Blatt Nr 15.04

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 12 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot (5x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2 =$ Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n \cdot (x_2 x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 5$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot (5x)^{n-1} \quad = \quad 2\sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot (5x)^{n-1} \quad = \quad 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{5} \quad = \quad 2\left(\frac{1}{1-5x} - 1\right) \cdot \frac{1}{5}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$2\left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (5x)^{n-1}\right)' \quad = \quad 2\left(\left(\frac{1}{1-5x} - 1\right) \cdot \frac{1}{5}\right)' \quad = \quad 2\frac{5}{(1-5x)^2} \cdot \frac{1}{5} \quad = \quad \frac{2}{(1-5x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{1}{\ln(1-5x)}$	2 T ist keine Taylorreihe	3 $-\frac{2}{5(1-5x)^2}$	4 $-\frac{2}{5(1-x)^2}$
5 $-\frac{2}{(1-x)^2}$	6 $\frac{10}{(1-x)}$	7 $\frac{10}{(1-5x)^2}$	☒ $\frac{2}{(1-5x)^2}$
9 $\frac{2}{(1-x)}$	10 $\frac{2}{(1-x)^2}$	11 $\ln(1-5x)$	12 $-2\ln(1-5x)$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{1}{\ln(1-5x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet
2	T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
3	$-\frac{2}{5(1-5x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
4	$-\frac{2}{5(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
5	$-\frac{2}{(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
6	$\frac{10}{(1-x)}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
7	$\frac{10}{(1-5x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
☒	$\frac{2}{(1-5x)^2}$	richtig
9	$\frac{2}{(1-x)}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
10	$\frac{2}{(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
11	$\ln(1-5x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
12	$-2\ln(1-5x)$	DF: Falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 14 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{5}{x+12}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2$ $x_2 = 2$ $x_3 = 5$ $x_4 = 12$.

Erklärung:

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{2}{x-2} - \tfrac{5}{x+12}\,dx &= 2\int \tfrac{1}{x-2}\,dx - 5\int \tfrac{1}{x+12}\,dx && \text{Integration ist linear} \\
&= 2\ln|x-2| - 5\ln|x+12| && \int \tfrac{1}{x+a} = \ln|x+a| \\
&= \ln|x-2|^2 - \ln|x+12|^5 && a\ln b = \ln b^a \\
&= \ln\left|\tfrac{(x-2)^2}{(x+12)^5}\right| && \ln(a/b) = \ln a - \ln b
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\ln\left|\frac{x-2}{x+12}\right|^{-3}$	2 $\ln\left|\frac{2(x-2)}{5(x+12)}\right|$	3 $\sqrt{\frac{2(x-2)}{5(x+12)}}$
4 $\frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x+12)^2}$	5 $\sqrt{2(x-2) - 5(x+12)}$	6 $\frac{\ln|x-2|^2}{\ln|x+12|^5}$
7 $\frac{1}{\ln|x-2|^2 - \ln|x+12|^5}$	8 $\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x+12)^5}$	9 $\ln\left|\frac{x-2}{x+12}\right|^{\frac{2}{5}}$
☒ $\ln\left|\frac{(x-2)^2}{(x+12)^5}\right|$	11 $\left(\sqrt[5]{(x-2) - (x+12)}\right)^2$	12 $\ln|2(x-2) - 5(x+12)|$

Fehlerinterpretation:

1 $\ln\left|\frac{x-2}{x+12}\right|^{-3}$	DF: Potenzgesetze falsch
2 $\ln\left|\frac{2(x-2)}{5(x+12)}\right|$	DF: Logarithmusgesetze falsch
3 $\sqrt{\frac{2(x-2)}{5(x+12)}}$	DF: Lösung geraten
4 $\frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x+12)^2}$	DF: abgeleitet
5 $\sqrt{2(x-2) - 5(x+12)}$	DF: Lösung geraten
6 $\frac{\ln|x-2|^2}{\ln|x+12|^5}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
7 $\frac{1}{\ln|x-2|^2 - \ln|x+12|^5}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
8 $\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x+12)^5}$	DF: Lösung geraten
9 $\ln\left|\frac{x-2}{x+12}\right|^{\frac{2}{5}}$	DF: Potenzgesetze falsch
☒ $\ln\left|\frac{(x-2)^2}{(x+12)^5}\right|$	richtig
11 $\left(\sqrt[5]{(x-2) - (x+12)}\right)^2$	DF: Lösung geraten
12 $\ln|2(x-2) - 5(x+12)|$	DF: Logarithmusgesetze falsch

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 33 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{20x+40}{6x^2+24x+48}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ x_4 durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{\{2\cdot x_3\}x+\{2\cdot x_3\cdot x_1\}}{x_4x^2+\{2\cdot x_1\cdot x_4\}x+\{x_4(x_1\cdot x_1+x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 10 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll} \int f(x)\,dx & = & \int \frac{20x+40}{6x^2+24x+48}\,dx & \text{Definition} \\ & = & \frac{10}{6}\cdot\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx & \frac{10}{6}\text{ ausgeklammert} \\ & = & \frac{10}{6}\cdot\int \frac{g'}{g}\,dx & \text{mit } g = x^2+4x+8 \\ & = & \frac{10}{6}\cdot\int \frac{1}{g}\,dg & \text{Substitutionsregel} \\ & = & \frac{10}{6}\cdot\ln|g| & \text{integriert} \\ & = & \frac{10}{6}\cdot\ln|x^2+4x+8| & \text{Rücksubstitution} \\ & = & \frac{10}{6}\cdot\ln(x^2+4x+8) & g(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ & = & \ln\sqrt[6]{(x^2+4x+8)^{10}} & \text{Logarithmusgesetz.} \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 keine der angegebenen Funktionen	☒ $\ln\sqrt[6]{(x^2+4x+8)^{10}}$	3 $\frac{10}{6}\cdot\arctan_0(20x+40)$
4 $\frac{10}{6}\cdot\ln\lvert\frac{x+2}{4}\rvert$	5 $\ln\sqrt[6]{(\frac{x+2}{4})^{10}}$	6 $\frac{(x+2)^{10}}{(x+4)^6}$
7 $\frac{10x^2+40x}{2x^3+12x^2+48x}$	8 $\sqrt[6]{(\frac{\ln(x-2)}{\ln(x-4)})^{10}}$	9 $\frac{10}{6(x+2)}+\frac{10}{6(x+4)}$
10 $\frac{10}{6}\cdot\arctan_0(\frac{x+2}{4})$	11 $\ln\sqrt[6]{((x-2)(x-4))^{10}}$	12 $\frac{10}{6((x+2)^2+4)}$

Fehlerinterpretation:

1 keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
☒ $\ln\sqrt[6]{(x^2+4x+8)^{10}}$	richtig
3 $\frac{10}{6}\cdot\arctan_0(20x+40)$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$
4 $\frac{10}{6}\cdot\ln\lvert\frac{x+2}{4}\rvert$	DF: Lösung geraten
5 $\ln\sqrt[6]{(\frac{x+2}{4})^{10}}$	DF: Lösung geraten
6 $\frac{(x+2)^{10}}{(x+4)^6}$	DF: Lösung geraten
7 $\frac{10x^2+40x}{2x^3+12x^2+48x}$	DF: Zähler und Nenner integriert
8 $\sqrt[6]{(\frac{\ln(x-2)}{\ln(x-4)})^{10}}$	DF: Lösung geraten
9 $\frac{10}{6(x+2)}+\frac{10}{6(x+4)}$	DF: Lösung geraten
10 $\frac{10}{6}\cdot\arctan_0(\frac{x+2}{4})$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$
11 $\ln\sqrt[6]{((x-2)(x-4))^{10}}$	DF: Lösung geraten
12 $\frac{10}{6((x+2)^2+4)}$	DF: nicht integriert

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 54 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=4}^{\infty} 4\cdot\frac{(5x)^n}{(n-3)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2\cdot\frac{(x_3x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n - 3$ oder $n = k + 3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{n=\infty} 4 \cdot \frac{(5x)^n}{(n-3)!} &= \sum_{k+3=4}^{k+3=\infty} 4 \cdot \frac{(5x)^{k+3}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n-3 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-3} 4 \cdot (5x)^3 \cdot \frac{(5x)^k}{k!} \\
&= 4 \cdot (5x)^3 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(5x)^k}{k!} && 4 \cdot (5x)^3 \text{ausgeklammert und } \infty - 3 = \infty \\
&= 500\, x^3 \cdot (e^{5x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1 : \textstyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $500\, x^3 \cdot (e^{5x} - 1)$	2 $\frac{4}{125x^3} \cdot e^{5x}$	3 $4 \cdot e^{5x-3}$	4 $4 \cdot (\ln(5x-3) - 1)$
5 $4 \cdot \sin(5x-3)$	6 $500\, x^3 \cdot e^{5x}$	7 $\frac{4}{125x^3} \cdot (e^{5x} - 1)$	8 $4 \cdot e^{5x} - e^3$
9 $4 \cdot \tan(5x-3)$	10 $4 \cdot (e^{5x-3} - 1)$	11 T ist keine Taylorreihe	12 $4 \cdot (e^{5x} - e^3 - 1)$

Fehlerinterpretation:

☒	$500\, x^3 \cdot (e^{5x} - 1)$	richtig
2	$\frac{4}{125x^3} \cdot e^{5x}$	DF: Fehler beim Ausklammern
3	$4 \cdot e^{5x-3}$	DF: falscher Ansatz
4	$4 \cdot (\ln(5x-3) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
5	$4 \cdot \sin(5x-3)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
6	$500\, x^3 \cdot e^{5x}$	DF: Die Reihe beginnt bei 1
7	$\frac{4}{125x^3} \cdot (e^{5x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern
8	$4 \cdot e^{5x} - e^3$	DF: falscher Ansatz
9	$4 \cdot \tan(5x-3)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
10	$4 \cdot (e^{5x-3} - 1)$	DF: falscher Ansatz
11	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
12	$4 \cdot (e^{5x} - e^3 - 1)$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 64 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -3 \cdot \frac{(-7 \cdot x)^{n+6}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1 \cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 3$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -3 und $(-7x)^6$ aus und substituieren Sie dann $u = -7x$.

Rechnung:

$$\begin{array}{lcll}
\sum_{n=0}^{\infty} -3 \cdot \frac{(-7\cdot x)^{n+6}}{n!} & = & -3\sum_{n=0}^{\infty}(-7\cdot x)^6 \cdot \frac{(-7\cdot x)^n}{n!} & -3 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\
 & = & -3(-7\cdot x)^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7\cdot x)^n}{n!} & (-7\cdot x)^6 \text{ausgeklammert} \\
 & = & -3(-7\cdot x)^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -7\cdot x \\
 & = & -3(-7\cdot x)^6 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; e^x \\
 & = & -3(-7\cdot x)^6 \cdot e^{-7\cdot x} & u = -7\cdot x
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-3x^6 \cdot e^{-7\cdot x}$	2 $-3e^{-7x+6}$	3 $-3\sin(-7x)^6$	4 $-3(e^{-7x})^6$
5 $21x^6 \cdot e^x$	6 $-3(-7\cdot x)^6 \sin(-7x)$	☒ $-3(-7\cdot x)^6 \cdot e^{-7\cdot x}$	8 Es gibt keine
9 T ist keine Taylorreihe	10 $-3\sin(-7x+6)$	11 $21x^6 \cdot \cos x$	12 $21x^6 \cdot \sin x$

Fehlerinterpretation:

1	$-3x^6 \cdot e^{-7\cdot x}$	DF: -7 hätte beim x ausgeklammert werden müssen
2	$-3e^{-7x+6}$	DF: falscher Ansatz
3	$-3\sin(-7x)^6$	DF: falsche Reihe verwendet
4	$-3(e^{-7x})^6$	DF: falscher Ansatz
5	$21x^6 \cdot e^x$	DF: falsch ausgeklammert
6	$-3(-7\cdot x)^6 \sin(-7x)$	DF: falsche Reihe verwendet
☒	$-3(-7\cdot x)^6 \cdot e^{-7\cdot x}$	richtig
8	Es gibt keine	DF: Doch
9	T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
10	$-3\sin(-7x+6)$	DF: falsche Reihe verwendet
11	$21x^6 \cdot \cos x$	DF: falsche Reihe verwendet
12	$21x^6 \cdot \sin x$	DF: falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 65 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f:\ (-\infty,-1] \ \rightarrow\ \mathbb{R}: \quad f(x) \quad = \quad \sqrt[4]{48x^2+96x+48}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \sqrt[x_1]{\{x_2\cdot x_2\cdot x_4\}x^2 + \{2\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\}x + \{x_3\cdot x_3\cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 3$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$\begin{array}{lcll}
f(x) & = & \sqrt[4]{48x^2+96x+48} & \\
 & = & \sqrt[4]{3(16x^2+32x+16)} & \text{3 ausgeklammert} \\
 & = & \sqrt[4]{3(4x+4)^2} & \text{binomische Formel} \\
 & = & \sqrt[2]{3|4x+4|} & \text{teilweise Wurzel gezogen} \\
 & = & \begin{cases} \sqrt[2]{12x+12} & \text{für } x > -1 \\ \sqrt[2]{-12x-12} & \text{für } x \leq -1 \end{cases} & \text{Betrag aufgelöst.}
\end{array}$$

Damit gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx &=& \int \sqrt[2]{3|4x+4|}\ \ dx & \\
&=& \int |3(4x+4)|^{\frac{1}{2}}\ \ dx & \\
&=& \left\{ \begin{array}{ll} \int (12x+12)^{\frac{1}{2}}\,dx & \text{für } x > -1 \\ \int (-12x-12)^{\frac{1}{2}}\,dx & \text{für } x \le -1 \end{array} \right. & \text{Betrag aufgelöst} \\
&=& \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3\cdot 12}(12x+12)^{\frac{3}{2}} & \text{für } x > -1 \\ -\frac{2}{3\cdot 12}(-12x-12)^{\frac{3}{2}} & \text{für } x \le -1 \end{array} \right. & \text{integriert.}
\end{array}$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -1]$ ist $\displaystyle\int \sqrt[4]{48x^2+96x+48}\,dx \quad = \quad -\frac{1}{18}(-12x-12)^{\frac{3}{2}}$

Angebotene Lösungen:

1 $-\frac{3\sqrt[4]{-4-4x}}{4}$	2 $3 \cdot \arcsin\,(4+4x)$	3 $-\frac{2}{3}(12x+12)^{\frac{3}{2}}$	4 $\frac{3\sqrt[4]{-4-4x}}{4}$
5 es gibt keine	☒ $-\frac{1}{18}(-12x-12)^{\frac{3}{2}}$	7 $\frac{3\sqrt[4]{4+4x}}{4}$	8 $-\frac{3\sqrt[4]{4+4x}}{4}$
9 $\frac{1}{18}(12x+12)^{\frac{3}{2}}$	10 $-\frac{2}{3}(-12x-12)^{\frac{3}{2}}$	11 $-\frac{1}{18}(12x+12)^{\frac{3}{2}}$	12 $\frac{2}{3}(12x+12)^{\frac{3}{2}}$

Fehlerinterpretation:

1	$-\frac{3\sqrt[4]{-4-4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
2	$3 \cdot \arcsin\,(4+4x)$	DF: Lösung geraten
3	$-\frac{2}{3}(12x+12)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen
4	$\frac{3\sqrt[4]{-4-4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
5	es gibt keine	DF: doch f ist definiert und integrierbar
☒	$-\frac{1}{18}(-12x-12)^{\frac{3}{2}}$	richtig
7	$\frac{3\sqrt[4]{4+4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
8	$-\frac{3\sqrt[4]{4+4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
9	$\frac{1}{18}(12x+12)^{\frac{3}{2}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
10	$-\frac{2}{3}(-12x-12)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen
11	$-\frac{1}{18}(12x+12)^{\frac{3}{2}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
12	$\frac{2}{3}(12x+12)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 78 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot \frac{(-1)^n(5\cdot x)^{2(n-3)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n(x_2\cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = 3$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot \frac{(-1)^n (5\cdot x)^{2(n-3)}}{(2n)!} \\ &= 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (5\cdot x)^{2(n-3)}}{(2n)!} \\ &= 7 \cdot (5 \cdot x)^{-6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (5\cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{7}{(5\cdot x)^6} \cdot \cos(5 \cdot x)\ . \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand ($n = 0$) heißt $7 \cdot \frac{(5\cdot x)^{-6}}{(0)!} = \frac{7}{(5\cdot x)^6}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{7}{5} \cdot (\cos x)^{-3}$	2 $\frac{7}{(5\cdot x)^6} \cdot \cos(5x)$	3 $\frac{7}{5} \cdot (\sin x)^{-3}$	4 $7 \cdot (\cos(5x))^{-3}$
☒ T ist keine Taylorreihe	6 $\frac{7}{5} \cdot e^{-3x}$	7 $7 \cdot e^{(5x-3)}$	8 $7 \cdot \sin(5x-3)$
9 $\frac{7}{(5\cdot x)^6} \cdot e^{(5x)}$	10 $7 \cdot \left(e^{5x}\right)^{-3}$	11 $7 \cdot \cos(5x-3)$	12 $7 \cdot (\sin(5x))^{-3}$

Fehlerinterpretation:

1 $\frac{7}{5} \cdot (\cos x)^{-3}$	DF: falscher Ansatz
2 $\frac{7}{(5\cdot x)^6} \cdot \cos(5x)$	DF: fast richtig
3 $\frac{7}{5} \cdot (\sin x)^{-3}$	DF: falscher Ansatz
4 $7 \cdot (\cos(5x))^{-3}$	DF: falscher Ansatz
☒ T ist keine Taylorreihe	richtig
6 $\frac{7}{5} \cdot e^{-3x}$	DF: falscher Ansatz
7 $7 \cdot e^{(5x-3)}$	DF: falscher Ansatz
8 $7 \cdot \sin(5x-3)$	DF: falscher Ansatz
9 $\frac{7}{(5\cdot x)^6} \cdot e^{(5x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
10 $7 \cdot \left(e^{5x}\right)^{-3}$	DF: falscher Ansatz
11 $7 \cdot \cos(5x-3)$	DF: falscher Ansatz
12 $7 \cdot (\sin(5x))^{-3}$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 79 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(4 \cdot e^{3\cos(7x+6)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2 \cos(x_3 x + x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 3$ $x_3 = 7$ $x_4 = 6$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b)$ und $\ln e^x = x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \int \ln(4 \cdot e^{3\cos(7x+6)})\,dx &= \int \ln 4 + \ln e^{3\cos(7x+6)})\,dx && \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b) \\ &= \int \ln 4 + 3\cos(7x+6)\,dx && \ln e^x = x \\ &= x \ln 4 + \frac{3}{7}\sin(7x+6) && \int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} \text{ und } \int c\,dx = c\,x \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☒	$x\ln 4+\frac{3}{7}\sin(7x+6)$	2	$\ln(4x\cdot e^{3\sin(7x+6)})$
3	$\frac{7}{4x\cdot e^{-\frac{3}{7}\sin(7x+6)}}$	4	$\frac{1}{4}-\frac{3}{7}\sin(7x+6)$
5	$x\ln 4-\frac{3}{7}\sin(7x+6)$	6	$\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\sin(7x+6)$
7	$4\cdot e^{3\cos(7x+6)}(\ln(4\cdot e^{3\cos(7x+6)})-1)$	8	f ist nicht integrierbar
9	$\frac{-e^{3\cos(7x+6)}(\ln(4\cdot e^{3\cos(7x+6)})-1)}{21\sin(7x+6)(4+e^{3\cos(7x+6)})}$	10	$\frac{21\sin(7x+6)}{4+e^{3\cos(7x+6)}}$
11	$\ln(4x\cdot e^{-\frac{3}{7}\sin(7x+6)})$	12	keine der angegebenen Funktionen

Fehlerinterpretation:

☒	$x\ln 4+\frac{3}{7}\sin(7x+6)$	richtig
2	$\ln(4x\cdot e^{3\sin(7x+6)})$	DF: Lösung geraten
3	$\frac{7}{4x\cdot e^{-\frac{3}{7}\sin(7x+6)}}$	DF: Lösung geraten
4	$\frac{1}{4}-\frac{3}{7}\sin(7x+6)$	DF: $\int\ln 4 \;=\; x\ln 4$
5	$x\ln 4-\frac{3}{7}\sin(7x+6)$	DF: $\int\cos x \;=\; \sin x$
6	$\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\sin(7x+6)$	DF: $\int\ln 4 \;=\; x\ln 4$
7	$4\cdot e^{3\cos(7x+6)}(\ln(4\cdot e^{3\cos(7x+6)})-1)$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
8	f ist nicht integrierbar	DF: Lösung geraten
9	$\frac{-e^{3\cos(7x+6)}(\ln(4\cdot e^{3\cos(7x+6)})-1)}{21\sin(7x+6)(4+e^{3\cos(7x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
10	$\frac{21\sin(7x+6)}{4+e^{3\cos(7x+6)}}$	DF: Lösung geraten
11	$\ln(4x\cdot e^{-\frac{3}{7}\sin(7x+6)})$	DF: Lösung geraten
12	keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 95 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\frac{(7x+28)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x=0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x=0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x=0$).

Parameter:

x_1,x_2,x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1,x_2,x_3>1$, $x_2\neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1\cdot\frac{(x_2\,x+\{x_2\cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=2 \quad x_2=7 \quad x_3=4$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\frac{(7x+28)^n}{n!} \quad=\quad 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(7x+28)^n}{n!} \quad=\quad 2\cdot e^{7x+28}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $7x+28=0 \Leftrightarrow x=-4$.

$$\begin{array}{lcccc}
(2\cdot e^{7x+28})'\Big|_{x=0} & = & 2\cdot 7e^{7x+28}\Big|_{x=0} & = & 2\cdot 7e^{28}\\
(2\cdot e^{7x+28})''\Big|_{x=0} & = & 2\cdot 7^2e^{7x+28}\Big|_{x=0} & = & 2\cdot 7^2e^{28}\\
(2\cdot e^{7x+28})^{(n)}\Big|_{x=0} & = & 2\cdot 7^ne^{7x+28}\Big|_{x=0} & = & 2\cdot 7^ne^{28}.
\end{array}$$

Damit ist $a_n=2\cdot 7^ne^{28}$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot 7^ne^{28}\cdot\frac{x^n}{n!} \quad=\quad 2\cdot e^{28}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(7x)^n}{n!}\ .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$2 \cdot e^{7x+28} \quad = \quad 2 \cdot e^{28} \cdot e^{7x} \quad = \quad 2 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!} \ .$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $2 \cdot e^{7x+28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{(7n)!}$	☐ 2 $2 \cdot e^{-28} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x-28)^n}{n!}$	☐ 3 $2 \cdot e^{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$
☐ 4 $2 \cdot e^{7x+28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	☐ 5 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n!}$	☒ $2 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$
☐ 7 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	☐ 8 $2 \cdot e^{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(28x)^n}{n!}$	☐ 9 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x+28)^n}{n!}$
☐ 10 T ist keine Taylorreihe	☐ 11 $2 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	☐ 12 $2 \cdot e^{196} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $2 \cdot e^{7x+28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{(7n)!}$	DF: Lösung geraten
☐ 2 $2 \cdot e^{-28} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x-28)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☐ 3 $2 \cdot e^{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☐ 4 $2 \cdot e^{7x+28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten
☐ 5 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☒ $2 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	richtig
☐ 7 $2 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 8 $2 \cdot e^{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(28x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 9 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x+28)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☐ 10 T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
☐ 11 $2 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 12 $2 \cdot e^{196} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu