Blatt Nr 15.07

Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 1 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot \frac{(-1)^n (7\cdot x)^{2(n-7)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n (x_2\cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 7$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot \frac{(-1)^n (7\cdot x)^{2(n-7)}}{(2n)!} \\ &= 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (7\cdot x)^{2(n-7)}}{(2n)!} \\ &= 6 \cdot (7\cdot x)^{-14} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (7\cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{6}{(7\cdot x)^{14}} \cdot \cos(7\cdot x)\ . \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand ($n = 0$) heißt $6 \cdot \frac{(7\cdot x)^{-14}}{(0)!} = \frac{6}{(7\cdot x)^{14}}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{6}{(7\cdot x)^{14}} \cdot \cos(7x)$	2 $\frac{6}{7} \cdot (\cos x)^{-7}$	3 $6 \cdot (\sin(7x))^{-7}$	4 $6 \cdot (\cos(7x))^{-7}$
☒ T ist keine Taylorreihe	6 $\frac{6}{(7\cdot x)^{14}} \cdot e^{(7x)}$	7 $6 \cdot \left(e^{7x}\right)^{-7}$	8 $6 \cdot \cos(7x - 7)$
9 $\frac{6}{(7\cdot x)^{14}} \cdot \sin(7x)$	10 $6 \cdot \sin(7x - 7)$	11 $\frac{6}{7} \cdot (\sin x)^{-7}$	12 $6 \cdot e^{(7x-7)}$

Fehlerinterpretation:

1 $\frac{6}{(7\cdot x)^{14}} \cdot \cos(7x)$	DF: fast richtig
2 $\frac{6}{7} \cdot (\cos x)^{-7}$	DF: falscher Ansatz
3 $6 \cdot (\sin(7x))^{-7}$	DF: falscher Ansatz
4 $6 \cdot (\cos(7x))^{-7}$	DF: falscher Ansatz
☒ T ist keine Taylorreihe	richtig
6 $\frac{6}{(7\cdot x)^{14}} \cdot e^{(7x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
7 $6 \cdot \left(e^{7x}\right)^{-7}$	DF: falscher Ansatz
8 $6 \cdot \cos(7x - 7)$	DF: falscher Ansatz
9 $\frac{6}{(7\cdot x)^{14}} \cdot \sin(7x)$	DF: falsche Reihe verwendet
10 $6 \cdot \sin(7x - 7)$	DF: falscher Ansatz
11 $\frac{6}{7} \cdot (\sin x)^{-7}$	DF: falscher Ansatz
12 $6 \cdot e^{(7x-7)}$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 4 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(2 \cdot e^{3\cos(11x+12)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2 \cos(x_3 x + x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 11 \quad x_4 = 12$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b)$ und $\ln e^x = x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int \ln(2 \cdot e^{3\cos(11x+12)})\, dx & = & \int \ln 2 + \ln e^{3\cos(11x+12)})\, dx & \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b) \\
& = & \int \ln 2 + 3\cos(11x+12)\, dx & \ln e^x = x \\
& = & x \ln 2 + \frac{3}{11}\sin(11x+12) & \int \cos(ax+b)\, dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} \text{ und } \int c\, dx = c\,x
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\frac{-11\sin(11x+12)}{e^{3\cos(11x+12)}}$	[2] $\frac{-e^{3\cos(11x+12)}(\ln(2\cdot e^{3\cos(11x+12)})-1)}{33\sin(11x+12)(2+e^{3\cos(11x+12)})}$
[3] $x\ln 2 - \frac{3}{11}\sin(11x+12)$	[X] $x\ln 2 + \frac{3}{11}\sin(11x+12)$
[5] $\ln(2x \cdot e^{3\sin(11x+12)})$	[6] $\frac{33\sin(11x+12)}{2+e^{3\cos(11x+12)}}$
[7] f ist nicht integrierbar	[8] $\ln(2 \cdot e^{3\cos(11x+12)})$
[9] $\frac{1}{2} - \frac{3}{11}\sin(11x+12)$	[10] $\frac{11}{2x \cdot e^{-\frac{3}{11}\sin(11x+12)}}$
[11] keine der angegebenen Funktionen	[12] $\ln(2x \cdot e^{-\frac{3}{11}\sin(11x+12)})$

Fehlerinterpretation:

[1] $\frac{-11\sin(11x+12)}{e^{3\cos(11x+12)}}$	DF: Lösung geraten
[2] $\frac{-e^{3\cos(11x+12)}(\ln(2\cdot e^{3\cos(11x+12)})-1)}{33\sin(11x+12)(2+e^{3\cos(11x+12)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
[3] $x\ln 2 - \frac{3}{11}\sin(11x+12)$	DF: $\int \cos x = \sin x$
[X] $x\ln 2 + \frac{3}{11}\sin(11x+12)$	richtig
[5] $\ln(2x \cdot e^{3\sin(11x+12)})$	DF: Lösung geraten
[6] $\frac{33\sin(11x+12)}{2+e^{3\cos(11x+12)}}$	DF: Lösung geraten
[7] f ist nicht integrierbar	DF: Lösung geraten
[8] $\ln(2 \cdot e^{3\cos(11x+12)})$	DF: Lösung geraten
[9] $\frac{1}{2} - \frac{3}{11}\sin(11x+12)$	DF: $\int \ln 2 = x\ln 2$
[10] $\frac{11}{2x \cdot e^{-\frac{3}{11}\sin(11x+12)}}$	DF: Lösung geraten
[11] keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
[12] $\ln(2x \cdot e^{-\frac{3}{11}\sin(11x+12)})$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 44 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -2 \cdot \frac{(-3 \cdot x)^{n+6}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1 \cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 2$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -2 und $(-3x)^6$ aus und substituieren Sie dann $u = -3x$.

Rechnung:

$$\begin{array}{lcll} \sum_{n=0}^{\infty} -2 \cdot \frac{(-3 \cdot x)^{n+6}}{n!} & = & -2\sum_{n=0}^{\infty}(-3 \cdot x)^6 \cdot \frac{(-3 \cdot x)^n}{n!} & -2 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\ & = & -2(-3 \cdot x)^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3 \cdot x)^n}{n!} & (-3 \cdot x)^6 \text{ausgeklammert} \\ & = & -2(-3 \cdot x)^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -3 \cdot x \\ & = & -2(-3 \cdot x)^6 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \\ & = & -2(-3 \cdot x)^6 \cdot e^{-3 \cdot x} & u = -3 \cdot x \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-2(-3 \cdot x)^6 \sin(-3x)$	2 $6x^6 \cdot \cos x$	3 $-2\cos(-3x)^6$	☒ $-2(-3 \cdot x)^6 \cdot e^{-3 \cdot x}$
5 T ist keine Taylorreihe	6 $-2\sin(-3x+6)$	7 $-2x^6 \cdot e^{-3 \cdot x}$	8 $-2\sin(-3x)^6$
9 $-2e^{-3x+6}$	10 $-2(e^{-3x})^6$	11 Es gibt keine	12 $-2(-3 \cdot x)^6 \cos(-3x)$

Fehlerinterpretation:

1	$-2(-3 \cdot x)^6 \sin(-3x)$	DF: falsche Reihe verwendet
2	$6x^6 \cdot \cos x$	DF: falsche Reihe verwendet
3	$-2\cos(-3x)^6$	DF: falsche Reihe verwendet
☒	$-2(-3 \cdot x)^6 \cdot e^{-3 \cdot x}$	richtig
5	T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
6	$-2\sin(-3x+6)$	DF: falsche Reihe verwendet
7	$-2x^6 \cdot e^{-3 \cdot x}$	DF: -3 hätte beim x ausgeklammert werden müssen
8	$-2\sin(-3x)^6$	DF: falsche Reihe verwendet
9	$-2e^{-3x+6}$	DF: falscher Ansatz
10	$-2(e^{-3x})^6$	DF: falscher Ansatz
11	Es gibt keine	DF: Doch
12	$-2(-3 \cdot x)^6 \cos(-3x)$	DF: falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 46 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f: (-\infty, -6] \rightarrow \mathbb{R}: \quad f(x) = \sqrt[4]{48x^2 + 576x + 1728}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \sqrt[x_1]{\{x_2 \cdot x_2 \cdot x_4\}x^2 + \{2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\}x + \{x_3 \cdot x_3 \cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 24 \quad x_4 = 3$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[4]{48x^2+576x+1728} && \\
&= \sqrt[4]{3(16x^2+192x+576)} && \text{3 ausgeklammert} \\
&= \sqrt[4]{3(4x+24)^2} && \text{binomische Formel} \\
&= \sqrt[2]{3|4x+24|} && \text{teilweise Wurzel gezogen} \\
&= \begin{cases} \sqrt[2]{12x+72} & \text{für } x > -6 \\ \sqrt[2]{-12x-72} & \text{für } x \le -6 \end{cases} && \text{Betrag aufgelöst.}
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \sqrt[2]{3|4x+24|}\;dx && \\
&= \int |3(4x+24)|^{\frac{1}{2}}\;dx && \\
&= \begin{cases} \int (12x+72)^{\frac{1}{2}}\,dx & \text{für } x > -6 \\ \int (-12x-72)^{\frac{1}{2}}\,dx & \text{für } x \le -6 \end{cases} && \text{Betrag aufgelöst} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{3\cdot 12}(12x+72)^{\frac{3}{2}} & \text{für } x > -6 \\ -\frac{2}{3\cdot 12}(-12x-72)^{\frac{3}{2}} & \text{für } x \le -6 \end{cases} && \text{integriert.}
\end{aligned}
$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -6]$ ist $\displaystyle\int \sqrt[4]{48x^2+576x+1728}\,dx \quad = \quad -\frac{1}{18}(-12x-72)^{\frac{3}{2}}$

Angebotene Lösungen:

[1] $\frac{3\sqrt[4]{24+4x}}{4}$	[2] $\frac{3\sqrt[4]{-24-4x}}{4}$	[3] $-\frac{2}{3}(-12x-72)^{\frac{3}{2}}$	[4] $18 \cdot \arcsin\,(24+4x)$
[5] $-\frac{2}{3}(12x+72)^{\frac{3}{2}}$	[6] $\frac{1}{18}(12x+72)^{\frac{3}{2}}$	[7] $-\frac{1}{18}(12x+72)^{\frac{3}{2}}$	[8] es gibt keine
[9] $18 \cdot \arcsin\,(-24-4x)$	[10] $-\frac{3\sqrt[4]{-24-4x}}{4}$	[X] $-\frac{1}{18}(-12x-72)^{\frac{3}{2}}$	[12] $-\frac{3\sqrt[4]{24+4x}}{4}$

Fehlerinterpretation:

[1]	$\frac{3\sqrt[4]{24+4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
[2]	$\frac{3\sqrt[4]{-24-4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
[3]	$-\frac{2}{3}(-12x-72)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen
[4]	$18 \cdot \arcsin\,(24+4x)$	DF: Lösung geraten
[5]	$-\frac{2}{3}(12x+72)^{\frac{3}{2}}$	DF: innere Ableitung vergessen
[6]	$\frac{1}{18}(12x+72)^{\frac{3}{2}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
[7]	$-\frac{1}{18}(12x+72)^{\frac{3}{2}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
[8]	es gibt keine	DF: doch f ist definiert und integrierbar
[9]	$18 \cdot \arcsin\,(-24-4x)$	DF: Lösung geraten
[10]	$-\frac{3\sqrt[4]{-24-4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
[X]	$-\frac{1}{18}(-12x-72)^{\frac{3}{2}}$	richtig
[12]	$-\frac{3\sqrt[4]{24+4x}}{4}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 54 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 6 \cdot \frac{(3x)^n}{(n-2)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2 \cdot \frac{(x_3 x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 3$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n - 2$ oder $n = k + 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{n=\infty} 6 \cdot \frac{(3x)^n}{(n-2)!} &= \sum_{k+2=3}^{k+2=\infty} 6 \cdot \frac{(3x)^{k+2}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n-2 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-2} 6 \cdot (3x)^2 \cdot \frac{(3x)^k}{k!} \\
&= 6 \cdot (3x)^2 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(3x)^k}{k!} && 6 \cdot (3x)^2 \text{ausgeklammert und } \infty - 2 = \infty \\
&= 54\,x^2 \cdot (e^{3x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1: \textstyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $6 \cdot e^{3x-2}$	2 $6 \cdot \sin(3x-2)$	3 $6 \cdot e^{3x} - e^2$	4 $6 \cdot (\cos(3x-2) - 1)$
5 $\frac{6}{9x^2} \cdot (e^{3x} - 1)$	6 $54\,x^2 \cdot e^{3x}$	7 $6 \cdot (e^{3x} - e^2 - 1)$	8 $6 \cdot (\ln(3x-2) - 1)$
9 T ist keine Taylorreihe	☒ $54\,x^2 \cdot (e^{3x} - 1)$	11 $\frac{6}{9x^2} \cdot e^{3x}$	12 $6 \cdot \tan(3x-2)$

Fehlerinterpretation:

1	$6 \cdot e^{3x-2}$	DF: falscher Ansatz
2	$6 \cdot \sin(3x-2)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
3	$6 \cdot e^{3x} - e^2$	DF: falscher Ansatz
4	$6 \cdot (\cos(3x-2) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
5	$\frac{6}{9x^2} \cdot (e^{3x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern
6	$54\,x^2 \cdot e^{3x}$	DF: Die Reihe beginnt bei 1
7	$6 \cdot (e^{3x} - e^2 - 1)$	DF: falscher Ansatz
8	$6 \cdot (\ln(3x-2) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
9	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
☒	$54\,x^2 \cdot (e^{3x} - 1)$	richtig
11	$\frac{6}{9x^2} \cdot e^{3x}$	DF: Fehler beim Ausklammern
12	$6 \cdot \tan(3x-2)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 71 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(4x+12)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x = 0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x = 0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x = 0$).

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_2 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(x_2\,x + \{x_2 \cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 4 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 3$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{(4x+12)^n}{n!} = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+12)^n}{n!} = 4 \cdot e^{4x+12}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $4x+12=0 \Leftrightarrow x=-3$.

$$\begin{array}{rcccl}
(4\cdot e^{4x+12})'\Big|_{x=0} &=& 4\cdot 4e^{4x+12}\Big|_{x=0} &=& 4\cdot 4e^{12}\\
(4\cdot e^{4x+12})''\Big|_{x=0} &=& 4\cdot 4^2e^{4x+12}\Big|_{x=0} &=& 4\cdot 4^2e^{12}\\
(4\cdot e^{4x+12})^{(n)}\Big|_{x=0} &=& 4\cdot 4^ne^{4x+12}\Big|_{x=0} &=& 4\cdot 4^ne^{12}.
\end{array}$$

Damit ist $a_n = 4\cdot 4^n e^{12}$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4\cdot 4^n e^{12}\cdot \frac{x^n}{n!} \quad = \quad 4\cdot e^{12}\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}\ .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$4\cdot e^{4x+12} \quad = \quad 4\cdot e^{12}\cdot e^{4x} \quad = \quad 4\cdot e^{12}\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}\ .$$

Angebotene Lösungen:

1 $4\cdot e^{4x+12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	2 $4\cdot e^{4x+12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{(4n)!}$	☒ $4\cdot e^{12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}$
4 $4\cdot e^{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n!}$	5 T ist keine Taylorreihe	6 $4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x+12)^n}{n!}$
7 $4\cdot e^{12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	8 $4\cdot e^{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}$	9 $4\cdot e^{48}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
10 $4\cdot e^{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$	11 $4\cdot e^{-12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x-12)^n}{n!}$	12 $4\cdot e^{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(12x)^n}{n!}$

Fehlerinterpretation:

1	$4\cdot e^{4x+12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten
2	$4\cdot e^{4x+12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{(4n)!}$	DF: Lösung geraten
☒	$4\cdot e^{12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}$	richtig
4	$4\cdot e^{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x=0$
5	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
6	$4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x+12)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x=0$
7	$4\cdot e^{12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
8	$4\cdot e^{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
9	$4\cdot e^{48}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
10	$4\cdot e^{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x=0$
11	$4\cdot e^{-12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x-12)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x=0$
12	$4\cdot e^{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(12x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 88 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{10x+30}{12x^2+72x+156}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n>1,\quad n=1..4\quad x_4$ durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x)=\frac{\{2\cdot x_3\}x+\{2\cdot x_3\cdot x_1\}}{x_4x^2+\{2\cdot x_1\cdot x_4\}x+\{x_4(x_1\cdot x_1+x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=3\qquad x_2=4\qquad x_3=5\qquad x_4=12$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int\frac{1}{x}\ =\ \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$
\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx & = & \int \frac{10x+30}{12x^2+72x+156}\,dx & \text{Definition} \\
& = & \frac{5}{12}\cdot\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}\,dx & \frac{5}{12}\text{ ausgeklammert} \\
& = & \frac{5}{12}\cdot\int \frac{g'}{g}\,dx & \text{mit } g = x^2+6x+13 \\
& = & \frac{5}{12}\cdot\int \frac{1}{g}\,dg & \text{Substitutionsregel} \\
& = & \frac{5}{12}\cdot\ln|g| & \text{integriert} \\
& = & \frac{5}{12}\cdot\ln|x^2+6x+13| & \text{Rücksubstitution} \\
& = & \frac{5}{12}\cdot\ln(x^2+6x+13) & g(x)>0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R} \\
& = & \ln\sqrt[12]{(x^2+6x+13)^5} & \text{Logarithmusgesetz.}
\end{array}
$$

Angebotene Lösungen:

☒ $\ln\sqrt[12]{(x^2+6x+13)^5}$	2 $\frac{5}{12}\cdot\ln\left|\frac{x+3}{4}\right|$	3 $\frac{5}{12(x+3)}+\frac{5}{12(x+4)}$
4 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(10x+30)$	5 keine der angegebenen Funktionen	6 $\frac{5}{12((x+3)^2+4)}$
7 $\ln\sqrt[12]{((x-3)(x-4))^5}$	8 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(\frac{x+3}{4})$	9 $\sqrt[12]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-4)})^5}$
10 $\ln\sqrt[12]{(\frac{x+3}{4})^5}$	11 $\frac{5x^2+30x}{4x^3+36x^2+156x}$	12 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(x^2+6x+13)$

Fehlerinterpretation:

☒ $\ln\sqrt[12]{(x^2+6x+13)^5}$	richtig
2 $\frac{5}{12}\cdot\ln\left|\frac{x+3}{4}\right|$	DF: Lösung geraten
3 $\frac{5}{12(x+3)}+\frac{5}{12(x+4)}$	DF: Lösung geraten
4 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(10x+30)$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$
5 keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
6 $\frac{5}{12((x+3)^2+4)}$	DF: nicht integriert
7 $\ln\sqrt[12]{((x-3)(x-4))^5}$	DF: Lösung geraten
8 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(\frac{x+3}{4})$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$
9 $\sqrt[12]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-4)})^5}$	DF: Lösung geraten
10 $\ln\sqrt[12]{(\frac{x+3}{4})^5}$	DF: Lösung geraten
11 $\frac{5x^2+30x}{4x^3+36x^2+156x}$	DF: Zähler und Nenner integriert
12 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(x^2+6x+13)$	DF: $\int\frac{1}{x}\neq\arctan_0 x$

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 102 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 7n\cdot(5x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2 = Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n\cdot(x_2x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 5$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} 7n \cdot (5x)^{n-1} \quad = \quad 7\sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot (5x)^{n-1} \quad = \quad 7\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{5} \quad = \quad 7\left(\frac{1}{1-5x} - 1\right) \cdot \frac{1}{5}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$7\left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (5x)^{n-1}\right)' \quad = \quad 7\left(\left(\frac{1}{1-5x} - 1\right) \cdot \frac{1}{5}\right)' \quad = \quad 7\frac{5}{(1-5x)^2} \cdot \frac{1}{5} \quad = \quad \frac{7}{(1-5x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\frac{7}{(1-5x)}$	[2] T ist keine Taylorreihe	[3] $\frac{7}{5(1-x)^2}$	[4] $\frac{35}{(1-x)}$
[5] $\frac{7}{5(1-x)}$	[6] $\frac{7}{(1-x)^2}$	[7] $\frac{1}{\ln(1-5x)}$	[8] $-\frac{7}{(1-x)^2}$
[9] $\frac{35}{(1-x)^2}$	[10] $\frac{35}{(1-5x)}$	[11] $\ln(1-5x)$	[X] $\frac{7}{(1-5x)^2}$

Fehlerinterpretation:

[1] $\frac{7}{(1-5x)}$	DF: Ableitung vergessen
[2] T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
[3] $\frac{7}{5(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
[4] $\frac{35}{(1-x)}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
[5] $\frac{7}{5(1-x)}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
[6] $\frac{7}{(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
[7] $\frac{1}{\ln(1-5x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet
[8] $-\frac{7}{(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
[9] $\frac{35}{(1-x)^2}$	DF: 5 kann nicht ausgeklammert werden
[10] $\frac{35}{(1-5x)}$	DF: Innere Ableitung vergessen
[11] $\ln(1-5x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
[X] $\frac{7}{(1-5x)^2}$	richtig

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 103 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{3}{x-3} - \frac{5}{x+12}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3$ $x_2 = 3$ $x_3 = 5$ $x_4 = 12$.

Erklärung:

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll} \int \frac{3}{x-3} - \frac{5}{x+12}\,dx & = & 3\int \frac{1}{x-3}\,dx - 5\int \frac{1}{x+12}\,dx & \text{Integration ist linear} \\ & = & 3\ln|x-3| - 5\ln|x+12| & \int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \\ & = & \ln|x-3|^3 - \ln|x+12|^5 & a\ln b = \ln b^a \\ & = & \ln\left|\frac{(x-3)^3}{(x+12)^5}\right| & \ln(a/b) = \ln a - \ln b \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{-3}{(x-3)^2}+\frac{5}{(x+12)^2}$ ☒ $\ln\left|\frac{(x-3)^3}{(x+12)^5}\right|$ 3 $\sqrt{\frac{3(x-3)}{5(x+12)}}$

4 $\frac{1}{(x-3)^3}-\frac{1}{(x+12)^5}$ 5 $\ln\left|\frac{x-3}{x+12}\right|^{-2}$ 6 $\ln\left|\frac{x-3}{x+12}\right|^{\frac{3}{5}}$

7 $\sqrt{3(x-3)-5(x+12)}$ 8 $\frac{1}{\ln|x-3|^3-\ln|x+12|^5}$ 9 $\frac{\ln|x-3|^3}{\ln|x+12|^5}$

10 $\ln\left|\frac{3(x-3)}{5(x+12)}\right|$ 11 $\left(\sqrt[5]{(x-3)-(x+12)}\right)^3$ 12 $\ln|3(x-3)-5(x+12)|$

Fehlerinterpretation:

1	$\frac{-3}{(x-3)^2}+\frac{5}{(x+12)^2}$	DF: abgeleitet
☒	$\ln\left|\frac{(x-3)^3}{(x+12)^5}\right|$	richtig
3	$\sqrt{\frac{3(x-3)}{5(x+12)}}$	DF: Lösung geraten
4	$\frac{1}{(x-3)^3}-\frac{1}{(x+12)^5}$	DF: Lösung geraten
5	$\ln\left|\frac{x-3}{x+12}\right|^{-2}$	DF: Potenzgesetze falsch
6	$\ln\left|\frac{x-3}{x+12}\right|^{\frac{3}{5}}$	DF: Potenzgesetze falsch
7	$\sqrt{3(x-3)-5(x+12)}$	DF: Lösung geraten
8	$\frac{1}{\ln|x-3|^3-\ln|x+12|^5}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
9	$\frac{\ln|x-3|^3}{\ln|x+12|^5}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
10	$\ln\left|\frac{3(x-3)}{5(x+12)}\right|$	DF: Logarithmusgesetze falsch
11	$\left(\sqrt[5]{(x-3)-(x+12)}\right)^3$	DF: Lösung geraten
12	$\ln|3(x-3)-5(x+12)|$	DF: Logarithmusgesetze falsch

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu