Mathe Vorkurs Online - Übungen Blatt 15

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 18 0 2005120007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{8x+24}{9x^2+54x+99}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$ x_4 durch 3 teilbar, x_3 nicht durch 3 teilbar

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{\{2\cdot x_3\}x+\{2\cdot x_3\cdot x_1\}}{x_4x^2+\{2\cdot x_1\cdot x_4\}x+\{x_4(x_1\cdot x_1+x_2)\}}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 9$.

Erklärung:

Diese Funktion kann mit Substitution und der Regel $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$ integriert werden.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx & = & \int \frac{8x+24}{9x^2+54x+99}\,dx & \text{Definition} \\
& = & \frac{4}{9}\cdot\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}\,dx & \frac{4}{9} \text{ ausgeklammert} \\
& = & \frac{4}{9}\cdot\int \frac{g'}{g}\,dx & \text{mit } g = x^2+6x+11 \\
& = & \frac{4}{9}\cdot\int \frac{1}{g}\,dg & \text{Substitutionsregel} \\
& = & \frac{4}{9}\cdot\ln|g| & \text{integriert} \\
& = & \frac{4}{9}\cdot\ln|x^2+6x+11| & \text{Rücksubstitution} \\
& = & \frac{4}{9}\cdot\ln(x^2+6x+11) & g(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\
& = & \ln\sqrt[9]{(x^2+6x+11)^4} & \text{Logarithmusgesetz.}
\end{array}$$

Angebotene Lösungen:

☐ 1 $\ln\sqrt[9]{(\frac{x+3}{2})^4}$	☐ 2 $\ln\sqrt[9]{((x-3)(x-2))^4}$	☐ 3 keine der angegebenen Funktionen
☐ 4 $\frac{4}{9}\cdot\ln|\frac{x+3}{2}|$	☐ 5 $\sqrt[9]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-2)})^4}$	☒ $\ln\sqrt[9]{(x^2+6x+11)^4}$
☐ 7 $\frac{4}{9}\cdot\arctan_0(\frac{x+3}{2})$	☐ 8 $\frac{(x+3)^4}{(x+2)^9}$	☐ 9 $\frac{4}{9((x+3)^2+2)}$
☐ 10 $\frac{4}{9}\cdot\arctan_0(x^2+6x+11)$	☐ 11 $\frac{4}{9(x+3)}+\frac{4}{9(x+2)}$	☐ 12 $\frac{4x^2+24x}{3x^3+27x^2+99x}$

Fehlerinterpretation:

☐ 1 $\ln\sqrt[9]{(\frac{x+3}{2})^4}$	DF: Lösung geraten
☐ 2 $\ln\sqrt[9]{((x-3)(x-2))^4}$	DF: Lösung geraten
☐ 3 keine der angegebenen Funktionen	DF: Lösung geraten
☐ 4 $\frac{4}{9}\cdot\ln|\frac{x+3}{2}|$	DF: Lösung geraten
☐ 5 $\sqrt[9]{(\frac{\ln(x-3)}{\ln(x-2)})^4}$	DF: Lösung geraten
☒ $\ln\sqrt[9]{(x^2+6x+11)^4}$	richtig
☐ 7 $\frac{4}{9}\cdot\arctan_0(\frac{x+3}{2})$	DF: $\int\frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
☐ 8 $\frac{(x+3)^4}{(x+2)^9}$	DF: Lösung geraten
☐ 9 $\frac{4}{9((x+3)^2+2)}$	DF: nicht integriert
☐ 10 $\frac{4}{9}\cdot\arctan_0(x^2+6x+11)$	DF: $\int\frac{1}{x} \neq \arctan_0 x$
☐ 11 $\frac{4}{9(x+3)}+\frac{4}{9(x+2)}$	DF: Lösung geraten
☐ 12 $\frac{4x^2+24x}{3x^3+27x^2+99x}$	DF: Zähler und Nenner integriert

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 35 0 2005110007	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.2: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 7n \cdot (6x)^{n-1}$. Ihr Konvergenzbereich ist $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2 =$ Faktoren in der Reihe. $x_1, x_2 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 n \cdot (x_2 x)^{n-1}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \qquad x_2 = 6$.

Erklärung:

Bilden Sie zuerst eine Stammfunktion der Reihe, vom Ergebnis ist die Taylorreihe bekannt. Danach leiten Sie dieses Ergebnis ab.

Rechnung:

Wir bilden zuerst eine Stammfunktion der Reihe:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} 7n \cdot (6x)^{n-1} \quad = \quad 7 \sum_{n=1}^{\infty} \int n \cdot (6x)^{n-1} \quad = \quad 7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6x)^n}{6} \quad = \quad 7 \left(\frac{1}{1-6x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{6}$$

Das Ergebnis leiten wir wieder ab:

$$7 \left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (6x)^{n-1} \right)' \quad = \quad 7 \left((\frac{1}{1-6x} - 1) \cdot \frac{1}{6} \right)' \quad = \quad 7 \frac{6}{(1-6x)^2} \cdot \frac{1}{6} \quad = \quad \frac{7}{(1-6x)^2}$$

Angebotene Lösungen:

1 $-\frac{7}{(1-6x)^2}$	☒ $\frac{7}{(1-6x)^2}$	3 $\frac{42}{(1-x)^2}$	4 Es gibt keine
5 $\frac{42}{(1-6x)}$	6 $-\ln(1-6x)$	7 $\ln(1-6x)$	8 $\frac{7}{6(1-x)^2}$
9 T ist keine Taylorreihe	10 $-\frac{7}{6(1-6x)^2}$	11 $\frac{42}{(1-6x)^2}$	12 $\frac{7}{(1-x)^2}$

Fehlerinterpretation:

1	$-\frac{7}{(1-6x)^2}$	DF: Falsches Vorzeichen
☒	$\frac{7}{(1-6x)^2}$	richtig
3	$\frac{42}{(1-x)^2}$	DF: 6 kann nicht ausgeklammert werden
4	Es gibt keine	DF: Doch
5	$\frac{42}{(1-6x)}$	DF: Innere Ableitung vergessen
6	$-\ln(1-6x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
7	$\ln(1-6x)$	DF: Falsche Reihe verwendet
8	$\frac{7}{6(1-x)^2}$	DF: 6 kann nicht ausgeklammert werden
9	T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
10	$-\frac{7}{6(1-6x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
11	$\frac{42}{(1-6x)^2}$	DF: Innere Ableitung vergessen
12	$\frac{7}{(1-x)^2}$	DF: 6 kann nicht ausgeklammert werden

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 46 0 2005110010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.3: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=4}^{\infty} 4 \cdot \frac{(4x)^n}{(n-3)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=\{x_1+1\}}^{\infty} x_2 \cdot \frac{(x_3 x)^n}{(n-x_1)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 4$.

Erklärung:

Machen Sie eine Indexverschiebung, so dass $n!$ im Nenner steht.

Rechnung:

Wir machen eine Indexverschiebung mit $k = n - 3$ oder $n = k + 3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{n=\infty} 4 \cdot \frac{(4x)^n}{(n-3)!} &= \sum_{k+3=4}^{k+3=\infty} 4 \cdot \frac{(4x)^{k+3}}{k!} && \text{Indexverschiebung } k = n-3 \\
&= \sum_{k=1}^{k=\infty-3} 4 \cdot (4x)^3 \cdot \frac{(4x)^k}{k!} \\
&= 4 \cdot (4x)^3 \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(4x)^k}{k!} && 4 \cdot (4x)^3 \text{ausgeklammert und } \infty - 3 = \infty \\
&= 256\, x^3 \cdot (e^{4x} - 1) && \text{die Reihe beginnt bei } 1 : \sum_{k=1}^{k=\infty} \tfrac{x^k}{k!} = e^x - 1
\end{aligned}$$

Angebotene Lösungen:

☒ $256\, x^3 \cdot (e^{4x} - 1)$	2 $\frac{4}{64x^3} \cdot e^{4x}$	3 T ist keine Taylorreihe	4 $4 \cdot (\cos(4x-3) - 1)$
5 $256\, x^3 \cdot e^{4x}$	6 $4 \cdot (e^{4x-3} - 1)$	7 $4 \cdot (e^{4x} - e^3 - 1)$	8 $4 \cdot \tan(4x-3)$
9 $4 \cdot \sin(4x-3)$	10 $\frac{4}{64x^3} \cdot (e^{4x} - 1)$	11 $4 \cdot e^{4x-3}$	12 $4 \cdot (\ln(4x-3) - 1)$

Fehlerinterpretation:

☒	$256\, x^3 \cdot (e^{4x} - 1)$	richtig
2	$\frac{4}{64x^3} \cdot e^{4x}$	DF: Fehler beim Ausklammern
3	T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
4	$4 \cdot (\cos(4x-3) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
5	$256\, x^3 \cdot e^{4x}$	DF: Die Reihe beginnt bei 1
6	$4 \cdot (e^{4x-3} - 1)$	DF: falscher Ansatz
7	$4 \cdot (e^{4x} - e^3 - 1)$	DF: falscher Ansatz
8	$4 \cdot \tan(4x-3)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
9	$4 \cdot \sin(4x-3)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe
10	$\frac{4}{64x^3} \cdot (e^{4x} - 1)$	DF: Fehler beim Ausklammern
11	$4 \cdot e^{4x-3}$	DF: falscher Ansatz
12	$4 \cdot (\ln(4x-3) - 1)$	DF: falscher Ansatz und falsche Reihe

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 50 0 2005120009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \frac{3}{x-4} - \frac{4}{x+9}$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $\; n = 1..4 \;\; x_1 \neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{x_1}{x-x_2} - \frac{x_3}{x+x_4}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 9$.

Erklärung:

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll} \int \frac{3}{x-4} - \frac{4}{x+9}\,dx & = & 3\int \frac{1}{x-4}\,dx - 4\int \frac{1}{x+9}\,dx & \text{Integration ist linear} \\ & = & 3\ln|x-4| - 4\ln|x+9| & \int \frac{1}{x+a} \;=\; \ln|x+a| \\ & = & \ln|x-4|^3 - \ln|x+9|^4 & a\ln b \;=\; \ln b^a \\ & = & \ln\left|\frac{(x-4)^3}{(x+9)^4}\right| & \ln(a/b) \;=\; \ln a - \ln b \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

[1] $\ln\left\|\frac{x-4}{x+9}\right\|^{\frac{3}{4}}$	[2] $\ln\|3(x-4)-4(x+9)\|$	[3] $\ln\left\|\frac{x-4}{x+9}\right\|^{-1}$
[4] $\sqrt{\frac{3(x-4)}{4(x+9)}}$	[X] $\ln\left\|\frac{(x-4)^3}{(x+9)^4}\right\|$	[6] $\ln\left\|\frac{3(x-4)}{4(x+9)}\right\|$
[7] $\frac{\ln\|x-4\|^3}{\ln\|x+9\|^4}$	[8] $\frac{1}{\ln\|x-4\|^3-\ln\|x+9\|^4}$	[9] $\sqrt{3(x-4)-4(x+9)}$
[10] $\frac{1}{(x-4)^3}-\frac{1}{(x+9)^4}$	[11] $\frac{-3}{(x-4)^2}+\frac{4}{(x+9)^2}$	[12] $\left(\sqrt[4]{(x-4)-(x+9)}\right)^3$

Fehlerinterpretation:

[1] $\ln\left\|\frac{x-4}{x+9}\right\|^{\frac{3}{4}}$	DF: Potenzgesetze falsch
[2] $\ln\|3(x-4)-4(x+9)\|$	DF: Logarithmusgesetze falsch
[3] $\ln\left\|\frac{x-4}{x+9}\right\|^{-1}$	DF: Potenzgesetze falsch
[4] $\sqrt{\frac{3(x-4)}{4(x+9)}}$	DF: Lösung geraten
[X] $\ln\left\|\frac{(x-4)^3}{(x+9)^4}\right\|$	richtig
[6] $\ln\left\|\frac{3(x-4)}{4(x+9)}\right\|$	DF: Logarithmusgesetze falsch
[7] $\frac{\ln\|x-4\|^3}{\ln\|x+9\|^4}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
[8] $\frac{1}{\ln\|x-4\|^3-\ln\|x+9\|^4}$	DF: Logarithmusgesetze falsch
[9] $\sqrt{3(x-4)-4(x+9)}$	DF: Lösung geraten
[10] $\frac{1}{(x-4)^3}-\frac{1}{(x+9)^4}$	DF: Lösung geraten
[11] $\frac{-3}{(x-4)^2}+\frac{4}{(x+9)^2}$	DF: abgeleitet
[12] $\left(\sqrt[4]{(x-4)-(x+9)}\right)^3$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 59 0 2005110008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.5: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -4 \cdot \frac{(-5\cdot x)^{n+5}}{n!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

x_1, x_2, x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} -x_3 \cdot \frac{(-x_1\cdot x)^{n+x_2}}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 5 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 4$.

Erklärung:

Klammern Sie zuerst -4 und $(-5x)^5$ aus und substituieren Sie dann $u = -5x$.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{n=0}^{\infty} -4 \cdot \frac{(-5\cdot x)^{n+5}}{n!} & = & -4\sum_{n=0}^{\infty}(-5\cdot x)^5 \cdot \frac{(-5\cdot x)^n}{n!} & -4 \text{ ausgeklammert und ein Potenzgesetz angewendet} \\ & = & -4(-5\cdot x)^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5\cdot x)^n}{n!} & (-5\cdot x)^5 \text{ausgeklammert} \\ & = & -4(-5\cdot x)^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} & u = -5\cdot x \\ & = & -4(-5\cdot x)^5 \cdot e^u & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; e^x \\ & = & -4(-5\cdot x)^5 \cdot e^{-5\cdot x} & u = -5\cdot x \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1 T ist keine Taylorreihe	2 Es gibt keine	☒ $-4(-5\cdot x)^5 \cdot e^{-5\cdot x}$	4 $20x^5 \cdot e^x$
5 $-4x^5 \cdot e^{-5\cdot x}$	6 $-4e^{-5x+5}$	7 $-4(-5\cdot x)^5 \sin(-5x)$	8 $20x^5 \cdot \cos x$
9 $-4\cos(-5x+5)$	10 $-4\cos(-5x)^5$	11 $20x^5 \cdot \sin x$	12 $-4\sin(-5x+5)$

Fehlerinterpretation:

1 T ist keine Taylorreihe	DF: Doch
2 Es gibt keine	DF: Doch
☒ $-4(-5\cdot x)^5 \cdot e^{-5\cdot x}$	richtig
4 $20x^5 \cdot e^x$	DF: falsch ausgeklammert
5 $-4x^5 \cdot e^{-5\cdot x}$	DF: -5 hätte beim x ausgeklammert werden müssen
6 $-4e^{-5x+5}$	DF: falscher Ansatz
7 $-4(-5\cdot x)^5 \sin(-5x)$	DF: falsche Reihe verwendet
8 $20x^5 \cdot \cos x$	DF: falsche Reihe verwendet
9 $-4\cos(-5x+5)$	DF: falsche Reihe verwendet
10 $-4\cos(-5x)^5$	DF: falsche Reihe verwendet
11 $20x^5 \cdot \sin x$	DF: falsche Reihe verwendet
12 $-4\sin(-5x+5)$	DF: falsche Reihe verwendet

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 69 0 2005120008	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.6: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D}$ maximal mit $f(x) = \ln(2 \cdot e^{5\cos(10x+6)})$.

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n > 1$, $n = 1..4$

Die Funktion lautet: $f(x) = \ln(x_1 \cdot e^{x_2 \cos(x_3 x + x_4)})$.
In dieser Aufgabe sind $x_1 = 2$ $\quad x_2 = 5$ $\quad x_3 = 10$ $\quad x_4 = 6$.

Erklärung:

Zuerst sollten Sie die Logarithmusgesetze $\ln(a\cdot b) \;=\; \ln a + \ln b)$ und $\ln e^x \;=\; x$ anwenden, dann erst integrieren.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll} \int \ln(2\cdot e^{5\cos(10x+6)})\,dx & = & \int \ln 2 + \ln e^{5\cos(10x+6)})\,dx & \ln(a\cdot b) \;=\; \ln a + \ln b) \\ & = & \int \ln 2 + 5\cos(10x+6)\,dx & \ln e^x \;=\; x \\ & = & x\ln 2 + \frac{5}{10}\sin(10x+6) & \int \cos(ax+b)\,dx \;=\; \frac{\sin(ax+b)}{a} \text{ und } \int c\,dx \;=\; c\,x \end{array}$$

Angebotene Lösungen:

1	f ist nicht integrierbar	2	$\frac{50\sin(10x+6)}{2+e^{5\cos(10x+6)}}$
3	$x\ln 2-\frac{5}{10}\sin(10x+6)$	4	$2\cdot e^{5\cos(10x+6)}(\ln(2\cdot e^{5\cos(10x+6)})-1)$
5	$\ln(2x\cdot e^{5\sin(10x+6)})$	☒	$x\ln 2+\frac{5}{10}\sin(10x+6)$
7	$\ln(2x\cdot e^{-\frac{5}{10}\sin(10x+6)})$	8	$\ln(2\cdot e^{5\cos(10x+6)})$
9	$\frac{-e^{5\cos(10x+6)}(\ln(2\cdot e^{5\cos(10x+6)})-1)}{50\sin(10x+6)(2+e^{5\cos(10x+6)})}$	10	$\frac{1}{2}-\frac{5}{10}\sin(10x+6)$
11	$\frac{e^{5\cos(10x+6)}(\ln(2\cdot e^{5\cos(10x+6)})-1)}{50\sin(10x+6)(2+e^{5\cos(10x+6)})}$	12	$\frac{-10\sin(10x+6)}{e^{5\cos(10x+6)}}$

Fehlerinterpretation:

1	f ist nicht integrierbar	DF: Lösung geraten
2	$\frac{50\sin(10x+6)}{2+e^{5\cos(10x+6)}}$	DF: Lösung geraten
3	$x\ln 2-\frac{5}{10}\sin(10x+6)$	DF: $\int\cos x \;=\; \sin x$
4	$2\cdot e^{5\cos(10x+6)}(\ln(2\cdot e^{5\cos(10x+6)})-1)$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
5	$\ln(2x\cdot e^{5\sin(10x+6)})$	DF: Lösung geraten
☒	$x\ln 2+\frac{5}{10}\sin(10x+6)$	richtig
7	$\ln(2x\cdot e^{-\frac{5}{10}\sin(10x+6)})$	DF: Lösung geraten
8	$\ln(2\cdot e^{5\cos(10x+6)})$	DF: Lösung geraten
9	$\frac{-e^{5\cos(10x+6)}(\ln(2\cdot e^{5\cos(10x+6)})-1)}{50\sin(10x+6)(2+e^{5\cos(10x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
10	$\frac{1}{2}-\frac{5}{10}\sin(10x+6)$	DF: $\int\ln 2 \;=\; x\ln 2$
11	$\frac{e^{5\cos(10x+6)}(\ln(2\cdot e^{5\cos(10x+6)})-1)}{50\sin(10x+6)(2+e^{5\cos(10x+6)})}$	DF: zuerst muss der ln vereinfacht werden
12	$\frac{-10\sin(10x+6)}{e^{5\cos(10x+6)}}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 12	Kapitel 8.4	Substitution
keine	Integralrechnung	Nummer: 74 0 2005120010	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.7: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f:\;(-\infty,-5]\;\to\;\mathbb{R}:\quad f(x)\;=\;\sqrt[10]{12x^2+120x+300}.$$

Parameter:

x_n = Koeffizienten der Funktion, $x_n>1,\;\; n=1..4\;\; x_1\neq x_3$

Die Funktion lautet: $f(x)=\sqrt[x_1]{\{x_2\cdot x_2\cdot x_4\}x^2+\{2\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\}x+\{x_3\cdot x_3\cdot x_4\}}$.
In dieser Aufgabe sind $x_1=10\quad x_2=2\quad x_3=10\quad x_4=3$.

Erklärung:

Klammern Sie möglichst viel aus, wenden Sie die binomische Formel an und ziehen Sie teilweise die Wurzel.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcll}
f(x) &=& \sqrt[10]{12x^2+120x+300} & \\
&=& \sqrt[10]{3(4x^2+40x+100)} & \text{3 ausgeklammert}\\
&=& \sqrt[10]{3(2x+10)^2} & \text{binomische Formel}\\
&=& \sqrt[5]{3|2x+10|} & \text{teilweise Wurzel gezogen}\\
&=& \left\{\begin{array}{ll}\sqrt[5]{6x+30} & \text{für } x>-5\\ \sqrt[5]{-6x-30} & \text{für } x\leq -5\end{array}\right. & \text{Betrag aufgelöst.}
\end{array}$$

Damit gilt $\mathbb{D}=\mathbb{R}$ und

$$\begin{array}{rcll}
\int f(x)\,dx &=& \int\sqrt[5]{3|2x+10|}\;\,dx & \\
&=& \int|3(2x+10)|^{\frac{1}{5}}\;\,dx & \\
&=& \left\{\begin{array}{ll}\int(6x+30)^{\frac{1}{5}}\,dx & \text{für } x>-5\\ \int(-6x-30)^{\frac{1}{5}}\,dx & \text{für } x\leq -5\end{array}\right. & \text{Betrag aufgelöst}\\
&=& \left\{\begin{array}{ll}\frac{5}{6\cdot 6}(6x+30)^{\frac{6}{5}} & \text{für } x>-5\\ -\frac{5}{6\cdot 6}(-6x-30)^{\frac{6}{5}} & \text{für } x\leq -5\end{array}\right. & \text{integriert.}
\end{array}$$

Auf Grund des Definitionsbereiches $x \in (-\infty, -5]$ ist $\int \sqrt[10]{12x^2+120x+300}\, dx \quad = \quad -\frac{5}{36}(-6x-30)^{\frac{6}{5}}$

Angebotene Lösungen:

☒ $-\frac{5}{36}(-6x-30)^{\frac{6}{5}}$	2 $-\frac{3\sqrt[10]{10+2x}}{2}$	3 $-\frac{5}{36}(6x+30)^{\frac{6}{5}}$	4 $-15 \cdot \arcsin(10+2x)$
5 $\frac{5}{36}(6x+30)^{\frac{6}{5}}$	6 $15 \cdot \arcsin(-10-2x)$	7 $-\frac{3\sqrt[10]{-10-2x}}{2}$	8 $-\frac{5}{6}(-6x-30)^{\frac{6}{5}}$
9 $15 \cdot \arcsin(10+2x)$	10 es gibt keine	11 $\frac{3\sqrt[10]{-10-2x}}{2}$	12 $\frac{3\sqrt[10]{10+2x}}{2}$

Fehlerinterpretation:

☒ $-\frac{5}{36}(-6x-30)^{\frac{6}{5}}$	richtig
2 $-\frac{3\sqrt[10]{10+2x}}{2}$	DF: Lösung geraten
3 $-\frac{5}{36}(6x+30)^{\frac{6}{5}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
4 $-15 \cdot \arcsin(10+2x)$	DF: Lösung geraten
5 $\frac{5}{36}(6x+30)^{\frac{6}{5}}$	DF: Beträge falsch aufgelöst
6 $15 \cdot \arcsin(-10-2x)$	DF: Lösung geraten
7 $-\frac{3\sqrt[10]{-10-2x}}{2}$	DF: Lösung geraten
8 $-\frac{5}{6}(-6x-30)^{\frac{6}{5}}$	DF: innere Ableitung vergessen
9 $15 \cdot \arcsin(10+2x)$	DF: Lösung geraten
10 es gibt keine	DF: doch f ist definiert und integrierbar
11 $\frac{3\sqrt[10]{-10-2x}}{2}$	DF: Lösung geraten
12 $\frac{3\sqrt[10]{10+2x}}{2}$	DF: Lösung geraten

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 88 0 2005110009	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.8: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot \frac{(-1)^n (5 \cdot x)^{2(n-5)}}{(2n)!}$. Finden Sie die zugehörige Funktionsdarstellung der Taylorreihe im Konvergenzbereich.

Parameter:

$x_1, x_2, x_3 =$ Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1, x_2, x_3 > 1$, $x_1 \neq x_2$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty} x_1 \cdot \frac{(-1)^n (x_2 \cdot x)^{2(n-x_3)}}{(2n)!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1 = 7 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 5$.

Erklärung:

Berechnen Sie die ersten Glieder der Reihe

Rechnung:

Viele fangen folgendermaßen an zu rechnen:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot \frac{(-1)^n (5 \cdot x)^{2(n-5)}}{(2n)!} \\ &= 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (5 \cdot x)^{2(n-5)}}{(2n)!} \\ &= 7 \cdot (5 \cdot x)^{-10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (5 \cdot x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{7}{(5 \cdot x)^{10}} \cdot \cos(5 \cdot x) \ . \end{aligned}$$

Bei genauerem Hinsehen fällt aber auf, dass diese Funktion bei $x = 0$ eine senkrechte Asymptote hat. Dies ist aber bei Taylorrentwicklungen um $x = 0$ nicht möglich. Der erste Summand ($n = 0$) heißt $7 \cdot \frac{(5 \cdot x)^{-10}}{(0)!} = \frac{7}{(5 \cdot x)^{10}}$. Dies ist kein Summand der Form $a_n x^n$ mit $n \geq 0$. Es handelt sich also um keine Taylorreihe, sondern um eine Laurentreihe (wird später im Studium erläutert).

Angebotene Lösungen:

1 $\frac{7}{5}\cdot e^{-5x}$	2 $7\cdot\sin(5x-5)$	3 $\frac{7}{5}\cdot(\sin x)^{-5}$	4 $\frac{7}{(5\cdot x)^{10}}\cdot e^{(5x)}$
☒ T ist keine Taylorreihe	6 $7\cdot(\sin(5x))^{-5}$	7 $\frac{7}{(5\cdot x)^{10}}\cdot\cos(5x)$	8 $\frac{7}{(5\cdot x)^{10}}\cdot\sin(5x)$
9 $7\cdot\left(e^{5x}\right)^{-5}$	10 $\frac{7}{5}\cdot(\cos x)^{-5}$	11 $7\cdot(\cos(5x))^{-5}$	12 $7\cdot e^{(5x-5)}$

Fehlerinterpretation:

1 $\frac{7}{5}\cdot e^{-5x}$	DF: falscher Ansatz
2 $7\cdot\sin(5x-5)$	DF: falscher Ansatz
3 $\frac{7}{5}\cdot(\sin x)^{-5}$	DF: falscher Ansatz
4 $\frac{7}{(5\cdot x)^{10}}\cdot e^{(5x)}$	DF: falsche Reihe verwendet
☒ T ist keine Taylorreihe	richtig
6 $7\cdot(\sin(5x))^{-5}$	DF: falscher Ansatz
7 $\frac{7}{(5\cdot x)^{10}}\cdot\cos(5x)$	DF: fast richtig
8 $\frac{7}{(5\cdot x)^{10}}\cdot\sin(5x)$	DF: falsche Reihe verwendet
9 $7\cdot\left(e^{5x}\right)^{-5}$	DF: falscher Ansatz
10 $\frac{7}{5}\cdot(\cos x)^{-5}$	DF: falscher Ansatz
11 $7\cdot(\cos(5x))^{-5}$	DF: falscher Ansatz
12 $7\cdot e^{(5x-5)}$	DF: falscher Ansatz

MV 05	Blatt 11	Kapitel 7.4	Taylorreihen
keine	Differenzialrechnung	Nummer: 98 0 2005110011	Kl: 14G
Grad: 20 Zeit: 30	Quelle: keine	W	

Aufgabe 15.1.9: Gegeben sei die Taylorreihe $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot\frac{(2x+6)^n}{n!}$. Diese Reihe hat nicht den Entwicklungspunkt $x=0$. Finden Sie die zugehörige Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x=0$ (oder äquivalent: Finden Sie die zugehörige Funktion und entwickeln Sie diese um $x=0$).

Parameter:

x_1,x_2,x_3 = Faktoren und Summanden in der Reihe. $x_1,x_2,x_3>1$, $x_2\neq x_3$.

Die Reihe lautet: $\sum_{n=0}^{\infty}x_1\cdot\frac{(x_2\,x+\{x_2\cdot x_3\})^n}{n!}$.

In dieser Aufgabe sind $x_1=2\quad x_2=2\quad x_3=3$.

Erklärung:

Bei Taylorreihen ist Substitution erlaubt.

Rechnung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot\frac{(2x+6)^n}{n!}\quad=\quad 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+6)^n}{n!}\quad=\quad 2\cdot e^{2x+6}$$

Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $2x+6=0\Leftrightarrow x=-3$.

$$\begin{array}{lclcl}
(2\cdot e^{2x+6})'\big|_{x=0} & = & 2\cdot 2e^{2x+6}\big|_{x=0} & = & 2\cdot 2e^6\\
(2\cdot e^{2x+6})''\big|_{x=0} & = & 2\cdot 2^2e^{2x+6}\big|_{x=0} & = & 2\cdot 2^2e^6\\
(2\cdot e^{2x+6})^{(n)}\big|_{x=0} & = & 2\cdot 2^ne^{2x+6}\big|_{x=0} & = & 2\cdot 2^ne^6.
\end{array}$$

Damit ist $a_n=2\cdot 2^ne^6$ und die Taylorreihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot 2^ne^6\cdot\frac{x^n}{n!}\quad=\quad 2\cdot e^6\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\ .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit

$$2\cdot e^{2x+6}\quad=\quad 2\cdot e^6\cdot e^{2x}\quad=\quad 2\cdot e^6\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\ .$$

Angebotene Lösungen:

1 $2 \cdot e^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	2 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+6)^n}{n!}$	3 T ist keine Taylorreihe
4 $2 \cdot e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-6)^n}{n!}$	5 $2 \cdot e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$	6 $2 \cdot e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6x)^n}{n!}$
7 $2 \cdot e^{2x+6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!}$	8 $2 \cdot e^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$	☒ $2 \cdot e^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$
10 $2 \cdot e^{2x+6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	11 $2 \cdot e^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$	12 $2 \cdot e^{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Fehlerinterpretation:

1 $2 \cdot e^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
2 $2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+6)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
3 T ist keine Taylorreihe	DF: doch (diesmal schon)
4 $2 \cdot e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-6)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
5 $2 \cdot e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
6 $2 \cdot e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
7 $2 \cdot e^{2x+6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!}$	DF: Lösung geraten
8 $2 \cdot e^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert
☒ $2 \cdot e^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$	richtig
10 $2 \cdot e^{2x+6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: Lösung geraten
11 $2 \cdot e^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$	DF: dies ist keine Taylorreihe um $x = 0$
12 $2 \cdot e^{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	DF: falsch ausgeklammert

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware @yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter: http: / / www.vorkurs.de.vu