Blatt Nr 15.06

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 36 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot \frac{(-1)^n (6 \cdot x)^{2(n-2)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n (x_2 \cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 2$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot \frac{(-1)^n (6 \cdot x)^{2(n-2)}}{(2n)!} \\ &= 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6 \cdot x)^{2(n-2)}}{(2n)!} \\ &= 6 \cdot (6 \cdot x)^{-4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6 \cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{6}{(6 \cdot x)^4} \cdot \cos(6 \cdot x) . \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand ($n = 0$) heißt $6 \cdot \frac{(6 \cdot x)^{-4}}{(0)!} = \frac{6}{(6 \cdot x)^4}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

1 $6 \cdot \sin(6x - 2)$	2 $\frac{6}{(6 \cdot x)^4} \cdot e^{(6x)}$	3 $\frac{6}{6} \cdot e^{-2x}$	4 $\frac{6}{(6 \cdot x)^4} \cdot \cos(6x)$
5 $6 \cdot (\cos(6x))^{-2}$	☒ T ist keine Taylorreihe	7 $6 \cdot \cos(6x - 2)$	8 $6 \cdot e^{(6x-2)}$
9 $6 \cdot \left(e^{6x}\right)^{-2}$	10 $\frac{6}{6} \cdot (\cos x)^{-2}$	11 $6 \cdot (\sin(6x))^{-2}$	12 $\frac{6}{6} \cdot (\sin x)^{-2}$

Fehlerinterpretation:

1 $6 \cdot \sin(6x - 2)$	DF: falscher Ansatz
2 $\frac{6}{(6 \cdot x)^4} \cdot e^{(6x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
3 $\frac{6}{6} \cdot e^{-2x}$	DF: falscher Ansatz
4 $\frac{6}{(6 \cdot x)^4} \cdot \cos(6x)$	DF: fast richtig
5 $6 \cdot (\cos(6x))^{-2}$	DF: falscher Ansatz
☒ T ist keine Taylorreihe	richtig
7 $6 \cdot \cos(6x - 2)$	DF: falscher Ansatz
8 $6 \cdot e^{(6x-2)}$	DF: falscher Ansatz
9 $6 \cdot \left(e^{6x}\right)^{-2}$	DF: falscher Ansatz
10 $\frac{6}{6} \cdot (\cos x)^{-2}$	DF: falscher Ansatz
11 $6 \cdot (\sin(6x))^{-2}$	DF: falscher Ansatz
12 $\frac{6}{6} \cdot (\sin x)^{-2}$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 41 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{10x+30}{6x^2+36x+66}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1, \;\; n = 1..4 \quad x_4$ durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{\{2 \cdot x_3\}x + \{2 \cdot x_3 \cdot x_1\}}{x_4 x^2 + \{2 \cdot x_1 \cdot x_4\}x + \{x_4(x_1 \cdot x_1 + x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int \frac{1}{x} \; = \; \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$
\begin{array}{rcll}
\int f(x)\; dx & = & \int \frac{10x+30}{6x^2+36x+66}\; dx & \text{Definition} \\
 & = & \frac{5}{6} \cdot \int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}\; dx & \frac{5}{6} \text{ ausgeklammert} \\
 & = & \frac{5}{6} \cdot \int \frac{g'}{g}\; dx & \text{mit } g = x^2+6x+11 \\
 & = & \frac{5}{6} \cdot \int \frac{1}{g}\; dg & \text{Substitutionsregel} \\
 & = & \frac{5}{6} \cdot \ln|g| & \text{integriert} \\
 & = & \frac{5}{6} \cdot \ln|x^2+6x+11| & \text{Rücksubstitution} \\
 & = & \frac{5}{6} \cdot \ln(x^2+6x+11) & g(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\
 & = & \ln \sqrt[6]{(x^2+6x+11)^5} & \text{Logarithmusgesetz.}
\end{array}
$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{5x^2+30x}{2x^3+18x^2+66x}$	2 $\frac{5}{6} \cdot \arctan_0(10x+30)$	3 $\frac{(x+3)^5}{(x+2)^6}$
4 $\frac{5}{6((x+3)^2+2)}$	5 $\sqrt[6]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-2)})^5}$	6 keine der angegebenen Funktionen
7 $\frac{5}{6} \cdot \arctan_0(x^2+6x+11)$	8 $\frac{5}{6} \cdot \arctan_0(\frac{x+3}{2})$	9 $\ln \sqrt[6]{(\frac{x+3}{2})^5}$
10 $\frac{5}{6} \cdot \ln\lvert\frac{x+3}{2}\rvert$	☒ $\ln \sqrt[6]{(x^2+6x+11)^5}$	12 $\frac{5}{6(x+3)} + \frac{5}{6(x+2)}$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{5x^2+30x}{2x^3+18x^2+66x}$	DF: Zähler und Nenner integriert
2	$\frac{5}{6} \cdot \arctan_0(10x+30)$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
3	$\frac{(x+3)^5}{(x+2)^6}$	DF: Lösung geraten
4	$\frac{5}{6((x+3)^2+2)}$	DF: nicht integriert
5	$\sqrt[6]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-2)})^5}$	DF: Lösung geraten
6	keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
7	$\frac{5}{6} \cdot \arctan_0(x^2+6x+11)$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
8	$\frac{5}{6} \cdot \arctan_0(\frac{x+3}{2})$	DF: $\int \frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
9	$\ln \sqrt[6]{(\frac{x+3}{2})^5}$	DF: Lösung geraten
10	$\frac{5}{6} \cdot \ln\lvert\frac{x+3}{2}\rvert$	DF: Lösung geraten
☒	$\ln \sqrt[6]{(x^2+6x+11)^5}$	richtig
12	$\frac{5}{6(x+3)} + \frac{5}{6(x+2)}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 47 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -7 \cdot \frac{(-2 \cdot x)^{n+3}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1 \cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 7$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -7 und $(-2x)^3$ aus und substituieren Sie dann $u = -2x$.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{n=0}^{\infty} -7 \cdot \frac{(-2 \cdot x)^{n+3}}{n!} & = & -7 \sum_{n=0}^{\infty} (-2 \cdot x)^3 \cdot \frac{(-2 \cdot x)^n}{n!} & -7 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\
& = & -7(-2 \cdot x)^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2 \cdot x)^n}{n!} & (-2 \cdot x)^3 \text{ausgeklammert} \\
& = & -7(-2 \cdot x)^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -2 \cdot x \\
& = & -7(-2 \cdot x)^3 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \\
& = & -7(-2 \cdot x)^3 \cdot e^{-2 \cdot x} & u = -2 \cdot x
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1] T ist keine Taylorreihe	[X] $-7(-2 \cdot x)^3 \cdot e^{-2 \cdot x}$	[3] $-7\sin(-2x+3)$	[4] $-7\cos(-2x)^3$
[5] $-7e^{-2x+3}$	[6] $-7(e^{-2x})^3$	[7] $-7(-2 \cdot x)^3 \sin(-2x)$	[8] $-7\sin(-2x)^3$
[9] $-7\cos(-2x+3)$	[10] $-7(-2 \cdot x)^3 \cos(-2x)$	[11] $14x^3 \cdot \sin x$	[12] $14x^3 \cdot \cos x$

Fehlerinterpretation:

[1]	T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
[X]	$-7(-2 \cdot x)^3 \cdot e^{-2 \cdot x}$	richtig
[3]	$-7\sin(-2x+3)$	DF: falsche Reihe verwendet
[4]	$-7\cos(-2x)^3$	DF: falsche Reihe verwendet
[5]	$-7e^{-2x+3}$	DF: falscher Ansatz
[6]	$-7(e^{-2x})^3$	DF: falscher Ansatz
[7]	$-7(-2 \cdot x)^3 \sin(-2x)$	DF: falsche Reihe verwendet
[8]	$-7\sin(-2x)^3$	DF: falsche Reihe verwendet
[9]	$-7\cos(-2x+3)$	DF: falsche Reihe verwendet
[10]	$-7(-2 \cdot x)^3 \cos(-2x)$	DF: falsche Reihe verwendet
[11]	$14x^3 \cdot \sin x$	DF: falsche Reihe verwendet
[12]	$14x^3 \cdot \cos x$	DF: falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 53 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f : (-\infty, -4] \to \mathbb{R} : \quad f(x) \quad = \quad \sqrt[8]{36x^2 + 288x + 576}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \sqrt[x_1]{\{x_2 \cdot x_2 \cdot x_4\}x^2 + \{2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\}x + \{x_3 \cdot x_3 \cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 8 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 12 \quad x_4 = 4$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
f(x) & = & \sqrt[8]{36x^2+288x+576} & \\
& = & \sqrt[8]{4(9x^2+72x+144)} & \text{4 ausgeklammert} \\
& = & \sqrt[8]{4(3x+12)^2} & \text{binomische Formel} \\
& = & \sqrt[4]{4|3x+12|} & \text{teilweise Wurzel gezogen} \\
& = & \begin{cases} \sqrt[4]{12x+48} & \text{für } x > -4 \\ \sqrt[4]{-12x-48} & \text{für } x \le -4 \end{cases} & \text{Betrag aufgelöst.}
\end{array}$$

Damit gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx & = & \int \sqrt[4]{4|3x+12|}\ dx & \\
& = & \int |4(3x+12)|^{\frac{1}{4}}\ dx & \\
& = & \begin{cases} \int (12x+48)^{\frac{1}{4}}\ dx & \text{für } x > -4 \\ \int (-12x-48)^{\frac{1}{4}}\ dx & \text{für } x \le -4 \end{cases} & \text{Betrag aufgelöst} \\
& = & \begin{cases} \frac{4}{5\cdot 12}(12x+48)^{\frac{5}{4}} & \text{für } x > -4 \\ -\frac{4}{5\cdot 12}(-12x-48)^{\frac{5}{4}} & \text{für } x \le -4 \end{cases} & \text{integriert.}
\end{array}$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -4]$ ist $\displaystyle\int \sqrt[8]{36x^2+288x+576}\,dx = -\frac{1}{15}(-12x-48)^{\frac{5}{4}}$

Angebotene Lösungen:

☒ $-\frac{1}{15}(-12x-48)^{\frac{5}{4}}$	2 $\frac{4}{5}(12x+48)^{\frac{5}{4}}$	3 $\frac{1}{15}(12x+48)^{\frac{5}{4}}$	4 $16\cdot\arcsin(-12-3x)$
5 es gibt keine	6 $-\frac{4\sqrt[8]{12+3x}}{3}$	7 $-\frac{4}{5}(12x+48)^{\frac{5}{4}}$	8 $\frac{4\sqrt[8]{-12-3x}}{3}$
9 $-\frac{4}{5}(-12x-48)^{\frac{5}{4}}$	10 $-\frac{4\sqrt[8]{-12-3x}}{3}$	11 $\frac{4\sqrt[8]{12+3x}}{3}$	12 $-16\cdot\arcsin(12+3x)$

Fehlerinterpretation:

☒	$-\frac{1}{15}(-12x-48)^{\frac{5}{4}}$	richtig
2	$\frac{4}{5}(12x+48)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen
3	$\frac{1}{15}(12x+48)^{\frac{5}{4}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
4	$16\cdot\arcsin(-12-3x)$	DF: Lösung geraten
5	es gibt keine	DF: doch f ist definiert und integrierbar
6	$-\frac{4\sqrt[8]{12+3x}}{3}$	DF: Lösung geraten
7	$-\frac{4}{5}(12x+48)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen
8	$\frac{4\sqrt[8]{-12-3x}}{3}$	DF: Lösung geraten
9	$-\frac{4}{5}(-12x-48)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen
10	$-\frac{4\sqrt[8]{-12-3x}}{3}$	DF: Lösung geraten
11	$\frac{4\sqrt[8]{12+3x}}{3}$	DF: Lösung geraten
12	$-16\cdot\arcsin(12+3x)$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 57 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} 5\cdot\frac{(3x)^n}{(n-4)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2 \cdot \frac{(x_3 x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 3$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n - 4$ oder $n = k + 4$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{n=\infty} 5 \cdot \frac{(3x)^n}{(n-4)!} &= \sum_{k+4=5}^{k+4=\infty} 5 \cdot \frac{(3x)^{k+4}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n-4 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-4} 5 \cdot (3x)^4 \cdot \frac{(3x)^k}{k!} \\
&= 5 \cdot (3x)^4 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(3x)^k}{k!} && 5 \cdot (3x)^4 \text{ausgeklammert und } \infty - 4 = \infty \\
&= 405\, x^4 \cdot (e^{3x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1 : \textstyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 T ist keine Taylorreihe	2 $5 \cdot (\cos(3x-4) - 1)$	☒ $405\, x^4 \cdot (e^{3x} - 1)$	4 $5 \cdot e^{3x} - e^4$
5 $5 \cdot e^{3x-4}$	6 $5 \cdot (\ln(3x-4) - 1)$	7 $5 \cdot (e^{3x-4} - 1)$	8 $5 \cdot \tan(3x-4)$
9 $405\, x^4 \cdot e^{3x}$	10 $5 \cdot (e^{3x} - e^4 - 1)$	11 $5 \cdot \sin(3x-4)$	12 $\frac{5}{81x^4} \cdot (e^{3x} - 1)$

Fehlerinterpretation:

1	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
2	$5 \cdot (\cos(3x-4) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
☒	$405\, x^4 \cdot (e^{3x} - 1)$	richtig
4	$5 \cdot e^{3x} - e^4$	DF: falscher Ansatz
5	$5 \cdot e^{3x-4}$	DF: falscher Ansatz
6	$5 \cdot (\ln(3x-4) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
7	$5 \cdot (e^{3x-4} - 1)$	DF: falscher Ansatz
8	$5 \cdot \tan(3x-4)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
9	$405\, x^4 \cdot e^{3x}$	DF: Die Reihe beginnt bei 1
10	$5 \cdot (e^{3x} - e^4 - 1)$	DF: falscher Ansatz
11	$5 \cdot \sin(3x-4)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
12	$\frac{5}{81x^4} \cdot (e^{3x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 77 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(3 \cdot e^{2\cos(7x+6)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2 \cos(x_3 x + x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $\quad x_2 = 2$ $\quad x_3 = 7$ $\quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b)$ und $\ln e^x = x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int \ln(3 \cdot e^{2\cos(7x+6)})\, dx &= \int \ln 3 + \ln e^{2\cos(7x+6)})\, dx && \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b) \\
&= \int \ln 3 + 2\cos(7x+6)\, dx && \ln e^x = x \\
&= x \ln 3 + \tfrac{2}{7} \sin(7x+6) && \int \cos(ax+b)\, dx = \tfrac{\sin(ax+b)}{a} \text{ und } \int c\, dx = c\, x
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1	f ist nicht integrierbar	2	$\frac{7}{3x\cdot e^{-\frac{2}{7}\sin(7x+6)}}$
3	$x\ln 3-\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	4	$\frac{e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)}{14\sin(7x+6)(3+e^{2\cos(7x+6)})}$
5	$\ln(3x\cdot e^{2\sin(7x+6)})$	6	$3\cdot e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)$
7	$\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	8	$\frac{-e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)}{14\sin(7x+6)(3+e^{2\cos(7x+6)})}$
9	$\frac{-7\sin(7x+6)}{e^{2\cos(7x+6)}}$	10	$\frac{1}{3}-\frac{2}{7}\sin(7x+6)$
11	keine der angegebenen Funktionen	☒	$x\ln 3+\frac{2}{7}\sin(7x+6)$

Fehlerinterpretation:

1	f ist nicht integrierbar	DF: Lösung geraten
2	$\frac{7}{3x\cdot e^{-\frac{2}{7}\sin(7x+6)}}$	DF: Lösung geraten
3	$x\ln 3-\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	DF: $\int\cos x \;=\; \sin x$
4	$\frac{e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)}{14\sin(7x+6)(3+e^{2\cos(7x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
5	$\ln(3x\cdot e^{2\sin(7x+6)})$	DF: Lösung geraten
6	$3\cdot e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
7	$\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	DF: $\int\ln 3 \;=\; x\ln 3$
8	$\frac{-e^{2\cos(7x+6)}(\ln(3\cdot e^{2\cos(7x+6)})-1)}{14\sin(7x+6)(3+e^{2\cos(7x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
9	$\frac{-7\sin(7x+6)}{e^{2\cos(7x+6)}}$	DF: Lösung geraten
10	$\frac{1}{3}-\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	DF: $\int\ln 3 \;=\; x\ln 3$
11	keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
☒	$x\ln 3+\frac{2}{7}\sin(7x+6)$	richtig

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 86 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}5\cdot\frac{(2x+8)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x=0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x=0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x=0$).

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_2 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1\cdot\frac{(x_2\,x+\{x_2\cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=5 \quad x_2=2 \quad x_3=4$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}5\cdot\frac{(2x+8)^n}{n!} \;=\; 5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+8)^n}{n!} \;=\; 5\cdot e^{2x+8}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$.

$$\begin{aligned}(5\cdot e^{2x+8})'\Big|_{x=0} &= 5\cdot 2e^{2x+8}\Big|_{x=0} &&= 5\cdot 2e^8\\ (5\cdot e^{2x+8})''\Big|_{x=0} &= 5\cdot 2^2e^{2x+8}\Big|_{x=0} &&= 5\cdot 2^2e^8\\ (5\cdot e^{2x+8})^{(n)}\Big|_{x=0} &= 5\cdot 2^ne^{2x+8}\Big|_{x=0} &&= 5\cdot 2^ne^8.\end{aligned}$$

Damit ist $a_n=5\cdot 2^ne^8$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty}5\cdot 2^ne^8\cdot\frac{x^n}{n!} \;=\; 5\cdot e^8\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\;.$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$5 \cdot e^{2x+8} \quad = \quad 5 \cdot e^8 \cdot e^{2x} \quad = \quad 5 \cdot e^8 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \;.$$

Angebotene Lösungen:

[1] $5 \cdot e^{16} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	[2] $5 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$	[3] $5 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$
[4] $5 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$	[5] $5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+8)^n}{n!}$	[6] $5 \cdot e^{2x+8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
[7] T ist keine Taylorreihe	[8] $5 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8x)^n}{n!}$	[9] $5 \cdot e^{2x+8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!}$
[10] $5 \cdot e^{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	[X] $5 \cdot e^{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$	[12] $5 \cdot e^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-8)^n}{n!}$

Fehlerinterpretation:

[1] $5 \cdot e^{16} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
[2] $5 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
[3] $5 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
[4] $5 \cdot e^{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
[5] $5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+8)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
[6] $5 \cdot e^{2x+8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten
[7] T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
[8] $5 \cdot e^{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
[9] $5 \cdot e^{2x+8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!}$	DF: Lösung geraten
[10] $5 \cdot e^{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
[X] $5 \cdot e^{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$	richtig
[12] $5 \cdot e^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-8)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 107 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 6n \cdot (2x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2 =$ Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n \cdot (x_2 x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \qquad x_2 = 2$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} 6n \cdot (2x)^{n-1} \quad = \quad 6 \sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot (2x)^{n-1} \quad = \quad 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2} \quad = \quad 6 \left(\frac{1}{1-2x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$6 \left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (2x)^{n-1} \right)' \quad = \quad 6 \left((\frac{1}{1-2x} - 1) \cdot \frac{1}{2} \right)' \quad = \quad 6 \frac{2}{(1-2x)^2} \cdot \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{6}{(1-2x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-\frac{6}{(1-x)^2}$	2 $-\frac{6}{(1-2x)^2}$	3 $\frac{12}{(1-2x)}$	4 $\frac{12}{(1-x)^2}$
5 $\frac{6}{2(1-2x)^2}$	6 $\frac{12}{(1-x)}$	7 $\frac{12}{(1-2x)^2}$	8 $6\ln(1-2x)$
9 $\frac{6}{\ln(1-2x)}$	☒ $\frac{6}{(1-2x)^2}$	11 Es gibt keine	12 $\frac{6}{(1-x)}$

Fehlerinterpretation:

1	$-\frac{6}{(1-x)^2}$	DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden
2	$-\frac{6}{(1-2x)^2}$	DF: Falsches Vorzeichen
3	$\frac{12}{(1-2x)}$	DF: Innere Ableitung vergessen
4	$\frac{12}{(1-x)^2}$	DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden
5	$\frac{6}{2(1-2x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
6	$\frac{12}{(1-x)}$	DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden
7	$\frac{12}{(1-2x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
8	$6\ln(1-2x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
9	$\frac{6}{\ln(1-2x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet
☒	$\frac{6}{(1-2x)^2}$	richtig
11	Es gibt keine	DF: Doch
12	$\frac{6}{(1-x)}$	DF: 2 kann nicht ausgeklammert werden

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 108 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{6}{x-4} - \frac{8}{x+6}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6$ $x_2 = 4$ $x_3 = 8$ $x_4 = 6$.

Erklärung:

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int \frac{6}{x-4} - \frac{8}{x+6}\,dx & = & 6\int \frac{1}{x-4}\,dx - 8\int \frac{1}{x+6}\,dx & \text{Integration ist linear} \\
& = & 6\ln|x-4| - 8\ln|x+6| & \int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \\
& = & \ln|x-4|^6 - \ln|x+6|^8 & a\ln b = \ln b^a \\
& = & \ln\left|\frac{(x-4)^6}{(x+6)^8}\right| & \ln(a/b) = \ln a - \ln b
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\ln\left\|\frac{6(x-4)}{8(x+6)}\right\|$	2 $\frac{-6}{(x-4)^2} + \frac{8}{(x+6)^2}$	3 $\left(\sqrt[8]{(x-4)-(x+6)}\right)^6$
4 $\ln\left\|\frac{x-4}{x+6}\right\|^{\frac{6}{8}}$	5 $\frac{1}{(x-4)^6} - \frac{1}{(x+6)^8}$	6 $\sqrt{6(x-4)-8(x+6)}$
7 $\ln\|6(x-4)-8(x+6)\|$	8 $\frac{1}{\ln\|x-4\|^6 - \ln\|x+6\|^8}$	9 $\frac{12x}{x^2-8x} - \frac{16x}{x^2+12x}$
☒ $\ln\left\|\frac{(x-4)^6}{(x+6)^8}\right\|$	11 $\ln\left\|\frac{x-4}{x+6}\right\|^{-2}$	12 $\frac{\ln\|x-4\|^6}{\ln\|x+6\|^8}$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$	$\ln\left\lvert\frac{6(x-4)}{8(x+6)}\right\rvert$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxed{2}$	$\frac{-6}{(x-4)^2}+\frac{8}{(x+6)^2}$	DF: abgeleitet
$\boxed{3}$	$\left(\sqrt[8]{(x-4)-(x+6)}\right)^6$	DF: Lösung geraten
$\boxed{4}$	$\ln\left\lvert\frac{x-4}{x+6}\right\rvert^{\frac{6}{8}}$	DF: Potenzgesetze falsch
$\boxed{5}$	$\frac{1}{(x-4)^6}-\frac{1}{(x+6)^8}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{6}$	$\sqrt{6(x-4)-8(x+6)}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{7}$	$\ln\lvert 6(x-4)-8(x+6)\rvert$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxed{8}$	$\frac{1}{\ln\lvert x-4\rvert^6-\ln\lvert x+6\rvert^8}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxed{9}$	$\frac{12x}{x^2-8x}-\frac{16x}{x^2+12x}$	DF: Quotient nicht beachtet
$\boxtimes$	$\ln\left\lvert\frac{(x-4)^6}{(x+6)^8}\right\rvert$	richtig
$\boxed{11}$	$\ln\left\lvert\frac{x-4}{x+6}\right\rvert^{-2}$	DF: Potenzgesetze falsch
$\boxed{12}$	$\frac{\ln\lvert x-4\rvert^6}{\ln\lvert x+6\rvert^8}$	DF: Logarithmusgesetze falsch

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu