Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 3 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum\limits_{n=6}^{\infty} 2 \cdot \frac{(3x)^n}{(n-5)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2 \cdot \frac{(x_3 x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n - 5$ oder $n = k + 5$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=6}^{n=\infty} 2 \cdot \frac{(3x)^n}{(n-5)!} &= \sum_{k+5=6}^{k+5=\infty} 2 \cdot \frac{(3x)^{k+5}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n-5 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-5} 2 \cdot (3x)^5 \cdot \frac{(3x)^k}{k!} \\
&= 2 \cdot (3x)^5 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(3x)^k}{k!} && 2 \cdot (3x)^5 \text{ausgeklammert und } \infty - 5 = \infty \\
&= 486\, x^5 \cdot (e^{3x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1: \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $2 \cdot (\ln(3x-5) - 1)$	2 $2 \cdot (\cos(3x-5) - 1)$	3 $\frac{2}{243x^5} \cdot e^{3x}$	4 $2 \cdot \sin(3x-5)$
5 $486\, x^5 \cdot e^{3x}$	6 T ist keine Taylorreihe	☒ $486\, x^5 \cdot (e^{3x} - 1)$	8 $2 \cdot (e^{3x-5} - 1)$
9 $2 \cdot \tan(3x-5)$	10 $2 \cdot (e^{3x} - e^5 - 1)$	11 $2 \cdot e^{3x} - e^5$	12 $\frac{2}{243x^5} \cdot (e^{3x} - 1)$

Fehlerinterpretation:

1	$2 \cdot (\ln(3x-5) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
2	$2 \cdot (\cos(3x-5) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
3	$\frac{2}{243x^5} \cdot e^{3x}$	DF: Fehler beim Ausklammern
4	$2 \cdot \sin(3x-5)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
5	$486\, x^5 \cdot e^{3x}$	DF: Die Reihe beginnt bei 1
6	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
☒	$486\, x^5 \cdot (e^{3x} - 1)$	richtig
8	$2 \cdot (e^{3x-5} - 1)$	DF: falscher Ansatz
9	$2 \cdot \tan(3x-5)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
10	$2 \cdot (e^{3x} - e^5 - 1)$	DF: falscher Ansatz
11	$2 \cdot e^{3x} - e^5$	DF: falscher Ansatz
12	$\frac{2}{243x^5} \cdot (e^{3x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 8 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(-1)^n (4 \cdot x)^{2(n-5)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n (x_2 \cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 5$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(-1)^n (4 \cdot x)^{2(n-5)}}{(2n)!} \\ &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4 \cdot x)^{2(n-5)}}{(2n)!} \\ &= 2 \cdot (4 \cdot x)^{-10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4 \cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{2}{(4 \cdot x)^{10}} \cdot \cos(4 \cdot x)\ . \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand ($n = 0$) heißt $2 \cdot \frac{(4 \cdot x)^{-10}}{(0)!} = \frac{2}{(4 \cdot x)^{10}}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

[1] $2 \cdot (\cos(4x))^{-5}$	[2] $2 \cdot \sin(4x - 5)$	[3] $\frac{2}{4} \cdot (\sin x)^{-5}$	[4] $\frac{2}{(4 \cdot x)^{10}} \cdot \cos(4x)$
[5] $\frac{2}{4} \cdot (\cos x)^{-5}$	[6] $2 \cdot e^{(4x-5)}$	[7] $\frac{2}{(4 \cdot x)^{10}} \cdot e^{(4x)}$	[8] $\frac{2}{(4 \cdot x)^{10}} \cdot \sin(4x)$
[9] $2 \cdot \left(e^{4x}\right)^{-5}$	[10] $2 \cdot (\sin(4x))^{-5}$	[X] T ist keine Taylorreihe	[12] $\frac{2}{4} \cdot e^{-5x}$

Fehlerinterpretation:

[1] $2 \cdot (\cos(4x))^{-5}$	DF: falscher Ansatz
[2] $2 \cdot \sin(4x - 5)$	DF: falscher Ansatz
[3] $\frac{2}{4} \cdot (\sin x)^{-5}$	DF: falscher Ansatz
[4] $\frac{2}{(4 \cdot x)^{10}} \cdot \cos(4x)$	DF: fast richtig
[5] $\frac{2}{4} \cdot (\cos x)^{-5}$	DF: falscher Ansatz
[6] $2 \cdot e^{(4x-5)}$	DF: falscher Ansatz
[7] $\frac{2}{(4 \cdot x)^{10}} \cdot e^{(4x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
[8] $\frac{2}{(4 \cdot x)^{10}} \cdot \sin(4x)$	DF: falsche Reihe verwendet
[9] $2 \cdot \left(e^{4x}\right)^{-5}$	DF: falscher Ansatz
[10] $2 \cdot (\sin(4x))^{-5}$	DF: falscher Ansatz
[X] T ist keine Taylorreihe	richtig
[12] $\frac{2}{4} \cdot e^{-5x}$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 15 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \frac{(7x + 35)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x = 0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x = 0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x = 0$).

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_2 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(x_2\,x+\{x_2\cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \frac{(7x+35)^n}{n!} \quad = \quad 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x+35)^n}{n!} \quad = \quad 3 \cdot e^{7x+35}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $7x + 35 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

$$\begin{array}{lclcl} (3 \cdot e^{7x+35})'\big|_{x=0} & = & 3 \cdot 7e^{7x+35}\big|_{x=0} & = & 3 \cdot 7e^{35} \\ (3 \cdot e^{7x+35})''\big|_{x=0} & = & 3 \cdot 7^2 e^{7x+35}\big|_{x=0} & = & 3 \cdot 7^2 e^{35} \\ (3 \cdot e^{7x+35})^{(n)}\big|_{x=0} & = & 3 \cdot 7^n e^{7x+35}\big|_{x=0} & = & 3 \cdot 7^n e^{35}. \end{array}$$

Damit ist $a_n = 3 \cdot 7^n e^{35}$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot 7^n e^{35} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad = \quad 3 \cdot e^{35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!} \ .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$3 \cdot e^{7x+35} \quad = \quad 3 \cdot e^{35} \cdot e^{7x} \quad = \quad 3 \cdot e^{35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!} \ .$$

Angebotene Lösungen:

[1] $3 \cdot e^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(35x)^n}{n!}$	[2] $3 \cdot e^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	[3] $3 \cdot e^{35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
[4] $3 \cdot e^{7x+35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	[5] $3 \cdot e^{245} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	[6] $3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x+35)^n}{n!}$
[7] $3 \cdot e^{7x+35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{(7n)!}$	[8] $3 \cdot e^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n!}$	[9] $3 \cdot e^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$
[10] $3 \cdot e^{-35} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x-35)^n}{n!}$	[X] $3 \cdot e^{35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	[12] T ist keine Taylorreihe

Fehlerinterpretation:

[1] $3 \cdot e^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(35x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
[2] $3 \cdot e^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
[3] $3 \cdot e^{35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
[4] $3 \cdot e^{7x+35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten
[5] $3 \cdot e^{245} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
[6] $3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x+35)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
[7] $3 \cdot e^{7x+35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{(7n)!}$	DF: Lösung geraten
[8] $3 \cdot e^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
[9] $3 \cdot e^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
[10] $3 \cdot e^{-35} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x-35)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
[X] $3 \cdot e^{35} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x)^n}{n!}$	richtig
[12] T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 17 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{10x+50}{12x^2+120x+348}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ x_4 durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{\{2\cdot x_3\}x+\{2\cdot x_3\cdot x_1\}}{x_4x^2+\{2\cdot x_1\cdot x_4\}x+\{x_4(x_1\cdot x_1+x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 12$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx & = & \int \frac{10x+50}{12x^2+120x+348}\,dx & \text{Definition} \\
 & = & \frac{5}{12}\cdot\int \frac{2x+10}{x^2+10x+29}\,dx & \frac{5}{12}\text{ ausgeklammert} \\
 & = & \frac{5}{12}\cdot\int \frac{g'}{g}\,dx & \text{mit } g = x^2+10x+29 \\
 & = & \frac{5}{12}\cdot\int \frac{1}{g}\,dg & \text{Substitutionsregel} \\
 & = & \frac{5}{12}\cdot\ln|g| & \text{integriert} \\
 & = & \frac{5}{12}\cdot\ln|x^2+10x+29| & \text{Rücksubstitution} \\
 & = & \frac{5}{12}\cdot\ln(x^2+10x+29) & g(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\
 & = & \ln\sqrt[12]{(x^2+10x+29)^5} & \text{Logarithmusgesetz.}
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{(x+5)^5}{(x+4)^{12}}$	2 keine der angegebenen Funktionen	☒ $\ln\sqrt[12]{(x^2+10x+29)^5}$
4 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(10x+50)$	5 $\frac{5x^2+50x}{4x^3+60x^2+348x}$	6 $\sqrt[12]{(\frac{\ln(x-5)}{\ln(x-4)})^5}$
7 $\frac{5}{12((x+5)^2+4)}$	8 $\frac{5}{12(x+5)}+\frac{5}{12(x+4)}$	9 $\ln\sqrt[12]{((x-5)(x-4))^5}$
10 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(x^2+10x+29)$	11 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(\frac{x+5}{4})$	12 $\ln\sqrt[12]{(\frac{x+5}{4})^5}$

Fehlerinterpretation:

1 $\frac{(x+5)^5}{(x+4)^{12}}$	DF: Lösung geraten
2 keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
☒ $\ln\sqrt[12]{(x^2+10x+29)^5}$	richtig
4 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(10x+50)$	DF: $\int\frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
5 $\frac{5x^2+50x}{4x^3+60x^2+348x}$	DF: Zähler und Nenner integriert
6 $\sqrt[12]{(\frac{\ln(x-5)}{\ln(x-4)})^5}$	DF: Lösung geraten
7 $\frac{5}{12((x+5)^2+4)}$	DF: nicht integriert
8 $\frac{5}{12(x+5)}+\frac{5}{12(x+4)}$	DF: Lösung geraten
9 $\ln\sqrt[12]{((x-5)(x-4))^5}$	DF: Lösung geraten
10 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(x^2+10x+29)$	DF: $\int\frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
11 $\frac{5}{12}\cdot\arctan_0(\frac{x+5}{4})$	DF: $\int\frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
12 $\ln\sqrt[12]{(\frac{x+5}{4})^5}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 51 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(3\cdot e^{2\cos(5x+6)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2 \cos(x_3 x + x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b)$ und $\ln e^x = x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{aligned} \int \ln(3 \cdot e^{2\cos(5x+6)})\, dx &= \int \ln 3 + \ln e^{2\cos(5x+6)})\, dx & \ln(a\cdot b) &= \ln a + \ln b) \\ &= \int \ln 3 + 2\cos(5x+6)\, dx & \ln e^x &= x \\ &= x \ln 3 + \tfrac{2}{5}\sin(5x+6) & \int \cos(ax+b)\, dx &= \tfrac{\sin(ax+b)}{a} \text{ und } \int c\, dx = c\, x \end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

1 $3 \cdot e^{2\cos(5x+6)}(\ln(3 \cdot e^{2\cos(5x+6)}) - 1)$	☒ $x \ln 3 + \frac{2}{5}\sin(5x+6)$
3 $x \ln 3 - \frac{2}{5}\sin(5x+6)$	4 $\frac{5}{3x \cdot e^{-\frac{2}{5}\sin(5x+6)}}$
5 $\frac{-e^{2\cos(5x+6)}(\ln(3 \cdot e^{2\cos(5x+6)})-1)}{10\sin(5x+6)(3+e^{2\cos(5x+6)})}$	6 $\ln(3 \cdot e^{2\cos(5x+6)})$
7 $\ln(3x \cdot e^{2\sin(5x+6)})$	8 $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\sin(5x+6)$
9 $\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\sin(5x+6)$	10 $\frac{e^{2\cos(5x+6)}(\ln(3 \cdot e^{2\cos(5x+6)})-1)}{10\sin(5x+6)(3+e^{2\cos(5x+6)})}$
11 keine der angegebenen Funktionen	12 $\frac{-5\sin(5x+6)}{e^{2\cos(5x+6)}}$

Fehlerinterpretation:

1 $3 \cdot e^{2\cos(5x+6)}(\ln(3 \cdot e^{2\cos(5x+6)}) - 1)$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
☒ $x \ln 3 + \frac{2}{5}\sin(5x+6)$	richtig
3 $x \ln 3 - \frac{2}{5}\sin(5x+6)$	DF: $\int \cos x = \sin x$
4 $\frac{5}{3x \cdot e^{-\frac{2}{5}\sin(5x+6)}}$	DF: Lösung geraten
5 $\frac{-e^{2\cos(5x+6)}(\ln(3 \cdot e^{2\cos(5x+6)})-1)}{10\sin(5x+6)(3+e^{2\cos(5x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
6 $\ln(3 \cdot e^{2\cos(5x+6)})$	DF: Lösung geraten
7 $\ln(3x \cdot e^{2\sin(5x+6)})$	DF: Lösung geraten
8 $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\sin(5x+6)$	DF: $\int \ln 3 = x \ln 3$
9 $\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\sin(5x+6)$	DF: $\int \ln 3 = x \ln 3$
10 $\frac{e^{2\cos(5x+6)}(\ln(3 \cdot e^{2\cos(5x+6)})-1)}{10\sin(5x+6)(3+e^{2\cos(5x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
11 keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
12 $\frac{-5\sin(5x+6)}{e^{2\cos(5x+6)}}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 62 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 6n \cdot (6x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2 =$ Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n \cdot (x_2 x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 6 \quad x_2 = 6$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} 6n \cdot (6x)^{n-1} \quad = \quad 6 \sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot (6x)^{n-1} \quad = \quad 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6x)^n}{6} \quad = \quad 6 \left(\frac{1}{1-6x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{6}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$6 \left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (6x)^{n-1} \right)' \quad = \quad 6 \left((\frac{1}{1-6x} - 1) \cdot \frac{1}{6} \right)' \quad = \quad 6 \frac{6}{(1-6x)^2} \cdot \frac{1}{6} \quad = \quad \frac{6}{(1-6x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{6}{(1-6x)}$	2 $\frac{6}{\ln(1-6x)}$	3 $-\frac{6}{(1-6x)^2}$	☒ $\frac{6}{(1-6x)^2}$
5 $\frac{36}{(1-x)}$	6 $-\frac{6}{6(1-x)^2}$	7 $6\ln(1-6x)$	8 $-\frac{6}{(1-x)^2}$
9 Es gibt keine	10 $\frac{36}{(1-6x)^2}$	11 T ist keine Taylorreihe	12 $\frac{36}{(1-6x)}$

Fehlerinterpretation:

1 $\frac{6}{(1-6x)}$	DF: Ableitung vergessen
2 $\frac{6}{\ln(1-6x)}$	DF: Falsche Reihe verwendet
3 $-\frac{6}{(1-6x)^2}$	DF: Falsches Vorzeichen
☒ $\frac{6}{(1-6x)^2}$	richtig
5 $\frac{36}{(1-x)}$	DF: 6 kann nicht ausgeklammert werden
6 $-\frac{6}{6(1-x)^2}$	DF: 6 kann nicht ausgeklammert werden
7 $6\ln(1-6x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
8 $-\frac{6}{(1-x)^2}$	DF: 6 kann nicht ausgeklammert werden
9 Es gibt keine	DF: Doch
10 $\frac{36}{(1-6x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
11 T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
12 $\frac{36}{(1-6x)}$	DF: Innere Ableitung vergessen

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 85 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{5}{x-3} - \frac{4}{x+6}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5$ $x_2 = 3$ $x_3 = 4$ $x_4 = 6$.

Erklärung:

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int \frac{5}{x-3} - \frac{4}{x+6}\, dx & = & 5\int \frac{1}{x-3}\, dx - 4\int \frac{1}{x+6}\, dx & \text{Integration ist linear} \\
& = & 5\ln|x-3| - 4\ln|x+6| & \int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \\
& = & \ln|x-3|^5 - \ln|x+6|^4 & a\ln b = \ln b^a \\
& = & \ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x+6)^4}\right| & \ln(a/b) = \ln a - \ln b
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

$\boxed{1}$ $\frac{1}{(x-3)^5} - \frac{1}{(x+6)^4}$	$\boxed{2}$ $\sqrt{5(x-3) - 4(x+6)}$	$\boxed{3}$ $\frac{10x}{x^2-6x} - \frac{8x}{x^2+12x}$
$\boxed{4}$ $\left(\sqrt[4]{(x-3) - (x+6)}\right)^5$	$\boxed{5}$ $\frac{1}{\ln\|x-3\|^5 - \ln\|x+6\|^4}$	$\boxed{6}$ $\ln\|5(x-3) - 4(x+6)\|$
$\boxtimes$ $\ln\left\|\frac{(x-3)^5}{(x+6)^4}\right\|$	$\boxed{8}$ $\ln\left\|\frac{x-3}{x+6}\right\|^{\frac{5}{4}}$	$\boxed{9}$ $\sqrt{\frac{5(x-3)}{4(x+6)}}$
$\boxed{10}$ $\frac{\ln\|x-3\|^5}{\ln\|x+6\|^4}$	$\boxed{11}$ $\frac{-5}{(x-3)^2} + \frac{4}{(x+6)^2}$	$\boxed{12}$ $\ln\left\|\frac{x-3}{x+6}\right\|^1$

Fehlerinterpretation:

$\boxed{1}$ $\frac{1}{(x-3)^5} - \frac{1}{(x+6)^4}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{2}$ $\sqrt{5(x-3) - 4(x+6)}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{3}$ $\frac{10x}{x^2-6x} - \frac{8x}{x^2+12x}$	DF: Quotient nicht beachtet
$\boxed{4}$ $\left(\sqrt[4]{(x-3) - (x+6)}\right)^5$	DF: Lösung geraten
$\boxed{5}$ $\frac{1}{\ln\|x-3\|^5 - \ln\|x+6\|^4}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxed{6}$ $\ln\|5(x-3) - 4(x+6)\|$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxtimes$ $\ln\left\|\frac{(x-3)^5}{(x+6)^4}\right\|$	richtig
$\boxed{8}$ $\ln\left\|\frac{x-3}{x+6}\right\|^{\frac{5}{4}}$	DF: Potenzgesetze falsch
$\boxed{9}$ $\sqrt{\frac{5(x-3)}{4(x+6)}}$	DF: Lösung geraten
$\boxed{10}$ $\frac{\ln\|x-3\|^5}{\ln\|x+6\|^4}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
$\boxed{11}$ $\frac{-5}{(x-3)^2} + \frac{4}{(x+6)^2}$	DF: abgeleitet
$\boxed{12}$ $\ln\left\|\frac{x-3}{x+6}\right\|^1$	DF: Potenzgesetze falsch

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 108 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f:\ (-\infty, -4] \ \to\ \mathbb{R}: \quad f(x) \quad = \quad \sqrt[8]{80x^2 + 640x + 1280}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ $x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \sqrt[x_1]{\{x_2 \cdot x_2 \cdot x_4\}x^2 + \{2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\}x + \{x_3 \cdot x_3 \cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 8$ $\quad x_2 = 4$ $\quad x_3 = 16$ $\quad x_4 = 5$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[8]{80x^2 + 640x + 1280} \\
&= \sqrt[8]{5(16x^2 + 128x + 256)} && \text{5 ausgeklammert} \\
&= \sqrt[8]{5(4x + 16)^2} && \text{binomische Formel} \\
&= \sqrt[4]{5|4x + 16|} && \text{teilweise Wurzel gezogen} \\
&= \begin{cases} \sqrt[4]{20x + 80} & \text{für } x > -4 \\ \sqrt[4]{-20x - 80} & \text{für } x \leq -4 \end{cases} && \text{Betrag aufgelöst.}
\end{aligned}$$

Damit gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx & = & \int \sqrt[4]{5|4x+16|}\ \ dx & \\
& = & \int |5(4x+16)|^{\frac{1}{4}}\ \ dx & \\
& = & \left\{ \begin{array}{ll} \int (20x+80)^{\frac{1}{4}}\ dx & \text{für } x > -4 \\ \int (-20x-80)^{\frac{1}{4}}\ dx & \text{für } x \leq -4 \end{array} \right. & \text{Betrag aufgelöst} \\
& = & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4}{5\cdot 20}(20x+80)^{\frac{5}{4}} & \text{für } x > -4 \\ -\frac{4}{5\cdot 20}(-20x-80)^{\frac{5}{4}} & \text{für } x \leq -4 \end{array} \right. & \text{integriert.}
\end{array}$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -4]$ ist $\displaystyle\int \sqrt[8]{80x^2+640x+1280}\,dx \quad = \quad -\frac{1}{25}(-20x-80)^{\frac{5}{4}}$

Angebotene Lösungen:

1 $-20 \cdot \arcsin\,(16+4x)$	2 $-\frac{4}{5}(20x+80)^{\frac{5}{4}}$	3 $-\frac{4}{5}(-20x-80)^{\frac{5}{4}}$	4 es gibt keine
5 $-\frac{1}{25}(20x+80)^{\frac{5}{4}}$	6 $20 \cdot \arcsin\,(16+4x)$	7 $20 \cdot \arcsin\,(-16-4x)$	8 $-\frac{5\sqrt[8]{16+4x}}{4}$
☒ $-\frac{1}{25}(-20x-80)^{\frac{5}{4}}$	10 $\frac{5\sqrt[8]{-16-4x}}{4}$	11 $\frac{1}{25}(20x+80)^{\frac{5}{4}}$	12 $\frac{4}{5}(20x+80)^{\frac{5}{4}}$

Fehlerinterpretation:

1	$-20 \cdot \arcsin\,(16+4x)$	DF: Lösung geraten
2	$-\frac{4}{5}(20x+80)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen
3	$-\frac{4}{5}(-20x-80)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen
4	es gibt keine	DF: doch f ist definiert und integrierbar
5	$-\frac{1}{25}(20x+80)^{\frac{5}{4}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
6	$20 \cdot \arcsin\,(16+4x)$	DF: Lösung geraten
7	$20 \cdot \arcsin\,(-16-4x)$	DF: Lösung geraten
8	$-\frac{5\sqrt[8]{16+4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
☒	$-\frac{1}{25}(-20x-80)^{\frac{5}{4}}$	richtig
10	$\frac{5\sqrt[8]{-16-4x}}{4}$	DF: Lösung geraten
11	$\frac{1}{25}(20x+80)^{\frac{5}{4}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
12	$\frac{4}{5}(20x+80)^{\frac{5}{4}}$	DF: innere Ableitung vergessen

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 109 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -7 \cdot \frac{(-8\cdot x)^{n+6}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1\cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 8 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 7$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -7 und $(-8x)^6$ aus und substituieren Sie dann $u = -8x$.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{n=0}^{\infty} -7 \cdot \frac{(-8\cdot x)^{n+6}}{n!} & = & -7\sum_{n=0}^{\infty} (-8\cdot x)^6 \cdot \frac{(-8\cdot x)^n}{n!} & -7 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\
& = & -7(-8\cdot x)^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-8\cdot x)^n}{n!} & (-8\cdot x)^6 \text{ausgeklammert} \\
& = & -7(-8\cdot x)^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -8\cdot x \\
& = & -7(-8\cdot x)^6 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ = \ e^x \\
& = & -7(-8\cdot x)^6 \cdot e^{-8\cdot x} & u = -8\cdot x
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $-7(-8\cdot x)^6\sin(-8x)$	[2] $-7\cos(-8x)^6$	[3] $-7\cos(-8x+6)$	[4] $-7\sin(-8x)^6$
[5] $-7\sin(-8x+6)$	[6] T ist keine Taylorreihe	[7] $56x^6\cdot\sin x$	[8] $-7x^6\cdot e^{-8\cdot x}$
[X] $-7(-8\cdot x)^6\cdot e^{-8\cdot x}$	[10] $-7(-8\cdot x)^6\cos(-8x)$	[11] $56x^6\cdot e^x$	[12] $-7e^{-8x+6}$

Fehlerinterpretation:

[1]	$-7(-8\cdot x)^6\sin(-8x)$	DF: falsche Reihe verwendet
[2]	$-7\cos(-8x)^6$	DF: falsche Reihe verwendet
[3]	$-7\cos(-8x+6)$	DF: falsche Reihe verwendet
[4]	$-7\sin(-8x)^6$	DF: falsche Reihe verwendet
[5]	$-7\sin(-8x+6)$	DF: falsche Reihe verwendet
[6]	T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
[7]	$56x^6\cdot\sin x$	DF: falsche Reihe verwendet
[8]	$-7x^6\cdot e^{-8\cdot x}$	DF: -8 hätte beim x ausgeklammert werden müssen
[X]	$-7(-8\cdot x)^6\cdot e^{-8\cdot x}$	richtig
[10]	$-7(-8\cdot x)^6\cos(-8x)$	DF: falsche Reihe verwendet
[11]	$56x^6\cdot e^x$	DF: falsch ausgeklammert
[12]	$-7e^{-8x+6}$	DF: falscher Ansatz

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu