Blatt Nr 15.03

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 15 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot (7x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2 =$ Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n \cdot (x_2 x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 7$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot (7x)^{n-1} \quad = \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot (7x)^{n-1} \quad = \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7x)^n}{7} \quad = \quad 3 \left(\frac{1}{1-7x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{7}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$3 \left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (7x)^{n-1} \right)' \quad = \quad 3 \left((\frac{1}{1-7x} - 1) \cdot \frac{1}{7} \right)' \quad = \quad 3 \frac{7}{(1-7x)^2} \cdot \frac{1}{7} \quad = \quad \frac{3}{(1-7x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{21}{(1-x)^2}$	2 $\frac{21}{(1-x)}$	3 $3\ln(1-7x)$	4 $\ln(1-7x)$
5 $\frac{3}{7(1-x)^2}$	6 $\frac{3}{(1-x)^2}$	7 $-\frac{3}{7(1-x)^2}$	8 Es gibt keine
9 $\frac{3}{(1-x)}$	☒ $\frac{3}{(1-7x)^2}$	11 $\frac{3}{7(1-7x)^2}$	12 $\frac{1}{\ln(1-7x)}$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{21}{(1-x)^2}$	DF: 7 kann nicht ausgeklammert werden
2	$\frac{21}{(1-x)}$	DF: 7 kann nicht ausgeklammert werden
3	$3\ln(1-7x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
4	$\ln(1-7x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
5	$\frac{3}{7(1-x)^2}$	DF: 7 kann nicht ausgeklammert werden
6	$\frac{3}{(1-x)^2}$	DF: 7 kann nicht ausgeklammert werden
7	$-\frac{3}{7(1-x)^2}$	DF: 7 kann nicht ausgeklammert werden
8	Es gibt keine	DF: Doch
9	$\frac{3}{(1-x)}$	DF: 7 kann nicht ausgeklammert werden
☒	$\frac{3}{(1-7x)^2}$	richtig
11	$\frac{3}{7(1-7x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
12	$\frac{1}{\ln(1-7x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 25 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{3}{x-5} - \frac{4}{x+9}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $\;n = 1..4\;\; x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) \;=\; \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 9$.

Erklärung:

$$\int \frac{1}{x+a} \;=\; \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) \;=\; \ln a - \ln b$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{3}{x-5} - \tfrac{4}{x+9}\,dx &= 3\int \tfrac{1}{x-5}\,dx - 4\int \tfrac{1}{x+9}\,dx && \text{Integration ist linear} \\
&= 3\ln|x-5| - 4\ln|x+9| && \int \tfrac{1}{x+a} \;=\; \ln|x+a| \\
&= \ln|x-5|^3 - \ln|x+9|^4 && a\ln b \;=\; \ln b^a \\
&= \ln\left|\tfrac{(x-5)^3}{(x+9)^4}\right| && \ln(a/b) \;=\; \ln a - \ln b
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{-3}{(x-5)^2} + \frac{4}{(x+9)^2}$	2 $\frac{6x}{x^2-10x} - \frac{8x}{x^2+18x}$	3 $\ln\left\|\frac{x-5}{x+9}\right\|^{-1}$
4 $\ln\left\|\frac{x-5}{x+9}\right\|^{\frac{3}{4}}$	5 $\frac{1}{\ln\|x-5\|^3 - \ln\|x+9\|^4}$	6 $\frac{1}{(x-5)^3} - \frac{1}{(x+9)^4}$
7 $\frac{\ln\|x-5\|^3}{\ln\|x+9\|^4}$	8 $\sqrt{3(x-5) - 4(x+9)}$	☒ $\ln\left\|\frac{(x-5)^3}{(x+9)^4}\right\|$
10 $\sqrt{\frac{3(x-5)}{4(x+9)}}$	11 $\ln\left\|\frac{3(x-5)}{4(x+9)}\right\|$	12 $\ln\|3(x-5) - 4(x+9)\|$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{-3}{(x-5)^2} + \frac{4}{(x+9)^2}$	DF: abgeleitet
2	$\frac{6x}{x^2-10x} - \frac{8x}{x^2+18x}$	DF: Quotient nicht beachtet
3	$\ln\left\|\frac{x-5}{x+9}\right\|^{-1}$	DF: Potenzgesetze falsch
4	$\ln\left\|\frac{x-5}{x+9}\right\|^{\frac{3}{4}}$	DF: Potenzgesetze falsch
5	$\frac{1}{\ln\|x-5\|^3 - \ln\|x+9\|^4}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
6	$\frac{1}{(x-5)^3} - \frac{1}{(x+9)^4}$	DF: Lösung geraten
7	$\frac{\ln\|x-5\|^3}{\ln\|x+9\|^4}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
8	$\sqrt{3(x-5) - 4(x+9)}$	DF: Lösung geraten
☒	$\ln\left\|\frac{(x-5)^3}{(x+9)^4}\right\|$	richtig
10	$\sqrt{\frac{3(x-5)}{4(x+9)}}$	DF: Lösung geraten
11	$\ln\left\|\frac{3(x-5)}{4(x+9)}\right\|$	DF: Logarithmusgesetze falsch
12	$\ln\|3(x-5) - 4(x+9)\|$	DF: Logarithmusgesetze falsch

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 27 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -5 \cdot \frac{(-6 \cdot x)^{n+7}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1 \cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -5 und $(-6x)^7$ aus und substituieren Sie dann $u = -6x$.

Rechnung:

$$\begin{array}{lcll}
\sum_{n=0}^{\infty} -5 \cdot \frac{(-6 \cdot x)^{n+7}}{n!} & = & -5 \sum_{n=0}^{\infty} (-6 \cdot x)^7 \cdot \frac{(-6 \cdot x)^n}{n!} & -5 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\
& = & -5(-6 \cdot x)^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6 \cdot x)^n}{n!} & (-6 \cdot x)^7 \text{ausgeklammert} \\
& = & -5(-6 \cdot x)^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -6 \cdot x \\
& = & -5(-6 \cdot x)^7 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \\
& = & -5(-6 \cdot x)^7 \cdot e^{-6 \cdot x} & u = -6 \cdot x
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-5\cos(-6x)^7$	2 T ist keine Taylorreihe	3 $-5(-6 \cdot x)^7 \sin(-6x)$	4 $-5\sin(-6x+7)$
5 $-5x^7 \cdot e^{-6 \cdot x}$	6 $-5e^{-6x+7}$	☒ $-5(-6 \cdot x)^7 \cdot e^{-6 \cdot x}$	8 $-5\cos(-6x+7)$
9 $30x^7 \cdot \sin x$	10 Es gibt keine	11 $-5(e^{-6x})^7$	12 $-5(-6 \cdot x)^7 \cos(-6x)$

Fehlerinterpretation:

1	$-5\cos(-6x)^7$	DF: falsche Reihe verwendet
2	T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
3	$-5(-6 \cdot x)^7 \sin(-6x)$	DF: falsche Reihe verwendet
4	$-5\sin(-6x+7)$	DF: falsche Reihe verwendet
5	$-5x^7 \cdot e^{-6 \cdot x}$	DF: -6 hätte beim x ausgeklammert werden müssen
6	$-5e^{-6x+7}$	DF: falscher Ansatz
☒	$-5(-6 \cdot x)^7 \cdot e^{-6 \cdot x}$	richtig
8	$-5\cos(-6x+7)$	DF: falsche Reihe verwendet
9	$30x^7 \cdot \sin x$	DF: falsche Reihe verwendet
10	Es gibt keine	DF: Doch
11	$-5(e^{-6x})^7$	DF: falscher Ansatz
12	$-5(-6 \cdot x)^7 \cos(-6x)$	DF: falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 45 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f : (-\infty, -4] \to \mathbb{R} : \quad f(x) = \sqrt[4]{32x^2 + 256x + 512}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \sqrt[x_1]{\{x_2 \cdot x_2 \cdot x_4\}x^2 + \{2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\}x + \{x_3 \cdot x_3 \cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 16 \quad x_4 = 2$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[4]{32x^2+256x+512} & \\
&= \sqrt[4]{2(16x^2+128x+256)} & \text{2 ausgeklammert} \\
&= \sqrt[4]{2(4x+16)^2} & \text{binomische Formel} \\
&= \sqrt[2]{2|4x+16|} & \text{teilweise Wurzel gezogen} \\
&= \begin{cases} \sqrt[2]{8x+32} & \text{für } x > -4 \\ \sqrt[2]{-8x-32} & \text{für } x \leq -4 \end{cases} & \text{Betrag aufgelöst.}
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \sqrt[2]{2|4x+16|}\ dx & \\
&= \int |2(4x+16)|^{\frac{1}{2}}\ dx & \\
&= \begin{cases} \int (8x+32)^{\frac{1}{2}}\,dx & \text{für } x > -4 \\ \int (-8x-32)^{\frac{1}{2}}\,dx & \text{für } x \leq -4 \end{cases} & \text{Betrag aufgelöst} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{3\cdot 8}(8x+32)^{\frac{3}{2}} & \text{für } x > -4 \\ -\frac{2}{3\cdot 8}(-8x-32)^{\frac{3}{2}} & \text{für } x \leq -4 \end{cases} & \text{integriert.}
\end{aligned}
$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -4]$ ist $\displaystyle\int \sqrt[4]{32x^2+256x+512}\,dx = -\frac{1}{12}(-8x-32)^{\frac{3}{2}}$

Angebotene Lösungen:

1 $-\frac{2\sqrt[4]{16+4x}}{4}$	2 es gibt keine	☒ $-\frac{1}{12}(-8x-32)^{\frac{3}{2}}$	4 $-\frac{2}{3}(8x+32)^{\frac{3}{2}}$
5 $-\frac{2\sqrt[4]{-16-4x}}{4}$	6 $-8\cdot\arcsin(16+4x)$	7 $8\cdot\arcsin(16+4x)$	8 $-\frac{1}{12}(8x+32)^{\frac{3}{2}}$
9 $\frac{1}{12}(8x+32)^{\frac{3}{2}}$	10 $\frac{2\sqrt[4]{16+4x}}{4}$	11 $\frac{2\sqrt[4]{-16-4x}}{4}$	12 $\frac{2}{3}(8x+32)^{\frac{3}{2}}$

Fehlerinterpretation:

1	$-\frac{2\sqrt[4]{16+4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
2	es gibt keine	DF: doch f ist definiert und integrierbar
☒	$-\frac{1}{12}(-8x-32)^{\frac{3}{2}}$	richtig
4	$-\frac{2}{3}(8x+32)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen
5	$-\frac{2\sqrt[4]{-16-4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
6	$-8\cdot\arcsin(16+4x)$	DF: Lösung geraten
7	$8\cdot\arcsin(16+4x)$	DF: Lösung geraten
8	$-\frac{1}{12}(8x+32)^{\frac{3}{2}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
9	$\frac{1}{12}(8x+32)^{\frac{3}{2}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
10	$\frac{2\sqrt[4]{16+4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
11	$\frac{2\sqrt[4]{-16-4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
12	$\frac{2}{3}(8x+32)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 56 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{8x+24}{12x^2+72x+132}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $\;x_4$ durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{\{2\cdot x_3\}x+\{2\cdot x_3\cdot x_1\}}{x_4x^2+\{2\cdot x_1\cdot x_4\}x+\{x_4(x_1\cdot x_1+x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 12$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx &=& \int \frac{8x+24}{12x^2+72x+132}\,dx & \text{Definition}\\
&=& \frac{4}{12}\cdot\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}\,dx & \frac{4}{12}\text{ ausgeklammert}\\
&=& \frac{4}{12}\cdot\int \frac{g'}{g}\,dx & \text{mit } g=x^2+6x+11\\
&=& \frac{4}{12}\cdot\int \frac{1}{g}\,dg & \text{Substitutionsregel}\\
&=& \frac{4}{12}\cdot\ln|g| & \text{integriert}\\
&=& \frac{4}{12}\cdot\ln|x^2+6x+11| & \text{Rücksubstitution}\\
&=& \frac{4}{12}\cdot\ln(x^2+6x+11) & g(x)>0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R}\\
&=& \ln\sqrt[12]{(x^2+6x+11)^4} & \text{Logarithmusgesetz.}
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{4x^2+24x}{4x^3+36x^2+132x}$	2 $\frac{(x+3)^4}{(x+2)^{12}}$	3 $\sqrt[12]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-2)})^4}$
4 $\ln\sqrt[12]{(\frac{x+3}{2})^4}$	5 $\frac{4}{12}\cdot\ln\lvert\frac{x+3}{2}\rvert$	6 $\frac{4}{12(x+3)}+\frac{4}{12(x+2)}$
7 $\frac{4}{12}\cdot\arctan_0(\frac{x+3}{2})$	8 keine der angegebenen Funktionen	9 $\frac{4}{12}\cdot\arctan_0(8x+24)$
10 $\ln\sqrt[12]{((x-3)(x-2))^4}$	11 $\frac{4}{12((x+3)^2+2)}$	☒ $\ln\sqrt[12]{(x^2+6x+11)^4}$

Fehlerinterpretation:

1 $\frac{4x^2+24x}{4x^3+36x^2+132x}$	DF: Zähler und Nenner integriert
2 $\frac{(x+3)^4}{(x+2)^{12}}$	DF: Lösung geraten
3 $\sqrt[12]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-2)})^4}$	DF: Lösung geraten
4 $\ln\sqrt[12]{(\frac{x+3}{2})^4}$	DF: Lösung geraten
5 $\frac{4}{12}\cdot\ln\lvert\frac{x+3}{2}\rvert$	DF: Lösung geraten
6 $\frac{4}{12(x+3)}+\frac{4}{12(x+2)}$	DF: Lösung geraten
7 $\frac{4}{12}\cdot\arctan_0(\frac{x+3}{2})$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$
8 keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
9 $\frac{4}{12}\cdot\arctan_0(8x+24)$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$
10 $\ln\sqrt[12]{((x-3)(x-2))^4}$	DF: Lösung geraten
11 $\frac{4}{12((x+3)^2+2)}$	DF: nicht integriert
☒ $\ln\sqrt[12]{(x^2+6x+11)^4}$	richtig

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 57 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot\frac{(4x+12)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x=0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x=0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x=0$).

Parameter:

x_1,x_2,x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1,x_2,x_3>1$, $x_2\neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty}x_1\cdot\frac{(x_2\,x+\{x_2\cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=2$ $\quad x_2=4$ $\quad x_3=3$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(4x+12)^n}{n!} \quad = \quad 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+12)^n}{n!} \quad = \quad 2 \cdot e^{4x+12}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

$$\begin{array}{lclcl} (2 \cdot e^{4x+12})'\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 4e^{4x+12}\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 4e^{12} \\ (2 \cdot e^{4x+12})''\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 4^2 e^{4x+12}\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 4^2 e^{12} \\ (2 \cdot e^{4x+12})^{(n)}\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 4^n e^{4x+12}\big|_{x=0} & = & 2 \cdot 4^n e^{12}. \end{array}$$

Damit ist $a_n = 2 \cdot 4^n e^{12}$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 4^n e^{12} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad = \quad 2 \cdot e^{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} \; .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$2 \cdot e^{4x+12} \quad = \quad 2 \cdot e^{12} \cdot e^{4x} \quad = \quad 2 \cdot e^{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} \; .$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $2 \cdot e^{4x+12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(4n)!}$	☐ 2 $2 \cdot e^{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$	☐ 3 $2 \cdot e^{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!}$
☐ 4 $2 \cdot e^{48} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	☐ 5 $2 \cdot e^{4x+12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	☐ 6 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$
☐ 7 $2 \cdot e^{-12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x-12)^n}{n!}$	☐ 8 T ist keine Taylorreihe	☐ 9 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(12x)^n}{n!}$
☐ 10 $2 \cdot e^{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	☐ 11 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+12)^n}{n!}$	☒ $2 \cdot e^{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $2 \cdot e^{4x+12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(4n)!}$	DF: Lösung geraten
☐ 2 $2 \cdot e^{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☐ 3 $2 \cdot e^{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 4 $2 \cdot e^{48} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 5 $2 \cdot e^{4x+12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten
☐ 6 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☐ 7 $2 \cdot e^{-12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x-12)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☐ 8 T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
☐ 9 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(12x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 10 $2 \cdot e^{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 11 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+12)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☒ $2 \cdot e^{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!}$	richtig

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 69 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(3 \cdot e^{4\cos(5x+9)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2 \cos(x_3 x + x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $\quad x_2 = 4$ $\quad x_3 = 5$ $\quad x_4 = 9$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a\cdot b) \;=\; \ln a+\ln b)$ und $\ln e^x \;=\; x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{array}{lll} \int \ln(3\cdot e^{4\cos(5x+9)})\,dx & = \int \ln 3+\ln e^{4\cos(5x+9)})\,dx & \ln(a\cdot b) \;=\; \ln a+\ln b) \\ & = \int \ln 3+4\cos(5x+9)\,dx & \ln e^x \;=\; x \\ & = x\ln 3+\frac{4}{5}\sin(5x+9) & \int \cos(ax+b)\,dx \;=\; \frac{\sin(ax+b)}{a} \text{ und } \int c\,dx \;=\; c\,x \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $x\ln 3+\frac{4}{5}\sin(5x+9)$	2 $\frac{5}{3x\cdot e^{-\frac{4}{5}\sin(5x+9)}}$
3 $\ln(3\cdot e^{4\cos(5x+9)})$	4 $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\sin(5x+9)$
5 f ist nicht integrierbar	6 $\ln(3x\cdot e^{4\sin(5x+9)})$
7 $3\cdot e^{4\cos(5x+9)}(\ln(3\cdot e^{4\cos(5x+9)})-1)$	8 $x\ln 3-\frac{4}{5}\sin(5x+9)$
9 $\frac{20\sin(5x+9)}{3+e^{4\cos(5x+9)}}$	10 $\frac{-e^{4\cos(5x+9)}(\ln(3\cdot e^{4\cos(5x+9)})-1)}{20\sin(5x+9)(3+e^{4\cos(5x+9)})}$
11 $\frac{-5\sin(5x+9)}{e^{4\cos(5x+9)}}$	12 $\ln(3x\cdot e^{-\frac{4}{5}\sin(5x+9)})$

Fehlerinterpretation:

☒	$x\ln 3+\frac{4}{5}\sin(5x+9)$	richtig
2	$\frac{5}{3x\cdot e^{-\frac{4}{5}\sin(5x+9)}}$	DF: Lösung geraten
3	$\ln(3\cdot e^{4\cos(5x+9)})$	DF: Lösung geraten
4	$\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\sin(5x+9)$	DF: $\int \ln 3 \;=\; x\ln 3$
5	f ist nicht integrierbar	DF: Lösung geraten
6	$\ln(3x\cdot e^{4\sin(5x+9)})$	DF: Lösung geraten
7	$3\cdot e^{4\cos(5x+9)}(\ln(3\cdot e^{4\cos(5x+9)})-1)$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
8	$x\ln 3-\frac{4}{5}\sin(5x+9)$	DF: $\int \cos x \;=\; \sin x$
9	$\frac{20\sin(5x+9)}{3+e^{4\cos(5x+9)}}$	DF: Lösung geraten
10	$\frac{-e^{4\cos(5x+9)}(\ln(3\cdot e^{4\cos(5x+9)})-1)}{20\sin(5x+9)(3+e^{4\cos(5x+9)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
11	$\frac{-5\sin(5x+9)}{e^{4\cos(5x+9)}}$	DF: Lösung geraten
12	$\ln(3x\cdot e^{-\frac{4}{5}\sin(5x+9)})$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 76 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=3}^{\infty} 2\cdot\frac{(5x)^n}{(n-2)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2\cdot\frac{(x_3x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n-2$ oder $n = k+2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{n=\infty} 2 \cdot \frac{(5x)^n}{(n-2)!} &= \sum_{k+2=3}^{k+2=\infty} 2 \cdot \frac{(5x)^{k+2}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n-2 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-2} 2 \cdot (5x)^2 \cdot \frac{(5x)^k}{k!} \\
&= 2 \cdot (5x)^2 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(5x)^k}{k!} && 2 \cdot (5x)^2 \text{ausgeklammert und } \infty - 2 = \infty \\
&= 50\, x^2 \cdot (e^{5x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1 : \textstyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $2 \cdot e^{5x} - e^2$	2 $\frac{2}{25x^2} \cdot (e^{5x} - 1)$	3 $2 \cdot (\cos(5x-2) - 1)$	4 $2 \cdot (e^{5x} - e^2 - 1)$
5 $50\, x^2 \cdot e^{5x}$	6 $2 \cdot \sin(5x-2)$	7 $2 \cdot e^{5x-2}$	8 $2 \cdot (e^{5x-2} - 1)$
9 T ist keine Taylorreihe	10 $\frac{2}{25x^2} \cdot e^{5x}$	11 $2 \cdot (\ln(5x-2) - 1)$	☒ $50\, x^2 \cdot (e^{5x} - 1)$

Fehlerinterpretation:

1 $2 \cdot e^{5x} - e^2$	DF: falscher Ansatz
2 $\frac{2}{25x^2} \cdot (e^{5x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern
3 $2 \cdot (\cos(5x-2) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
4 $2 \cdot (e^{5x} - e^2 - 1)$	DF: falscher Ansatz
5 $50\, x^2 \cdot e^{5x}$	DF: Die Reihe beginnt bei 1
6 $2 \cdot \sin(5x-2)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
7 $2 \cdot e^{5x-2}$	DF: falscher Ansatz
8 $2 \cdot (e^{5x-2} - 1)$	DF: falscher Ansatz
9 T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
10 $\frac{2}{25x^2} \cdot e^{5x}$	DF: Fehler beim Ausklammern
11 $2 \cdot (\ln(5x-2) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
☒ $50\, x^2 \cdot (e^{5x} - 1)$	richtig

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 103 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^n (2 \cdot x)^{2(n-7)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n (x_2 \cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 7$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^n (2 \cdot x)^{2(n-7)}}{(2n)!} \\
&= 4 \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2 \cdot x)^{2(n-7)}}{(2n)!} \\
&= 4 \cdot (2 \cdot x)^{-14} \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2 \cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{4}{(2 \cdot x)^{14}} \cdot \cos(2 \cdot x) \; .
\end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand $(n = 0)$ heißt $4 \cdot \frac{(2\cdot x)^{-14}}{(0)!} = \frac{4}{(2\cdot x)^{14}}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $4 \cdot \left(e^{2x}\right)^{-7}$	☐ 2 $\frac{4}{2} \cdot (\sin x)^{-7}$	☐ 3 $\frac{4}{(2\cdot x)^{14}} \cdot \cos(2x)$	☐ 4 $\frac{4}{(2\cdot x)^{14}} \cdot e^{(2x)}$
☐ 5 $4 \cdot e^{(2x-7)}$	☐ 6 $4 \cdot (\cos(2x))^{-7}$	☐ 7 $4 \cdot \cos(2x - 7)$	☐ 8 $\frac{4}{2} \cdot e^{-7x}$
☐ 9 $4 \cdot \sin(2x - 7)$	☐ 10 $4 \cdot (\sin(2x))^{-7}$	☐ 11 $\frac{4}{2} \cdot (\cos x)^{-7}$	☒ T ist keine Taylorreihe

Fehlerinterpretation:

☐ 1	$4 \cdot \left(e^{2x}\right)^{-7}$	DF: falscher Ansatz
☐ 2	$\frac{4}{2} \cdot (\sin x)^{-7}$	DF: falscher Ansatz
☐ 3	$\frac{4}{(2\cdot x)^{14}} \cdot \cos(2x)$	DF: fast richtig
☐ 4	$\frac{4}{(2\cdot x)^{14}} \cdot e^{(2x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
☐ 5	$4 \cdot e^{(2x-7)}$	DF: falscher Ansatz
☐ 6	$4 \cdot (\cos(2x))^{-7}$	DF: falscher Ansatz
☐ 7	$4 \cdot \cos(2x - 7)$	DF: falscher Ansatz
☐ 8	$\frac{4}{2} \cdot e^{-7x}$	DF: falscher Ansatz
☐ 9	$4 \cdot \sin(2x - 7)$	DF: falscher Ansatz
☐ 10	$4 \cdot (\sin(2x))^{-7}$	DF: falscher Ansatz
☐ 11	$\frac{4}{2} \cdot (\cos x)^{-7}$	DF: falscher Ansatz
☒	T ist keine Taylorreihe	richtig

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu