \cdot \arcsin\,(-30-5x)$	[7] $\frac{4\sqrt[4]{-30-5x}}{5}$	[8] $-\frac{4\sqrt[4]{-30-5x}}{5}$
[9] $\frac{2}{3}(20x+120)^{\frac{3}{2}}$	[10] $-\frac{4\sqrt[4]{30+5x}}{5}$	[11] $24 \cdot \arcsin\,(30+5x)$	[12] $\frac{4\sqrt[4]{30+5x}}{5}$

Fehlerinterpretation:

[1]	$-\frac{1}{30}(20x+120)^{\frac{3}{2}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
[☒]	$-\frac{1}{30}(-20x-120)^{\frac{3}{2}}$	richtig
[3]	$-\frac{2}{3}(20x+120)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen
[4]	$\frac{1}{30}(20x+120)^{\frac{3}{2}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
[5]	$-\frac{2}{3}(-20x-120)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen
[6]	$24 \cdot \arcsin\,(-30-5x)$	DF: Lösung geraten
[7]	$\frac{4\sqrt[4]{-30-5x}}{5}$	DF: Lösung geraten
[8]	$-\frac{4\sqrt[4]{-30-5x}}{5}$	DF: Lösung geraten
[9]	$\frac{2}{3}(20x+120)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen
[10]	$-\frac{4\sqrt[4]{30+5x}}{5}$	DF: Lösung geraten
[11]	$24 \cdot \arcsin\,(30+5x)$	DF: Lösung geraten
[12]	$\frac{4\sqrt[4]{30+5x}}{5}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 24 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{5}{x-4} - \frac{8}{x+12}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 4$ $x_3 = 8$ $x_4 = 12$.

Erklärung:

$$
\int \frac{1}{x+a} \;=\; \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) \;=\; \ln a - \ln b
$$

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int \frac{5}{x-4} - \frac{8}{x+12}\,dx & = & 5\int \frac{1}{x-4}\,dx - 8\int \frac{1}{x+12}\,dx & \text{Integration ist linear} \\
& = & 5\ln|x-4| - 8\ln|x+12| & \int \frac{1}{x+a} \;=\; \ln|x+a| \\
& = & \ln|x-4|^5 - \ln|x+12|^8 & a\ln b \;=\; \ln b^a \\
& = & \ln\left|\frac{(x-4)^5}{(x+12)^8}\right| & \ln(a/b) \;=\; \ln a - \ln b
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\ln\left\|\frac{5(x-4)}{8(x+12)}\right\|$	[x] $\ln\left\|\frac{(x-4)^5}{(x+12)^8}\right\|$	[3] $\frac{10x}{x^2-8x} - \frac{16x}{x^2+24x}$
[4] $\ln\left\|\frac{x-4}{x+12}\right\|^{\frac{5}{8}}$	[5] $\frac{\ln\|x-4\|^5}{\ln\|x+12\|^8}$	[6] $\frac{1}{\ln\|x-4\|^5-\ln\|x+12\|^8}$
[7] $\sqrt{5(x-4)-8(x+12)}$	[8] $\frac{1}{(x-4)^5} - \frac{1}{(x+12)^8}$	[9] $\frac{-5}{(x-4)^2} + \frac{8}{(x+12)^2}$
[10] $\ln\left\|\frac{x-4}{x+12}\right\|^{-3}$	[11] $\left(\sqrt[8]{(x-4)-(x+12)}\right)^5$	[12] $\ln\|5(x-4)-8(x+12)\|$

Fehlerinterpretation:

[1] $\ln\left\|\frac{5(x-4)}{8(x+12)}\right\|$	DF: Logarithmusgesetze falsch
[x] $\ln\left\|\frac{(x-4)^5}{(x+12)^8}\right\|$	richtig
[3] $\frac{10x}{x^2-8x} - \frac{16x}{x^2+24x}$	DF: Quotient nicht beachtet
[4] $\ln\left\|\frac{x-4}{x+12}\right\|^{\frac{5}{8}}$	DF: Potenzgesetze falsch
[5] $\frac{\ln\|x-4\|^5}{\ln\|x+12\|^8}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
[6] $\frac{1}{\ln\|x-4\|^5-\ln\|x+12\|^8}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
[7] $\sqrt{5(x-4)-8(x+12)}$	DF: Lösung geraten
[8] $\frac{1}{(x-4)^5} - \frac{1}{(x+12)^8}$	DF: Lösung geraten
[9] $\frac{-5}{(x-4)^2} + \frac{8}{(x+12)^2}$	DF: abgeleitet
[10] $\ln\left\|\frac{x-4}{x+12}\right\|^{-3}$	DF: Potenzgesetze falsch
[11] $\left(\sqrt[8]{(x-4)-(x+12)}\right)^5$	DF: Lösung geraten
[12] $\ln\|5(x-4)-8(x+12)\|$	DF: Logarithmusgesetze falsch

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 63 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \frac{(-1)^n(5\cdot x)^{2(n-7)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n (x_2 \cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 7$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \frac{(-1)^n (5\cdot x)^{2(n-7)}}{(2n)!} \\ &= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (5\cdot x)^{2(n-7)}}{(2n)!} \\ &= 3 \cdot (5\cdot x)^{-14} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (5\cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{3}{(5\cdot x)^{14}} \cdot \cos(5\cdot x)\ . \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand $(n = 0)$ heißt $3 \cdot \frac{(5\cdot x)^{-14}}{(0)!} = \frac{3}{(5\cdot x)^{14}}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

1 $3 \cdot \left(e^{5x}\right)^{-7}$	2 $3 \cdot \cos(5x-7)$	3 $\frac{3}{5} \cdot e^{-7x}$	4 $\frac{3}{5} \cdot (\cos x)^{-7}$
5 $\frac{3}{(5\cdot x)^{14}} \cdot \cos(5x)$	6 $3 \cdot (\cos(5x))^{-7}$	7 $\frac{3}{(5\cdot x)^{14}} \cdot e^{(5x)}$	☒ T ist keine Taylorreihe
9 $3 \cdot (\sin(5x))^{-7}$	10 $\frac{3}{(5\cdot x)^{14}} \cdot \sin(5x)$	11 $3 \cdot e^{(5x-7)}$	12 $3 \cdot \sin(5x-7)$

Fehlerinterpretation:

1 $3 \cdot \left(e^{5x}\right)^{-7}$	DF: falscher Ansatz
2 $3 \cdot \cos(5x-7)$	DF: falscher Ansatz
3 $\frac{3}{5} \cdot e^{-7x}$	DF: falscher Ansatz
4 $\frac{3}{5} \cdot (\cos x)^{-7}$	DF: falscher Ansatz
5 $\frac{3}{(5\cdot x)^{14}} \cdot \cos(5x)$	DF: fast richtig
6 $3 \cdot (\cos(5x))^{-7}$	DF: falscher Ansatz
7 $\frac{3}{(5\cdot x)^{14}} \cdot e^{(5x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
☒ T ist keine Taylorreihe	richtig
9 $3 \cdot (\sin(5x))^{-7}$	DF: falscher Ansatz
10 $\frac{3}{(5\cdot x)^{14}} \cdot \sin(5x)$	DF: falsche Reihe verwendet
11 $3 \cdot e^{(5x-7)}$	DF: falscher Ansatz
12 $3 \cdot \sin(5x-7)$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 78 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(4x+20)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x = 0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x = 0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x = 0$).

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_2 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(x_2\,x + \{x_2 \cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(4x+20)^n}{n!} \quad = \quad 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+20)^n}{n!} \quad = \quad 2 \cdot e^{4x+20}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $4x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

$$\begin{aligned}
(2 \cdot e^{4x+20})'\big|_{x=0} &= 2 \cdot 4e^{4x+20}\big|_{x=0} &= 2 \cdot 4e^{20} \\
(2 \cdot e^{4x+20})''\big|_{x=0} &= 2 \cdot 4^2 e^{4x+20}\big|_{x=0} &= 2 \cdot 4^2 e^{20} \\
(2 \cdot e^{4x+20})^{(n)}\big|_{x=0} &= 2 \cdot 4^n e^{4x+20}\big|_{x=0} &= 2 \cdot 4^n e^{20}.
\end{aligned}$$

Damit ist $a_n = 2 \cdot 4^n e^{20}$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 4^n e^{20} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad = \quad 2 \cdot e^{20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} \; .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$2 \cdot e^{4x+20} \quad = \quad 2 \cdot e^{20} \cdot e^{4x} \quad = \quad 2 \cdot e^{20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} \; .$$

Angebotene Lösungen:

☒ $2 \cdot e^{20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!}$	2 $2 \cdot e^{20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	3 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+20)^n}{n!}$
4 T ist keine Taylorreihe	5 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(20x)^n}{n!}$	6 $2 \cdot e^{80} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
7 $2 \cdot e^{4x+20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(4n)!}$	8 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$	9 $2 \cdot e^{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!}$
10 $2 \cdot e^{-20} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x-20)^n}{n!}$	11 $2 \cdot e^{4x+20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	12 $2 \cdot e^{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$

Fehlerinterpretation:

☒ $2 \cdot e^{20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!}$	richtig
2 $2 \cdot e^{20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
3 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+20)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
4 T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
5 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(20x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
6 $2 \cdot e^{80} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
7 $2 \cdot e^{4x+20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(4n)!}$	DF: Lösung geraten
8 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
9 $2 \cdot e^{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
10 $2 \cdot e^{-20} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x-20)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
11 $2 \cdot e^{4x+20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten
12 $2 \cdot e^{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 84 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(6 \cdot e^{5\cos(8x+6)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2 \cos(x_3 x + x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 8 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b)$ und $\ln e^x = x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int \ln(6\cdot e^{5\cos(8x+6)})\,dx &= \int \ln 6 + \ln e^{5\cos(8x+6)})\,dx \\ &= \int \ln 6 + 5\cos(8x+6)\,dx \\ &= x\ln 6 + \tfrac{5}{8}\sin(8x+6)\end{aligned}$$

$\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b)$
$\ln e^x = x$
$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a}$ und $\int c\,dx = c\,x$

Angebotene Lösungen:

1	$\ln(6\cdot e^{5\cos(8x+6)})$	2	$\frac{-8\sin(8x+6)}{e^{5\cos(8x+6)}}$
3	$\frac{-e^{5\cos(8x+6)}(\ln(6\cdot e^{5\cos(8x+6)})-1)}{40\sin(8x+6)(6+e^{5\cos(8x+6)})}$	4	$x\ln 6 - \frac{5}{8}\sin(8x+6)$
5	$\frac{8}{6x\cdot e^{-\frac{5}{8}\sin(8x+6)}}$	6	$\ln(6x\cdot e^{5\sin(8x+6)})$
7	$\frac{1}{6}+\frac{5}{8}\sin(8x+6)$	☒	$x\ln 6 + \frac{5}{8}\sin(8x+6)$
9	$\frac{40\sin(8x+6)}{6+e^{5\cos(8x+6)}}$	10	keine der angegebenen Funktionen
11	$\ln(6x\cdot e^{-\frac{5}{8}\sin(8x+6)})$	12	f ist nicht integrierbar

Fehlerinterpretation:

1	$\ln(6\cdot e^{5\cos(8x+6)})$	DF: Lösung geraten
2	$\frac{-8\sin(8x+6)}{e^{5\cos(8x+6)}}$	DF: Lösung geraten
3	$\frac{-e^{5\cos(8x+6)}(\ln(6\cdot e^{5\cos(8x+6)})-1)}{40\sin(8x+6)(6+e^{5\cos(8x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
4	$x\ln 6 - \frac{5}{8}\sin(8x+6)$	DF: $\int \cos x = \sin x$
5	$\frac{8}{6x\cdot e^{-\frac{5}{8}\sin(8x+6)}}$	DF: Lösung geraten
6	$\ln(6x\cdot e^{5\sin(8x+6)})$	DF: Lösung geraten
7	$\frac{1}{6}+\frac{5}{8}\sin(8x+6)$	DF: $\int \ln 6 = x\ln 6$
☒	$x\ln 6 + \frac{5}{8}\sin(8x+6)$	richtig
9	$\frac{40\sin(8x+6)}{6+e^{5\cos(8x+6)}}$	DF: Lösung geraten
10	keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
11	$\ln(6x\cdot e^{-\frac{5}{8}\sin(8x+6)})$	DF: Lösung geraten
12	f ist nicht integrierbar	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 108 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{20x+80}{9x^2+72x+171}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ x_4 durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{\{2\cdot x_3\}x+\{2\cdot x_3\cdot x_1\}}{x_4x^2+\{2\cdot x_1\cdot x_4\}x+\{x_4(x_1\cdot x_1+x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 3$ $x_3 = 10$ $x_4 = 9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{20x+80}{9x^2+72x+171}\,dx && \text{Definition}\\ &= \frac{10}{9}\cdot\int\frac{2x+8}{x^2+8x+19}\,dx && \tfrac{10}{9}\text{ ausgeklammert}\\ &= \frac{10}{9}\cdot\int\frac{g'}{g}\,dx && \text{mit } g = x^2+8x+19\\ &= \frac{10}{9}\cdot\int\frac{1}{g}\,dg && \text{Substitutionsregel}\\ &= \frac{10}{9}\cdot\ln|g| && \text{integriert}\\ &= \frac{10}{9}\cdot\ln|x^2+8x+19| && \text{Rücksubstitution}\\ &= \frac{10}{9}\cdot\ln(x^2+8x+19) && g(x)>0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R}\\ &= \ln\sqrt[9]{(x^2+8x+19)^{10}} && \text{Logarithmusgesetz.}\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $\frac{10}{9(x+4)} + \frac{10}{9(x+3)}$	☐ 2 $\frac{10}{9((x+4)^2+3)}$	☐ 3 $\ln \sqrt[9]{(\frac{x+4}{3})^{10}}$
☐ 4 $\sqrt[9]{(\frac{\ln(x-4)}{\ln(x-3)})^{10}}$	☐ 5 $\frac{10}{9} \cdot \arctan_0(\frac{x+4}{3})$	☐ 6 $\frac{10}{9} \cdot \arctan_0(20x+80)$
☐ 7 keine der angegebenen Funktionen	☐ 8 $\frac{10}{9} \cdot \arctan_0(x^2+8x+19)$	☐ 9 $\frac{10x^2+80x}{3x^3+36x^2+171x}$
☐ 10 $\ln \sqrt[9]{((x-4)(x-3))^{10}}$	☒ $\ln \sqrt[9]{(x^2+8x+19)^{10}}$	☐ 12 $\frac{10}{9} \cdot \ln \lvert \frac{x+4}{3} \rvert$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $\frac{10}{9(x+4)} + \frac{10}{9(x+3)}$	DF: Lösung geraten
☐ 2 $\frac{10}{9((x+4)^2+3)}$	DF: nicht integriert
☐ 3 $\ln \sqrt[9]{(\frac{x+4}{3})^{10}}$	DF: Lösung geraten
☐ 4 $\sqrt[9]{(\frac{\ln(x-4)}{\ln(x-3)})^{10}}$	DF: Lösung geraten
☐ 5 $\frac{10}{9} \cdot \arctan_0(\frac{x+4}{3})$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
☐ 6 $\frac{10}{9} \cdot \arctan_0(20x+80)$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
☐ 7 keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
☐ 8 $\frac{10}{9} \cdot \arctan_0(x^2+8x+19)$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
☐ 9 $\frac{10x^2+80x}{3x^3+36x^2+171x}$	DF: Zähler und Nenner integriert
☐ 10 $\ln \sqrt[9]{((x-4)(x-3))^{10}}$	DF: Lösung geraten
☒ $\ln \sqrt[9]{(x^2+8x+19)^{10}}$	richtig
☐ 12 $\frac{10}{9} \cdot \ln \lvert \frac{x+4}{3} \rvert$	DF: Lösung geraten

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu