Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 1 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot (2x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2 =$ Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n \cdot (x_2 x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot (2x)^{n-1} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot (2x)^{n-1} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2} = 3 \left(\frac{1}{1-2x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$3 \left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (2x)^{n-1} \right)' = 3 \left((\frac{1}{1-2x} - 1) \cdot \frac{1}{2} \right)' = 3 \frac{2}{(1-2x)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{(1-2x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-\frac{3}{(1-2x)^2}$	2 $-3\ln(1-2x)$	3 $\frac{3}{2(1-x)}$	4 $\frac{3}{(1-2x)}$
5 $\frac{3}{2(1-2x)^2}$	6 $\frac{1}{\ln(1-2x)}$	7 Es gibt keine	8 $\frac{3}{2(1-2x)}$
9 $\frac{3}{\ln(1-2x)}$	10 $\frac{3}{(1-x)^2}$	☒ $\frac{3}{(1-2x)^2}$	12 $3\ln(1-2x)$

Fehlerinterpretation:

1	$-\frac{3}{(1-2x)^2}$	DF: Falsches Vorzeichen
2	$-3\ln(1-2x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
3	$\frac{3}{2(1-x)}$	DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden
4	$\frac{3}{(1-2x)}$	DF: Ableitung vergessen
5	$\frac{3}{2(1-2x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
6	$\frac{1}{\ln(1-2x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet
7	Es gibt keine	DF: Doch
8	$\frac{3}{2(1-2x)}$	DF: Innere Ableitung vergessen
9	$\frac{3}{\ln(1-2x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet
10	$\frac{3}{(1-x)^2}$	DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden
☒	$\frac{3}{(1-2x)^2}$	richtig
12	$3\ln(1-2x)$	DF: Falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 2 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} -2 \cdot \dfrac{(-5\cdot x)^{n+2}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1\cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 2$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -2 und $(-5x)^2$ aus und substituieren Sie dann $u = -5x$.

Rechnung:

$$
\begin{array}{rcll}
\sum_{n=0}^{\infty} -2 \cdot \frac{(-5\cdot x)^{n+2}}{n!} & = & -2\sum_{n=0}^{\infty}(-5\cdot x)^2 \cdot \frac{(-5\cdot x)^n}{n!} & -2 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\
& = & -2(-5\cdot x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5\cdot x)^n}{n!} & (-5\cdot x)^2 \text{ausgeklammert} \\
& = & -2(-5\cdot x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -5\cdot x \\
& = & -2(-5\cdot x)^2 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; = \; e^x \\
& = & -2(-5\cdot x)^2 \cdot e^{-5\cdot x} & u = -5\cdot x
\end{array}
$$

Angebotene Lösungen:

[1] $-2\sin(-5x+2)$	[2] T ist keine Taylorreihe	[3] $10x^2 \cdot \cos x$	[4] $-2(e^{-5x})^2$
[5] $-2\cos(-5x)^2$	[6] $-2e^{-5x+2}$	[7] $-2(-5\cdot x)^2\cos(-5x)$	[8] Es gibt keine
[9] $10x^2 \cdot \sin x$	[10] $-2x^2 \cdot e^{-5\cdot x}$	[X] $-2(-5\cdot x)^2 \cdot e^{-5\cdot x}$	[12] $-2(-5\cdot x)^2\sin(-5x)$

Fehlerinterpretation:

[1]	$-2\sin(-5x+2)$	DF: falsche Reihe verwendet
[2]	T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
[3]	$10x^2 \cdot \cos x$	DF: falsche Reihe verwendet
[4]	$-2(e^{-5x})^2$	DF: falscher Ansatz
[5]	$-2\cos(-5x)^2$	DF: falsche Reihe verwendet
[6]	$-2e^{-5x+2}$	DF: falscher Ansatz
[7]	$-2(-5\cdot x)^2\cos(-5x)$	DF: falsche Reihe verwendet
[8]	Es gibt keine	DF: Doch
[9]	$10x^2 \cdot \sin x$	DF: falsche Reihe verwendet
[10]	$-2x^2 \cdot e^{-5\cdot x}$	DF: -5 hätte beim x ausgeklammert werden müssen
[X]	$-2(-5\cdot x)^2 \cdot e^{-5\cdot x}$	richtig
[12]	$-2(-5\cdot x)^2\sin(-5x)$	DF: falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 12 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f:\ (-\infty,-2] \ \rightarrow\ \mathbb{R}: \quad f(x) \quad = \quad \sqrt[6]{8x^2+32x+32}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \sqrt[x_1]{\{x_2\cdot x_2\cdot x_4\}x^2 + \{2\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\}x + \{x_3\cdot x_3\cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 2$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & \sqrt[6]{8x^2+32x+32} & \\ & = & \sqrt[6]{2(4x^2+16x+16)} & \text{2 ausgeklammert} \\ & = & \sqrt[6]{2(2x+4)^2} & \text{binomische Formel} \\ & = & \sqrt[3]{2|2x+4|} & \text{teilweise Wurzel gezogen} \\ & = & \begin{cases} \sqrt[3]{4x+8} & \text{für } x > -2 \\ \sqrt[3]{-4x-8} & \text{für } x \leq -2 \end{cases} & \text{Betrag aufgelöst.} \end{array}$$

Damit gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und

$$\begin{array}{rcll} \int f(x)\,dx & = & \int \sqrt[3]{2|2x+4|}\;dx & \\ & = & \int |2(2x+4)|^{\frac{1}{3}}\;dx & \\ & = & \begin{cases} \int (4x+8)^{\frac{1}{3}}\,dx & \text{für } x > -2 \\ \int (-4x-8)^{\frac{1}{3}}\,dx & \text{für } x \leq -2 \end{cases} & \text{Betrag aufgelöst} \\ & = & \begin{cases} \frac{3}{4\cdot 4}(4x+8)^{\frac{4}{3}} & \text{für } x > -2 \\ -\frac{3}{4\cdot 4}(-4x-8)^{\frac{4}{3}} & \text{für } x \leq -2 \end{cases} & \text{integriert.} \end{array}$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -2]$ ist $\displaystyle\int \sqrt[6]{8x^2+32x+32}\,dx = -\frac{3}{16}(-4x-8)^{\frac{4}{3}}$

Angebotene Lösungen:

[1] $4 \cdot \arcsin(-4-2x)$	[X] $-\frac{3}{16}(-4x-8)^{\frac{4}{3}}$	[3] $-\frac{3}{4}(-4x-8)^{\frac{4}{3}}$	[4] $\frac{2\sqrt[6]{4+2x}}{2}$
[5] $\frac{2\sqrt[6]{-4-2x}}{2}$	[6] $-\frac{3}{4}(4x+8)^{\frac{4}{3}}$	[7] $4 \cdot \arcsin(4+2x)$	[8] $\frac{3}{16}(4x+8)^{\frac{4}{3}}$
[9] $\frac{3}{4}(4x+8)^{\frac{4}{3}}$	[10] $-\frac{3}{16}(4x+8)^{\frac{4}{3}}$	[11] es gibt keine	[12] $-\frac{2\sqrt[6]{4+2x}}{2}$

Fehlerinterpretation:

[1]	$4 \cdot \arcsin(-4-2x)$	DF: Lösung geraten
[X]	$-\frac{3}{16}(-4x-8)^{\frac{4}{3}}$	richtig
[3]	$-\frac{3}{4}(-4x-8)^{\frac{4}{3}}$	DF: innere Ableitung vergessen
[4]	$\frac{2\sqrt[6]{4+2x}}{2}$	DF: Lösung geraten
[5]	$\frac{2\sqrt[6]{-4-2x}}{2}$	DF: Lösung geraten
[6]	$-\frac{3}{4}(4x+8)^{\frac{4}{3}}$	DF: innere Ableitung vergessen
[7]	$4 \cdot \arcsin(4+2x)$	DF: Lösung geraten
[8]	$\frac{3}{16}(4x+8)^{\frac{4}{3}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
[9]	$\frac{3}{4}(4x+8)^{\frac{4}{3}}$	DF: innere Ableitung vergessen
[10]	$-\frac{3}{16}(4x+8)^{\frac{4}{3}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
[11]	es gibt keine	DF: doch f ist definiert und integrierbar
[12]	$-\frac{2\sqrt[6]{4+2x}}{2}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 20 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \frac{(-1)^n(3\cdot x)^{2(n-5)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n(x_2\cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 5$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \frac{(-1)^n (3\cdot x)^{2(n-5)}}{(2n)!} \\ &= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3\cdot x)^{2(n-5)}}{(2n)!} \\ &= 3 \cdot (3 \cdot x)^{-10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3\cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{3}{(3\cdot x)^{10}} \cdot \cos(3 \cdot x) \; . \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand ($n = 0$) heißt $3 \cdot \frac{(3\cdot x)^{-10}}{(0)!} = \frac{3}{(3\cdot x)^{10}}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $\frac{3}{(3\cdot x)^{10}} \cdot \sin(3x)$	☐ 2 $3 \cdot \cos(3x - 5)$	☐ 3 $\frac{3}{(3\cdot x)^{10}} \cdot e^{(3x)}$	☐ 4 $3 \cdot e^{(3x-5)}$
☐ 5 $3 \cdot \sin(3x - 5)$	☐ 6 $\frac{3}{(3\cdot x)^{10}} \cdot \cos(3x)$	☐ 7 $3 \cdot (\cos(3x))^{-5}$	☐ 8 $3 \cdot \left(e^{3x}\right)^{-5}$
☒ T ist keine Taylorreihe	☐ 10 $3 \cdot (\sin(3x))^{-5}$	☐ 11 $\frac{3}{3} \cdot (\cos x)^{-5}$	☐ 12 $\frac{3}{3} \cdot (\sin x)^{-5}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $\frac{3}{(3\cdot x)^{10}} \cdot \sin(3x)$	DF: falsche Reihe verwendet
☐ 2 $3 \cdot \cos(3x - 5)$	DF: falscher Ansatz
☐ 3 $\frac{3}{(3\cdot x)^{10}} \cdot e^{(3x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
☐ 4 $3 \cdot e^{(3x-5)}$	DF: falscher Ansatz
☐ 5 $3 \cdot \sin(3x - 5)$	DF: falscher Ansatz
☐ 6 $\frac{3}{(3\cdot x)^{10}} \cdot \cos(3x)$	DF: fast richtig
☐ 7 $3 \cdot (\cos(3x))^{-5}$	DF: falscher Ansatz
☐ 8 $3 \cdot \left(e^{3x}\right)^{-5}$	DF: falscher Ansatz
☒ T ist keine Taylorreihe	richtig
☐ 10 $3 \cdot (\sin(3x))^{-5}$	DF: falscher Ansatz
☐ 11 $\frac{3}{3} \cdot (\cos x)^{-5}$	DF: falscher Ansatz
☐ 12 $\frac{3}{3} \cdot (\sin x)^{-5}$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 24 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum\limits_{n=4}^{\infty} 7 \cdot \dfrac{(5x)^n}{(n-3)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2 \cdot \frac{(x_3 x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \qquad x_2 = 7 \qquad x_3 = 5$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n - 3$ oder $n = k + 3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{n=\infty} 7 \cdot \frac{(5x)^n}{(n-3)!} &= \sum_{k+3=4}^{k+3=\infty} 7 \cdot \frac{(5x)^{k+3}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n - 3 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-3} 7 \cdot (5x)^3 \cdot \frac{(5x)^k}{k!} \\
&= 7 \cdot (5x)^3 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(5x)^k}{k!} && 7 \cdot (5x)^3 \text{ausgeklammert und } \infty - 3 = \infty \\
&= 875\, x^3 \cdot (e^{5x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1: \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $7 \cdot e^{5x} - e^3$	2 $875\, x^3 \cdot e^{5x}$	3 $\frac{7}{125x^3} \cdot e^{5x}$	4 $7 \cdot (e^{5x-3} - 1)$
☒ $875\, x^3 \cdot (e^{5x} - 1)$	6 T ist keine Taylorreihe	7 $7 \cdot (\ln(5x-3) - 1)$	8 $7 \cdot (e^{5x} - e^3 - 1)$
9 $7 \cdot \tan(5x - 3)$	10 $\frac{7}{125x^3} \cdot (e^{5x} - 1)$	11 $7 \cdot e^{5x-3}$	12 $7 \cdot \sin(5x - 3)$

Fehlerinterpretation:

1	$7 \cdot e^{5x} - e^3$	DF: falscher Ansatz
2	$875\, x^3 \cdot e^{5x}$	DF: Die Reihe beginnt bei 1
3	$\frac{7}{125x^3} \cdot e^{5x}$	DF: Fehler beim Ausklammern
4	$7 \cdot (e^{5x-3} - 1)$	DF: falscher Ansatz
☒	$875\, x^3 \cdot (e^{5x} - 1)$	richtig
6	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
7	$7 \cdot (\ln(5x-3) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
8	$7 \cdot (e^{5x} - e^3 - 1)$	DF: falscher Ansatz
9	$7 \cdot \tan(5x - 3)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
10	$\frac{7}{125x^3} \cdot (e^{5x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern
11	$7 \cdot e^{5x-3}$	DF: falscher Ansatz
12	$7 \cdot \sin(5x - 3)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 29 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+12}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4$ $x_2 = 3$ $x_3 = 5$ $x_4 = 12$.

Erklärung:

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+12}\, dx &= 4 \int \frac{1}{x-3}\, dx - 5 \int \frac{1}{x+12}\, dx && \text{Integration ist linear} \\
&= 4 \ln|x-3| - 5 \ln|x+12| && \int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \\
&= \ln|x-3|^4 - \ln|x+12|^5 && a \ln b = \ln b^a \\
&= \ln\left|\frac{(x-3)^4}{(x+12)^5}\right| && \ln(a/b) = \ln a - \ln b
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $\ln\left\lvert\frac{x-3}{x+12}\right\rvert^{\frac{4}{5}}$	$\boxed{2}$ $\ln\left\lvert\frac{4(x-3)}{5(x+12)}\right\rvert$	$\boxed{3}$ $\sqrt{\frac{4(x-3)}{5(x+12)}}$
$\boxed{4}$ $\frac{-4}{(x-3)^2}+\frac{5}{(x+12)^2}$	$\boxed{5}$ $\frac{8x}{x^2-6x}-\frac{10x}{x^2+24x}$	$\boxed{6}$ $\frac{1}{(x-3)^4}-\frac{1}{(x+12)^5}$
$\boxed{7}$ $\ln\lvert 4(x-3)-5(x+12)\rvert$	$\boxed{8}$ $\frac{\ln\lvert x-3\rvert^4}{\ln\lvert x+12\rvert^5}$	$\boxtimes$ $\ln\left\lvert\frac{(x-3)^4}{(x+12)^5}\right\rvert$
$\boxed{10}$ $\frac{1}{\ln\lvert x-3\rvert^4-\ln\lvert x+12\rvert^5}$	$\boxed{11}$ $\ln\left\lvert\frac{x-3}{x+12}\right\rvert^{-1}$	$\boxed{12}$ $\sqrt{4(x-3)-5(x+12)}$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $\ln\left\lvert\frac{x-3}{x+12}\right\rvert^{\frac{4}{5}}$	DF: Potenzgesetze falsch
$\boxed{2}$ $\ln\left\lvert\frac{4(x-3)}{5(x+12)}\right\rvert$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxed{3}$ $\sqrt{\frac{4(x-3)}{5(x+12)}}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{4}$ $\frac{-4}{(x-3)^2}+\frac{5}{(x+12)^2}$	DF: abgeleitet
$\boxed{5}$ $\frac{8x}{x^2-6x}-\frac{10x}{x^2+24x}$	DF: Quotient nicht beachtet
$\boxed{6}$ $\frac{1}{(x-3)^4}-\frac{1}{(x+12)^5}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{7}$ $\ln\lvert 4(x-3)-5(x+12)\rvert$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxed{8}$ $\frac{\ln\lvert x-3\rvert^4}{\ln\lvert x+12\rvert^5}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxtimes$ $\ln\left\lvert\frac{(x-3)^4}{(x+12)^5}\right\rvert$	richtig
$\boxed{10}$ $\frac{1}{\ln\lvert x-3\rvert^4-\ln\lvert x+12\rvert^5}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxed{11}$ $\ln\left\lvert\frac{x-3}{x+12}\right\rvert^{-1}$	DF: Potenzgesetze falsch
$\boxed{12}$ $\sqrt{4(x-3)-5(x+12)}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 42 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}3\cdot\frac{(7x+28)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x=0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x=0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x=0$).

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_2 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(x_2\, x+\{x_2\cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $\quad x_2 = 7$ $\quad x_3 = 4$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}3\cdot\frac{(7x+28)^n}{n!} \quad = \quad 3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(7x+28)^n}{n!} \quad = \quad 3\cdot e^{7x+28}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $7x+28=0 \Leftrightarrow x=-4$.

$$\begin{array}{rcccl}
(3\cdot e^{7x+28})'\big|_{x=0} & = & 3\cdot 7e^{7x+28}\big|_{x=0} & = & 3\cdot 7e^{28}\\
(3\cdot e^{7x+28})''\big|_{x=0} & = & 3\cdot 7^2e^{7x+28}\big|_{x=0} & = & 3\cdot 7^2e^{28}\\
(3\cdot e^{7x+28})^{(n)}\big|_{x=0} & = & 3\cdot 7^ne^{7x+28}\big|_{x=0} & = & 3\cdot 7^ne^{28}.
\end{array}$$

Damit ist $a_n = 3 \cdot 7^n e^{28}$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot 7^n e^{28} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad = \quad 3 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!} \; .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$3 \cdot e^{7x+28} \quad = \quad 3 \cdot e^{28} \cdot e^{7x} \quad = \quad 3 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!} \; .$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $3 \cdot e^{7x+28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	☐ 2 $3 \cdot e^{7x+28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{(7n)!}$	☐ 3 $3 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n!}$
☒ $3 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	☐ 5 $3 \cdot e^{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$	☐ 6 $3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x+28)^n}{n!}$
☐ 7 $3 \cdot e^{-28} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x-28)^n}{n!}$	☐ 8 $3 \cdot e^{196} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	☐ 9 $3 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$
☐ 10 T ist keine Taylorreihe	☐ 11 $3 \cdot e^{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(28x)^n}{n!}$	☐ 12 $3 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $3 \cdot e^{7x+28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten
☐ 2 $3 \cdot e^{7x+28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{(7n)!}$	DF: Lösung geraten
☐ 3 $3 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☒ $3 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	richtig
☐ 5 $3 \cdot e^{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☐ 6 $3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x+28)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☐ 7 $3 \cdot e^{-28} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x-28)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
☐ 8 $3 \cdot e^{196} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 9 $3 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 10 T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
☐ 11 $3 \cdot e^{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(28x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☐ 12 $3 \cdot e^{28} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 68 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(3 \cdot e^{2\cos(7x+6)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2 \cos(x_3 x + x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 7 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b)$ und $\ln e^x = x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{array}{lcll}
\int \ln(3 \cdot e^{2\cos(7x+6)})\, dx & = & \int \ln 3 + \ln e^{2\cos(7x+6)})\, dx & \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b) \\
 & = & \int \ln 3 + 2\cos(7x+6)\, dx & \ln e^x = x \\
 & = & x \ln 3 + \frac{2}{7}\sin(7x+6) & \int \cos(ax+b)\, dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} \text{ und } \int c\, dx = c\, x
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1	$\frac{e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)}{14\sin(7x+6)(3+e^{2\cos(7x+6)})}$	2	$\frac{-e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)}{14\sin(7x+6)(3+e^{2\cos(7x+6)})}$
3	keine der angegebenen Funktionen	4	$\ln(3x\cdot e^{-\frac{2}{7}\sin(7x+6)})$
5	$\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})$	6	$3\cdot e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)$
7	$\ln(3x\cdot e^{2\sin(7x+6)})$	8	$\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\sin(7x+6)$
9	$\frac{7}{3x\cdot e^{-\frac{2}{7}\sin(7x+6)}}$	☒	$x\ln 3+\frac{2}{7}\sin(7x+6)$
11	$\frac{1}{3}-\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	12	$\frac{-7\sin(7x+6)}{e^{2\cos(7x+6)}}$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)}{14\sin(7x+6)(3+e^{2\cos(7x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
2	$\frac{-e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)}{14\sin(7x+6)(3+e^{2\cos(7x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
3	keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
4	$\ln(3x\cdot e^{-\frac{2}{7}\sin(7x+6)})$	DF: Lösung geraten
5	$\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})$	DF: Lösung geraten
6	$3\cdot e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
7	$\ln(3x\cdot e^{2\sin(7x+6)})$	DF: Lösung geraten
8	$\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	DF: $\int\ln 3 \;=\; x\ln 3$
9	$\frac{7}{3x\cdot e^{-\frac{2}{7}\sin(7x+6)}}$	DF: Lösung geraten
☒	$x\ln 3+\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	richtig
11	$\frac{1}{3}-\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	DF: $\int\ln 3 \;=\; x\ln 3$
12	$\frac{-7\sin(7x+6)}{e^{2\cos(7x+6)}}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 69 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{14x+70}{6x^2+60x+168}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n>1$, $n=1..4$ x_4 durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x)=\frac{\{2\cdot x_3\}x+\{2\cdot x_3\cdot x_1\}}{x_4x^2+\{2\cdot x_1\cdot x_4\}x+\{x_4(x_1\cdot x_1+x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5 \quad x_2=3 \quad x_3=7 \quad x_4=6$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int\frac{1}{x} \;=\; \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx &=& \int\frac{14x+70}{6x^2+60x+168}\,dx & \text{Definition}\\
&=& \frac{7}{6}\cdot\int\frac{2x+10}{x^2+10x+28}\,dx & \frac{7}{6}\text{ ausgeklammert}\\
&=& \frac{7}{6}\cdot\int\frac{g'}{g}\,dx & \text{mit } g=x^2+10x+28\\
&=& \frac{7}{6}\cdot\int\frac{1}{g}\,dg & \text{Substitutionsregel}\\
&=& \frac{7}{6}\cdot\ln|g| & \text{integriert}\\
&=& \frac{7}{6}\cdot\ln|x^2+10x+28| & \text{Rücksubstitution}\\
&=& \frac{7}{6}\cdot\ln(x^2+10x+28) & g(x)>0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R}\\
&=& \ln\sqrt[6]{(x^2+10x+28)^7} & \text{Logarithmusgesetz.}
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

- [ ] 1 $\frac{(x+5)^7}{(x+3)^6}$
- [x] $\ln \sqrt[6]{(x^2+10x+28)^7}$
- [ ] 3 keine der angegebenen Funktionen
- [ ] 4 $\ln \sqrt[6]{((x-5)(x-3))^7}$
- [ ] 5 $\frac{7}{6(x+5)} + \frac{7}{6(x+3)}$
- [ ] 6 $\frac{7}{6} \cdot \arctan_0(14x+70)$
- [ ] 7 $\frac{7x^2+70x}{2x^3+30x^2+168x}$
- [ ] 8 $\frac{7}{6} \cdot \arctan_0(x^2+10x+28)$
- [ ] 9 $\frac{7}{6} \cdot \arctan_0(\frac{x+5}{3})$
- [ ] 10 $\frac{7}{6((x+5)^2+3)}$
- [ ] 11 $\ln \sqrt[6]{(\frac{x+5}{3})^7}$
- [ ] 12 $\sqrt[6]{(\frac{\ln(x-5)}{\ln(x-3)})^7}$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{(x+5)^7}{(x+3)^6}$	DF: Lösung geraten
[x]	$\ln \sqrt[6]{(x^2+10x+28)^7}$	richtig
3	keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
4	$\ln \sqrt[6]{((x-5)(x-3))^7}$	DF: Lösung geraten
5	$\frac{7}{6(x+5)} + \frac{7}{6(x+3)}$	DF: Lösung geraten
6	$\frac{7}{6} \cdot \arctan_0(14x+70)$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
7	$\frac{7x^2+70x}{2x^3+30x^2+168x}$	DF: Zähler und Nenner integriert
8	$\frac{7}{6} \cdot \arctan_0(x^2+10x+28)$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
9	$\frac{7}{6} \cdot \arctan_0(\frac{x+5}{3})$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
10	$\frac{7}{6((x+5)^2+3)}$	DF: nicht integriert
11	$\ln \sqrt[6]{(\frac{x+5}{3})^7}$	DF: Lösung geraten
12	$\sqrt[6]{(\frac{\ln(x-5)}{\ln(x-3)})^7}$	DF: Lösung geraten

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu