Übungsaufgaben zum Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

Blatt 1

Aufgabe 1) Zeige: Es gibt keine größte Primzahl.
Hinweis: Unter der Annahme, daß es eine größte gibt, ist ein Widerspruchbeweis zu führen, indem man eine größere Primzahl konstruiert.

Aufgabe 2) Beweise durch vollständige Induktion:

a) $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, b) $2^n > n^2 \quad \forall\, n \in N \wedge n>4$

Aufgabe 3) Für welche reellen Zahlen gelten folgende Ungleichungen ?

a) $-x < \frac{1-2x}{x}$ b) $(1+x)^2 > 1+2x$ c) $x^2-1 \leq x+1$

d) $x(x+3) \leq 10$ e) $x^4 < x^2$ f) $x^2+3x > -2$

g) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} \geq 5$ h) $(x+y)^2 > 4xy$ i) $|x-2| < 3$

k) $|x+3| < |x-7|$ l) $|x+3| > 2$ m) $|x| < 2x+3$

Aufgabe 4) Es seien a, b reelle Zahlen mit $0<a<b$.
Aus a und b lassen sich folgende Mittelwerte bilden:

I arithmetisches Mittel $m_a = \frac{a+b}{2}$

II geometrisches Mittel $m_g = \sqrt{a \cdot b}$

III harmonisches Mittel $m_h = \frac{2ab}{a+b}$

IV quadratisches Mittel $m_q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Zeige, daß folgende Beziehung immer gilt:

$$a < m_h < m_g < m_a < m_q < b$$

Aufgabe 5) Zeige: $x^2 + 2x - 8 \geq -9$ für $x \in R$

Aufgabe 6) a) Zerlege die Zahl 132 in zwei Faktoren, deren Summe 23 ist.

b) Um welche ganze Zahl muß das Produkt $15 \cdot 12$ an beiden Faktoren vergrößert werden, damit es um 160 größer wird.

Aufgabe 7) Skizziere die durch folgende Ungleichungen festgelegten Gebiete !

a) $|x| + |y| \leq 1$ b) $y^2 - 2|x| \geq 1$

c) $x^2 + y^2 < 4$

Übungsaufgaben zum Mathematikvorkurs für Studienanfänger

Blatt 2

Aufgabe 8) Skizziere folgende Kurven :

a) $y = |x+1| + |x-1|$ b) $y = |x(x-1)(x-2)|$

Aufgabe 9) Für welche natürlichen Zahlen gilt :

a) $|\sqrt{n^2+5n+4} - 2{,}5 - n| < 1/100$ bzw. $1/1000$

b) $\left|\frac{3n+2}{n-1} - 3\right| < 1/100$ bzw. $1/1000$

Aufgabe 10) Zeige, daß für alle $n,k \in \mathbb{N}$ mit $n > k$ gilt:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

c) $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{n+m+1}{m}$

Aufgabe 11) Entwickle $(3+y)^5$ in eine binomische Reihe.

Aufgabe 12) Es seien $a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Wann folgt aus $a < b$: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$?

Aufgabe 13) Zeige:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{l=0}^{n} b_l = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_k \cdot b_l .$$

Aufgabe 14) Berechne die folgenden Summen und Produkte :

a) $\sum_{k=1}^{5} k$ b) $\sum_{k=2}^{4} (k-2)^2$ c) $\sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{2} (2k-j) \right)$

d) $\prod_{j=1}^{5} j$ e) $\prod_{j=2}^{6} (j+1)$

Aufgabe 15) Prüfe die Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $\sqrt{n^2+3n-1} - \sqrt{n^2+n+1}$ b) $\sqrt{n^2+5n+4} - n$

c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ d) $\frac{n^2+3n-6}{3n^2-n+1}$

e) $\frac{n+1}{n^2-2}$

Aufgabe 16) Zeige die Konvergenz der nachstehenden Folgen dadurch an, daß zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ bestimmt wird mit der Eigenschaft: $|a_n - a| < \varepsilon$ (z.B. $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-6}$) für alle $n \geq N(\varepsilon)$.

a) $a_n = \frac{n}{n^3+n^2+2}$ b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3+n}$

Übungsaufgaben zum Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

Blatt 3

Aufgabe 17) Mit Hilfe von $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$ bestimme man folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{2n-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^{3n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n-1})^n$.

Aufgabe 18) Erkläre den Unterschied zwischen $f(x) = 1$ und $g(x) = \frac{x-1}{x-1}$.

Aufgabe 19) Bestimme die Unstetigkeitsstellen und ergänze gegebenenfalls stetig.

a) $f(x) = \frac{3x-6}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$

d) $f(x) = \exp\left(\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right)$ e) $f(x) = \ln(x^2-1)$

f) $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{1 - \cot x}$

Aufgabe 2o) Man zeige mittels der Stetigkeit von $f(x)=x$, daß die folgenden Funktionen auf $]-\infty,\infty[$ stetig sind.

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = 3x^2$ c) $h(x) = 3x^2+5$

Warum ist $r(x) = \frac{3x^2+5}{x^3+2}$ nicht auf $]-\infty,\infty[$ stetig?

Aufgabe 21) $[x]$ sei definiert als die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Man untersuche im Intervall $]o;5[$ die Funktion $f(x)=[x]$ auf Stetigkeit und stelle sie graphisch dar.

Aufgabe 22) Welche der folgenden Funktionen sind monoton fallend/steigend im gesamten Definitionsbereich?

a) $x \to \sqrt{x}$ b) $x \to x^2+x$ c) $x \to 4x^3-1$

d) $x \to \frac{1}{x}$ e) $x \to (-2x+1)^3$

Übungsaufgaben zum
Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

Blatt 4

Aufgabe 23) $f(x) = x^2 - 3 \quad x \in [1;4]$

a) Prüfe $f(x)$ auf Monotonie, Stetigkeit und Beschränktheit .

b) Gebe den größten und den kleinsten Funktionswert an.

c) Prüfe, ohne zu rechnen, nach, ob $f(x)$ folgende Werte annimmt: $0, -5, \sqrt{2}, \pi, 9{,}43$

Aufgabe 24) -Berechne die Steigung der linearen Funktion f, deren Graph durch die Punkte $P(1,3)$ und $Q(4,-4)$ verläuft.

-Berechne den Scheitelpunkt der Parabel

$$f(x) = -2x^2 + 4$$

Aufgabe 25) Die Tweedbrücke in Berwick hat einen langgestreckten Bogen, der durch die folgende Funktion beschrieben werden kann:

$$f: x \to -1/20 \cdot (x^2 - 10 \cdot x - 0{,}01) \quad , \quad x \in D$$

a) Berechne die Breite des Brückenbogens und gib D sinnvoll an .

b) Berechne die Höhe des Brückenbogens.

c) Fertige eine Zeichnung des Bogens an und überlege, ob das Koordinatensystem für die Beschreibung günstig gewählt wurde.

Aufgabe 26) Bestimme eine ganzrationale Funktion vom Grad zwei so, daß gilt :

a) $f(-1) = -8 \quad \wedge \quad f(0) = -4 \quad \wedge \quad f(1) = 4$

b) $g(-1) = 9 \quad \wedge \quad g(0) = 2 \quad \wedge \quad g(5) = 87$

Aufgabe 27) Untersuche das Symmetrieverhalten der Funktionen:

$f_1: x \to 3x^2+1 \quad ; \quad f_2: x \to x^3-7x$

$f_3: x \to 3x^6-8x^4+3x^2+1$

Aufgabe 28) Zerlege folgende Terme in Linearfaktoren:

a) x^3+2x^2-5x-6 b) $x^4 -2x^3 +2x-1$

Übungsaufgaben zum Mathematikvorkurs für Studienanfänger

Aufgabe 29) Bestimme den Werte- und Definitionsbereich der Funktion

$$f: x \to \frac{2x}{1+x^2}$$

Aufgabe 3o) Zeichne die Bildkurven der Funktionen:

a) $f: x \to \frac{3x-5}{2x-7}$ b) $g: x \to \frac{2x^3-6x^2-26x+3o}{x^3+x^2-12x}$

Aufgabe 31) Zeige:

$$f: x \to \begin{cases} \frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1} & \text{für } x \in R\setminus\{1\} \\ 4 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

ist eine ganzrationale Funktion.

Aufgabe 32) Wie groß sind die beiden Widerstände, die bei Parallelschaltung 2 Ohm und bei Reihenschaltung 9 Ohm ergeben ?

Aufgabe 33) Für welche $x \in R$ gilt:

a) $2^x < 3\frac{1}{4}$ b) $1o^{-x} < 2$

c) $\frac{3}{1o} > 1o^{-2x} > \frac{1}{1o}$ d) $2^{3x} = 8^x$

Aufgabe 34) Die barometrische Höhenformel lautet:

$$p = p_o \cdot \exp\left(-\frac{\rho \cdot g}{p_o} \cdot h\right).$$

p_o: Luftdruck auf Null-Niveau

ρ : Dichte der Luft

g : Erdbeschleunigung

p : Luftdruck in der Höhe h über o.

Wie ermittelt man daraus die Höhe h ?

Aufgabe 35) Gegeben seien die beiden Funktionen

$f_1: x \to 4^x$, $x \in R$; $f_2: x \to \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $x \in R$

Zeige: $f_2(-x) = f_1(x)$

Aufgabe 36) Gegeben sind folgende Funktionswerte:

$\ln(2) = o{,}6931$, $\ln(3) = 1{,}o986$, $\ln(5) = 1{,}6o94$

$\ln(7) = 1{,}9459$.

Berechne daraus:

a) $\ln(4)$ b) $\ln(9)$ c) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ d) $\ln(3{,}5)$

Übungsaufgaben zum Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

Aufgabe 37) Für welche $x \in R$ gilt :

a) $e^{2x} + e^{x} - \ln(e^{2}) = o$

b) $7 \cdot 2^{x} = \frac{5^{(x-1)}}{3}$

Aufgabe 38) Für welche $x \in R$ gilt :

a) $e^{x+1} = 2$; b) $e^{x-1} = e^{x} - 1$; c) $4 \cdot e^{2x} = e^{x} + 5$

Aufgabe 39) Man vereinfache folgende Ausdrücke :

a) $y = \lg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) - \lg\left(\sqrt{1 - 1/x^2}\right) - \lg(x)$; $x>1$

b) $y = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1y}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right) + \ln\sqrt{a}$;

$x \geq a > o$

Aufgabe 4o) Man vereinfache :

$\frac{\cos x}{\cos 2x} \cdot \left(\cos x - \sin x \cdot \tan x - 2 \cdot \sin x + \frac{\sin 2x}{\cos x}\right) + \tan^2 x$;

$\cos x \neq o$, $\cos 2x \neq o$.

Aufgabe 41) Beweise über die Additionstheoreme

a) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

b) $\sin 3x = (3\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin x$

Aufgabe 42) Der Ausdruck $\sin(x+\Delta x) - \sin(x)$ soll auf eine möglichst einfache Form der Art 'sina·cosb' gebracht werden.

Aufgabe 43) Die Summe der Harmonischen Funktionen

$$y = 2\sin(2t+3o^{o}) + 3\sin(2t+6o^{o})$$

ist algebraisch umzuformen.

Aufgabe 44) Bekannt sei $\cot\alpha = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$,

gesucht ist $\sin\alpha$ ($o<\alpha<\pi$) .

Aufgabe 45) Der Ausdruck $\frac{\cos x \cdot (1-\tan^2 x)}{\tan x \cdot (\cot x - 1)}$ ist auf eine möglichst einfache Form zu bringen.

Übungsaufgaben zum Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

Aufgabe 46) Besteht zwischen den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks wirklich die Beziehung

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma \quad ?$$

Aufgabe 47) Alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{\tan x + 1}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{3}}{\cos x}$$

mit $0 \leq x \leq 2\pi$ sollen bestimmt werden.

Aufgabe 48) Wie lang ist ein Riemen, der in zwei Riemenscheiben von den Halbmessern r und R und vom Mittelpunktabstand a (mit $a > R+r$) gelegt ist ?
Zahlenbeispiel: R = 4ocm, r = 2o cm, a = 1oo cm

Aufgabe 49) Für welche $x \in \mathbb{R}$ besitzt die folgende Funktion eine Umkehrabbildung ? Ermittle diese.

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot \tan(3x+1)$$

Aufgabe 5o) Bilde die Umkehrfunktion von :

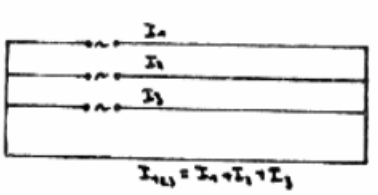
a) $y = \ln(\cosh(3x+1))$, $x \in [0,\infty[$

b) $y = \tan(\operatorname{Arsinh}\sqrt{x})$, $x \in [0,\infty[$

Aufgabe 51) Von einer harmonischen Schwingung wurden folgende Werte gemessen: Frequenz ν = 5 Hz, Amplitude A = 3 cm
Elongation (zur Zeit t=o) y_0 = 15 mm.
Man stelle die Elongation als Funktion der Zeit dar.

Aufgabe 52) Die Stromstärke dreier Wechselstromkreise werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$I_1 = I_0 \sin(t)$$
$$I_2 = I_0 \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$I_3 = I_0 \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$$



Die drei Stromkreise werden über eine gemeinsame "Rückleitung" geschlossen.
Berechne die Stromstärke I_{123} der "Rückleitung".

Aufgabe 53) Bei einem Einschaltvorgang in einem Gleichstromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R, der Selbstinduktion L und der angelegten Spannung U ändert sich die Stromstärke mit der Zeit t nach dem Gesetz :

$$I(t) = \frac{U}{R}\cdot(1 - \exp(-\frac{R}{L}\cdot t)) \ .$$

Skizziere den Verlauf I(t).
Nach welcher Zeit beträgt die Stromstärke $\frac{1}{2}\cdot\frac{U}{R}$?

Aufgabe 54) Eine Bakterienkultur wächst in 45 min um 7%.
Zu Beginn (t_0=o) seien f(o) = 10^6 Bakterien vorhanden.
Stelle einen Funktionsterm $f(n\cdot h)$ mit h = 45 min und $n \in N$ auf, der Dir erlaubt, die Entwicklung der Kultur über große Zeiträume zu verfolgen. Berechne die Entwicklung der Kultur in den ersten 6 Stunden.

Aufgabe 55) Entwickle die explizite Funktionsgleichung y = f(x) aus den folgenden Parameterdarstellungen :

a) $x(t) = at$, $y(t) = bt^2$ b) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$

c) $x(t) = 1+3t$, $y(t) = \ln(t)$

d) $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$

e) $x(t) = a\cdot\cos(t)$, $y(t) = b\cdot\sin(t)$.

Zeige: Jede explizite Form besitzt mindestens eine Parameterdarstellung.

Übungsaufgaben zum Mathematikvorkurs für Studienanfänger

Aufgabe 56) Berechne die Ableitung von $y = \cos(x)$ durch den Differenzenquotienten.

(Hinweis: $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$)

Aufgabe 57) Differenziere folgende Funktionen:

a) $4x^3 + 7x^2 - \frac{1}{4}x$ b) $\frac{1}{x^2-2}$ c) $x^3(x^2-1)^2$

d) $\sqrt[3]{(2x-1)^2}$ e) $\frac{3x-1}{x^5}$ f) $\frac{x-1}{x+1}$

g) $\sin x - x \cdot \cos x$ h) $\cos^5 x$ j) $\ln(\sin x)$

k) $\arcsin \frac{1}{x}$ l) $\ln \frac{3-x^2}{2-x^2}$

Aufgabe 58) Berechne die Ableitung von $y = \arcsin(x)$ aus der Umkehrabbildung ,

und von $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ mit der Kettenregel.

Aufgabe 59) Differenziere:

a) e^{3x^2} b) $e^{\sin^2 x}$ c) $e^x \cdot x^n$

d) 3^x e) 2^{x^2} f) $e^{(x^x)}$

Aufgabe 6o) Die Auslenkung eines schwingenden Massenpunktes P ist durch $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ gegeben. Berechne die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Bewegung.

Aufgabe 61) Fällt ein Massenpunkt bei Vorhandensein einer Reibungskraft, deren Betrag dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so gilt das Weg-Zeit-Gesetz:

$$x(t) = \frac{v_e^2}{g} \cdot \ln \cosh \frac{gt}{v_e} \qquad v_e, g = \text{const.}$$

Berechne Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Aufgabe 62) Differenziere die implizite Funktion $F(x,y) = x^2y^2 + 2xy - 2 = o$; $x \geq o, y \geq o$ nach x und y. Löse F explizit nach x und y auf, differenziere und vergleiche die Ergebnisse.

Übungsaufgaben zum
Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

Aufgabe 63) Berechne den Tiefpunkt folgender Funktion in Abhängigkeit von t:

$$f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - tx^2 \quad , \quad \text{mit} \quad t \in R^+$$

Weiter ist die Ortskurve, auf der die Tiefpunkte liegen, zu bestimmen (t eliminieren).

Aufgabe 64) Berechne mit Hilfe der Regel von L'Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to 1/2} \frac{6x^2-5x+1}{8x^2-2x-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}}$

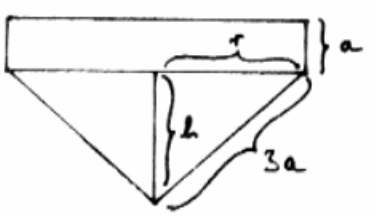
c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln a^x}{e^x - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+5}{x^3-1}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x \cdot a^x}$

Aufgabe 65) Der Parabel $y = 6 - \frac{1}{4}x^2$ ist im Abschnitt oberhalb der x-Achse ein Rechteck größten Inhalts einzubeschreiben.

Aufgabe 66) Ein Wasserbehälter besteht aus einem Zylinder mit unten angesetztem Kegel.
Wie ist r und h festzusetzen, damit das Volumen bei konstantem a maximal wird.



Aufgabe 67) Eine Studentin geht hinter einem Schotten, der einen Rock trägt. In welcher Entfernung muss sie hinter dem Schotten hergehen, damit sie dessen Beine unter größtmöglichem Blickwinkel sehen kann ? Die Höhe des Rocksaumes über der Erde sei dabei 6o cm und die Augenhöhe der Studentin 178 cm.
(Sinngemäß entnommen dem Buch von F.Wille:"Analysis")

Aufgabe 68) Als Bahnkurve beim schiefen Wurf ergibt sich (bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes)

$$y = f(x) = x \cdot \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x^2 \quad ; \quad x \in [o, x_w] \; .$$

Dabei bedeutet $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ den Wurfwinkel, v_0 die Abwurfgeschwindigkeit, x_w die Wurfweite.
Gesucht ist die maximale Wurfweite x_w und die maximale Wurfhöhe y_H ($x_w = 2x_H$).

Aufgabe 69) Approximiere die Funktion $y = \cos x$ in einer Umgebung von $x_0 = o$ durch die Taylorreihe 4.Grades (n=4).
Beschreibe die Potenzreihenentwicklung von $y = \cos x$.

Aufgabe 7o) Bestimme das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ mit $f(x)$:

a) $3x^3 - \frac{1}{4}x^2 + cx$ b) e^{mx} c) $\sin(ax)$

d) $(a + bx)^n$ e) $(a + bx)^{-1}$

f) $(1/3 \cdot x^3 - 2x^2)^3 (x^2 - 4x)$ g) $e^{\cos x} \cdot \sin x$

h) $\ln(x) \cdot x^{-1}$ j) $\cot x$ k) $x \cdot \cos x$

l) $\ln x$ m) $\cos^2 x$ n) $e^x \cdot \sin x$

o) $(e^x + e^{-x})^{-1}$ p) $x^3 \cdot e^x$ q) $\ln^3 x$

r) $\sin x \cdot (a + b \cdot \cos x)^{-1}$ s) $x^3 \cdot \ln x$ t) $(a^2 - x^2)^{1/2}$

u) $(a^2 + b^2x^2)^{-1}$ v) $\ln^n x$ w) $\sin^3 x$

x) $\sin^n x$

Aufgabe 71) Ermittle durch Partialbruchzerlegung $\int f(x)dx$ für $f(x)$:

a) $(x + 13)/(x^2 - 4x - 5)$ b) $(6x - 13)/(x^2 - 3{,}5x + 1{,}5)$

c) $(2x + 6)/(2x^2 + 3x + 1)$ d) $(2x - 13)/(x^2 - 1ox + 25)$

e) $(3x + 1)/(x^2 + 4x + 4)$ f) $(2x - 1o)/(x^2 + 2x + 1o)$

Übungsaufgaben zum Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

Aufgabe 72) Berechne die nachstehenden Integrale:

a) $\int_0^2 (4x(x^2-x-1)+x^2)\,dx$ b) $\int_0^2 \sin(u)\,du$

c) $\int_0^x \sin(2t+3)\,dt$ d) $\int_{x_1}^{x_2} (ab\cdot \ln u)\,du$

e) $\int_m^{2m} (n - \frac{1}{n})\,dn$ f) $\int_0^5 \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ (uneigentlich)

Aufgabe 73) In welchem Abstand ξ ist eine Parallele zur y-Achse zu ziehen, die die von der x-Achse, der y-Achse, der Geraden x=1 und der Kurve $y=e^x$ begrenzte Fläche im Verhältnis 1:2 teilt ?

Aufgabe 74) Berechne das Volumen eines Körpers, der durch Rotation eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge a) um seine Grundseite entsteht.

Aufgabe 75) Wie groß ist der Flächeninhalt der von den Kurven

$$f(x) = 2x^3 \quad \text{und} \quad g(x) = 3x^2-1$$

eingeschlossenen Fläche ?

Aufgabe 76) Welchen Wert nimmt das bestimmte Integral im Intervall $[-a,a]$ an, wenn der Integrand eine ungerade Funktion ist ? Welcher Zusammenhang gilt für eine gerade Funktion ?

Aufgabe 77) Bestimme den Flächeninhalt folgender Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ x & 1 < x \le 2 \\ 3 & 2 < x \le 3 \end{cases} \quad \text{in} \quad 0 \le x \le 3 \ .$$

Aufgabe 78) Der oberhalb der x-Achse liegende Abschnitt der Parabel $y = (3x - x^2)$ soll um die y-Achse rotieren. Berechne das Volumen des daraus entstandenen Körpers.

Übungsaufgaben zum Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

Aufgabe 79) Berechne folgende Ausdrücke:

a) $4\cdot(\cos 184^\circ + i\sin 184^\circ)\cdot\frac{2}{5}(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$

b) $[(\sqrt{3} + 2i) + (\frac{1+i}{1-i})]\cdot[\sqrt{6}\cdot(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})]$

c) $(a\omega + b\omega^2)(a\omega^2 + b\omega)$ mit $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Aufgabe 80) Berechne die Potenzen:

a) $(4+3i)^5$ b) $(\cos\pi + i\sin\pi)^7$ c) $(-2-2i)^4$

Aufgabe 81) Berechne die Wurzeln. Gib sämtliche Werte an.

a) $\sqrt[4]{1}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[3]{-i}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$

e) $\sqrt[5]{z}$ mit $z = 9(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

Aufgabe 82) Berechne:

a) $\ln\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{(2i + 1)(i-2) + 1}{(2-i)^2 - 2 + i}$

Aufgabe 83) Bringe die Zahlen auf die Form $re^{i\varphi}$:

a) $3 + 3i$ b) $2 - i$

Aufgabe 84) Löse die quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 + (5-2i)x + 5(1-i) = 0$

b) $x^2 + (1-2i)x - 2i = 0$

Aufgabe 85) Es sei $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$.
Gib die Bilder von z_0 , die durch Spiegelung

a) am Nullpunkt

b) an der Re-Achse

c) an der Im-Achse

d) an der ersten bzw. zweiten Winkelhalbierenden

entstehen, in beiden Schreibweisen an.

Aufgabe 86) Welche Punkte $z = a+bi$ der Gauß'schen Zahlenebene erfüllen folgende Bedingungen ?

a) $a^2 + b^2 = 1$ b) $1 \leq |z + (1-i)| \leq 2$

Übungsaufgaben zum
Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

Aufgabe 87) Gegeben sind die Ebene

$$E:\ 2x_1 + x_3 - 3 = o$$

und die Geradenschar

$$g_t:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1+t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} \quad \lambda, t \in R$$

a) Für welchen Wert von t ist $g_t \parallel E$?
Ist $g_t \in E$ für dieses t ?

b) Berechne für die übrigen Werte von t den Schnittpunkt S_t von E und g_t.

c) Bestimme den Wert von t, für den gilt:

$$g_t \perp E$$

d) Gegeben ist die Geradenschar

$$h_t:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} o \\ t+1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mu, t \in R$$

Bestimme den Schnittpunkt von g_t und h_t.

e) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E_t, die g_t und h_t enthält.
Für welche Werte von t geht E_t durch den Ursprung ?

f) Für t=-2 ist E_{-2} gegeben durch

$$2x_1 - x_3 = 1 \quad .$$

Berechne den Winkel zwischen E und E_{-2} .

Aufgabe 88) Berechne den Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$, wenn $|\vec{u} \times \vec{v}| = 1$ und $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ ist.

Aufgabe 89) Ein Tetraeder werde von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. Zeige: Ordnet man jeder Fläche den Vektor zu, dessen Betrag zahlenmäßig gleich dem Inhalt der Fläche ist und dessen Richtung und Richtungssinn mit der nach außen zeigenden Normalen übereinstimmt, so ist die Summe dieser Vektoren gleich dem Nullvektor.

Aufgabe 9o) Prüfe auf lineare Abhängigkeit :

a) $\vec{v}_1 = (1,-1,1)$ $\quad \vec{v}_2 = (o,1,1)$ $\quad \vec{v}_3 = (1,o,o)$

b) $\vec{a}_1 = (1,-1,1)$ $\quad \vec{a}_2 = (o,1,1) \cdot 2$ $\quad \vec{a}_3 = (1,o,2)$

Aufgabe 91) Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Parallelogramm, das durch die Vektoren $\vec{a}=(1,2,o)$ und $\vec{b}=(2,1,1)$ aufgespannt wird. Der Vektor zur Spitze sei $\vec{c}=(3,3,2)$. Berechne die Oberfläche.

Aufgabe 92) Zerlege den Vektor $\vec{v} = (1,-2,-3)$ in zwei Komponenten, von denen eine parallel zu $\vec{a} = (2,-1,-2)$ ist, die andere parallel zur Ebene $E: 4x -3y +5z = o$.

Aufgabe 93) Welche Ebene E_2 ist parallel zu

$$E_1: 2x -y +z = -3$$

und geht durch $P_1(2/-1/2)$. Berechne ihren Abstand zum Nullpunkt.

Aufgabe 94) Verbindet man in einem Viereck die Mittelpunkte benachbarter Seiten, so entsteht ein Parallelogramm.

Aufgabe 95) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe h flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypothenusenabschnitten.

Lösungen zu den Übungsaufgaben 1 - 3

Aufgabe 1) Es sei p_r die größte Primzahl. Diese Annahme wird zum Widerspruch geführt, indem wir aus allen der Annahme entsprechenden Primzahlen eine neue konstruieren:

$$p_m = p_o \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1 \quad .$$

$p_m - 1$ entspricht dann dem Produkt all dieser Primzahlen, ist also durch sie teilbar. Die um 1 gößere Zahl p_m ist folglicherweise durch keine Zahl mehr teilbar.

Aufgabe 2)

a) i) $n=1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ erfüllt

ii) Induktionsvorauss.: $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad .$$

b) i) $n=5$: $32 > 25$ erfüllt

ii) I.V.: $2^n > n^2 \Rightarrow 2^{n+1} > 2n^2$

Für $n \geq 3$ folgt: $n \geq 3 > 2 + 1/n \Rightarrow 2n^2 =$

$= n^2 + n^2 > n^2 + n(2+1/n) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

$\Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2$.

Aufgabe 3) a) α) $x>o$: $-x^2 < 1-2x \Rightarrow (x-1)^2 > o$ gilt für $x \neq 1$

β) $x<o$: $-x^2 > 1-2x \Rightarrow (x-1)^2 < o$ gilt nie

$\Rightarrow x \in R^+ \setminus \{1\}$

b) $(1+x)^2 > 1+2x \Rightarrow 1+2x+x^2 > 1+2x \Rightarrow x^2 > o$

$\Rightarrow x \in R \setminus \{o\}$

c) $x^2-1 \leq x+1 \Rightarrow x^2-x-2 \leq o \Rightarrow (x-2)(x+1) \leq o$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 2$

d) $x(x+3) \leq 10 \Rightarrow x^2+3x-10 \leq o \Rightarrow (x+5)(x-2) \leq o$

$\Rightarrow -5 \leq x \leq 2$

e) $x^4 < x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 < o \Rightarrow x^2(x^2-1) < o$

$\Rightarrow |x| < 1 \ , \ x \neq o \Rightarrow -1 < x < 1 \ \wedge \ x \neq o$

f) $x^2+3x > -2 \Rightarrow x^2+3x+2 > o \Rightarrow (x+1)(x+2) > o$

$\Rightarrow x > -1 \ \vee \ x < -2$

g) α) $x>o$: $2+3 \geq 10x \Rightarrow x \leq 1/2$ erlaubt

β) $x<o$: $2+3 \leq 10x \Rightarrow x \geq 1/2$ Widerspruch zu $x<o$

$\Rightarrow o < x \leq 1/2$

Aufgabe 3)

h) $(x+y)^2>4xy \Rightarrow x^2+2xy+y^2>4xy \Rightarrow$

$x^2-2xy+y^2>o \Rightarrow (x-y)^2>o$

$\Rightarrow x,y \in R\setminus\{x=y\}$

i) $\left.\begin{array}{l}\alpha)\ x\geq 2:\ x-2<3 \Rightarrow 2\leq x<5 \\ \beta)\ x<2:\ -x+2<3 \Rightarrow 2>x>-1\end{array}\right\} \Rightarrow -1 < x < 5$

k) $\left.\begin{array}{ll}\alpha)\ x\geq 7:\ x+3<x-7 & \text{gilt nie} \\ \beta)\ -3\leq x<7:\ x+3<-x+7 \Rightarrow 2x<4 & \text{gilt für } x<2 \\ \gamma)\ x<-3:\ -x-3<-x+7 \Rightarrow -3<7 & \text{gilt immer}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow x < 2$

l) $\left.\begin{array}{l}\alpha)\ x\geq -3:\ x+3>2 \Rightarrow x>-1 \\ \beta)\ x<-3:\ -x-3>2 \Rightarrow x<-5\end{array}\right\} \Rightarrow x > -1 \vee x < -5$

m) $\alpha)\ x\geq o:\ x<2x+3 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow x\geq o$

$\beta)\ x<o:\ -x<2x+3 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow -1<x<o$

$\Rightarrow x > -1$

Aufgabe 4)

a) $a < m_h = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow a(a+b)<2ab \Rightarrow a<b$ ≙ Voraussetzung

b) $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} \Rightarrow 4a^2b^2<ab(a+b)^2 \Rightarrow 2ab<a^2+b^2$

$\Rightarrow (a-b)^2>o$ wahre Aussage

c) $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \Rightarrow (a+b)^2>4ab \Rightarrow (a-b)^2>o$ w.A.

d) $\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow 2(a^2+b^2)>a^2+2ab+b^2$

$\Rightarrow (a-b)^2>o$ w.A.

e) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b \Rightarrow a^2+b^2<2b^2 \Rightarrow a<b$ ≙ Voraussetzung

Aufgabe 5) $x^2+2x-8\geq -9 \Rightarrow x^2+2x+1\geq o \Rightarrow (x+1)^2\geq o$ ✓

Aufgabe 6)

a) $a\cdot b = 132$; $a+b = 23 \Rightarrow a = 23-b$

einsetzen ergibt : $(23-b)\cdot b = 132 \Rightarrow b^2-23b+132 = o$

und als Ergebnis : $a = 11$, $b = 12$ (bzw. $a=12, b=11$) .

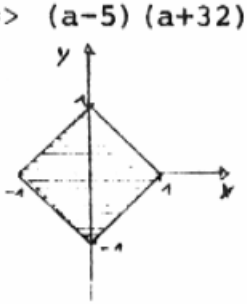
b) $(15+a)(12+a) = 15\cdot 12 + 16o$

$a^2+27a+18o = 34o \Rightarrow a^2+27a-16o = o$

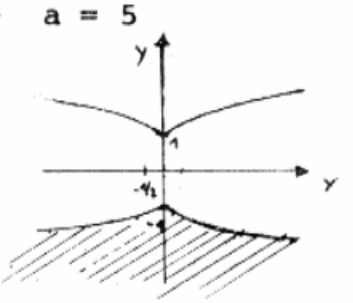
$\Rightarrow (a-5)(a+32) = o \Rightarrow a = 5$

Aufgabe 7)

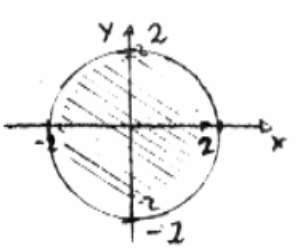
a)



b)



c)



Aufgabe 8) a) $|\sqrt{n^2+5n+4} - 2{,}5 - n| < \varepsilon$

da $\sqrt{n^2+5n+4} < 2{,}5+n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, folgt:

$\frac{5}{2} + n - \sqrt{n^2+5n+4} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon^2 - (5+2n)\varepsilon + \frac{25}{4} - 4 < 0$

$\Rightarrow n > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{9}{8\varepsilon} - \frac{5}{2}$

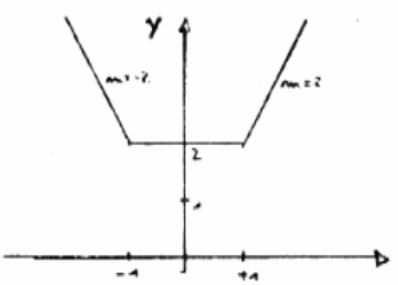
$\varepsilon = 1/100 : \quad n \geq 111 \; ; \quad \varepsilon = 1/1000 : \quad n \geq 1123$

b) $\left|\frac{3n+2}{n-1} - 3\right| < \varepsilon \; ; \quad$ da $\frac{3n+2}{n-1} > 3 \quad \forall n>1$, folgt:

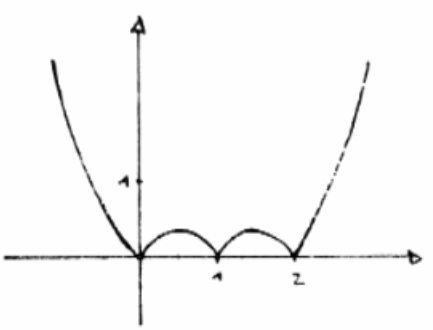
$\frac{3n+2}{n-1} - 3 < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon(n-1) > 5$

$\Rightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} + 1 \quad$; also $n \geq 502$ bzw. $n \geq 5002$

Aufgabe 9) a)



b)



Aufgabe 10) a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1} \Rightarrow \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right) =$

$= \binom{n}{k}\cdot\frac{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

c) Der Satz ist richtig für m=0. Der Satz sei richtig für m=k, dann gilt er auch für m=k+1. Denn :

$$\sum_{i=0}^{k+1}\binom{n+i}{i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} =$$

$$= \binom{n+k+2}{k+1}, \quad \text{wegen b)} .$$

Aufgabe 11) $(3+y)^5 = 243 + 405y + 270y^2 + 90y^3 + 15y^4 + y^5$.

Aufgabe 12) Die Aussage gilt für a,b>0 oder a,b<0 .

Für a<0,b>0 folgt: $1/a < 1/b$.

Aufgabe 13) $\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{l=0}^{n} b_l = \sum_{k=0}^{m}\left(a_k \sum_{l=0}^{n} b_l\right) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(a_k\cdot b_l)$.

Lösungen zu den Übungsaufgaben 14 - 19

Aufgabe 14) a) $1+2+\ldots+5 = 15$ b) $0+1+4 = 5$

c) $1+0+3+2+5+4 = 15$

d) $5! = 120$ e) $\frac{7!}{2!} = 2520$

Aufgabe 15) a)-c): Die Ausdrücke werden gemäß dem dritten binomischen Satz $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ erweitert. In a),b),e) wird dann mit n gekürzt, in d) mit n^2.

a) 1 b) 5/2 c) 0 d) 1/3 e) 0 .

Aufgabe 16) a) $\{a_n\}$ ist Nullfolge. $\varepsilon=10^{-2}$: $|a_n-0|=|\frac{n}{n^3+n^2+2}|<0{,}01$

$\Rightarrow \frac{n^3+n^2+2}{n} > 100 \Rightarrow n \geqslant 10$, bzw. $n\geqslant 1000$ für $\varepsilon=10^{-6}$.

b) $|\frac{(-1)^n}{n^3+n}| < 0{,}01 \Rightarrow n^3+n>100 \Rightarrow n \geqslant 5$ bzw. $n \geqslant 100$.

Aufgabe 17) a) $(1+\frac{1}{n})^{2n-1} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})} \rightarrow \frac{e\cdot e}{1} = e^2$ für $n\to\infty$.

b) Setze $n=2m$: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{6m} = e^6$.

c) Setze $n=2m+1$: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{2m+1} = e^2$.

Aufgabe 18) f(x) ist für alle x erklärt, g(x) ist an der Stelle x=1 nicht erklärt.

Aufgabe 19) a) $f(x) = 3$ für $x=2$ b) $f(x) = 2$ für $x=1$

c) $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$ $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ $k= 0,\pm1,\pm2,\ldots$ nicht stetig ergänzbar!

d) $f(x) = 1$ für $x=-2$ e) f(x) nicht stetig ergänzbar

$\Rightarrow f(x) = \ln(x^2-1)$ $|x|>1$

f) $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ für $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$ $k=0,\pm1,\ldots$

Lösungen zu den Übungsaufgaben 2o - 24

Aufgabe 2o) a) $f_1(x)=x^2=x\cdot x = f(x)\cdot f(x)$ => stetig

b) $g(x) =3x^2= 3\cdot f_1(x)$ => stetig

c) $h(x) =3x^2+5 = g(x)+5$ => stetig

$r(x)$ ist nicht stetig auf R, da der Nenner Null wird.

Aufgabe 21) $f(x) = [x]$ (die sog. 'Treppenfunktion') ist unstetig an den Stellen 1,2,3,4 .

Aufgabe 22) a) Annahme: $\sqrt{x+h} > \sqrt{x}$ => $h>o$ => streng mon.steig.

b) Annahme: $x^2+x < (x+h)^2+x+h$,$h>o$

=> $h > -2x-1$ erfüllt für $x>-1/2$

=> mon.steig. für $x>-1/2$, mon.fall. für $x<-1/2$.

c) Annahme: $4x^3-1 < 4(x+h)^3-1$,$h>o$

=> $3x^2+3xh +h^2 > o$ gilt für alle x

=> $4x^3-1$ $\forall x \in R$ monoton steigend .

d) Annahme: $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+h}$,$h>o$ => $x > x+h$ Widerspruch

=> $\frac{1}{x}$ $\forall x \in R\ \{o\}$ mon.fallend . Ausnahme: $x<o$

und $x+h>o$ => $x < x+h$ => Unstetigkeitsstelle an $x=o$

e) Annahme: $(-2x+1)^3 < (-2(x+h)+1)^3$ $h>o$

=> $12x^2+ 3 + 4h - 6h^2 <12x(1-h)$ Widerspruch

=> monoton fallend .

Aufgabe 23) a) $f(x)$ ist im Intervall $[1;4]$ stetig,beschränkt und monoton steigend.

b) $f(x)_{min}= f(1) = -2$; $f(x)_{max}= f(4) = 13$

c) $f(x)$ nimmt alle angeführten Werte außer -5 an.

Aufgabe 24) a) $m = \frac{3-(-4)}{1-4} = -\frac{7}{3}$.

b) $f(x) = -2x^2+ 4$ => S (o/4)

Lösungen zu den Übungsaufgaben 25 - 32

Aufgabe 25) $f(x) = -1/20(x^2 - 10 \cdot x - 0{,}01)$

a) $x^2 - 10x - 0{,}01 = 0 \Rightarrow x_1 = -0{,}001 \; ; \; x_2 = 10{,}001$

$\Rightarrow$ Breite $b = 10{,}002$ $\quad D = [-0{,}001; 10{,}001]$

b) Höhe: $h = f(5) = 1{,}2505$

Aufgabe 26) Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$

a) $c=-4 \; ; \; a-b=-4 \; ; \; a+b=8 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x^2+6x-4$

b) $c=2 \; ; \; a-b=7 \; ; \; 5a+b=17 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 4x^2-3x+2$

Aufgabe 27) f_1: Symmetrie zur y-Achse da $f_1(x) = f_1(-x)$

f_2: Symmetrie zum Ursprung da $f_2(-x) = -f_2(x)$

f_3: Symmetrie zur y-Achse da $f_3(x) = f_3(-x)$

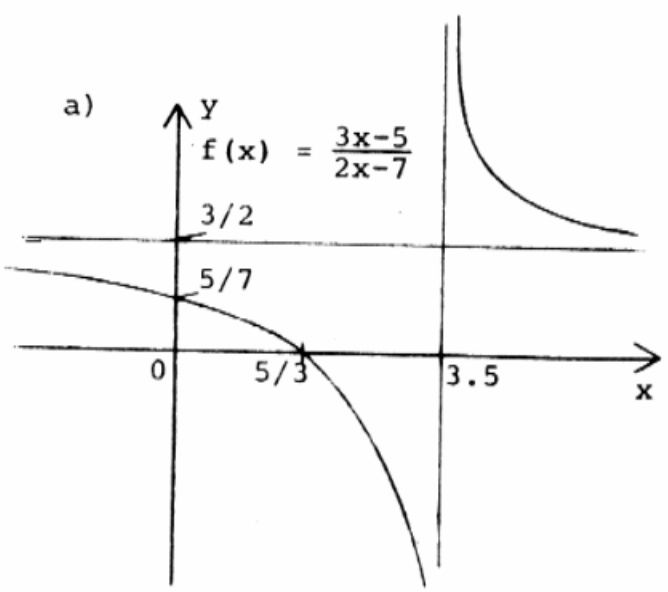
Aufgabe 28) Erste Nullstelle 'raten', dann Polynomdivision:

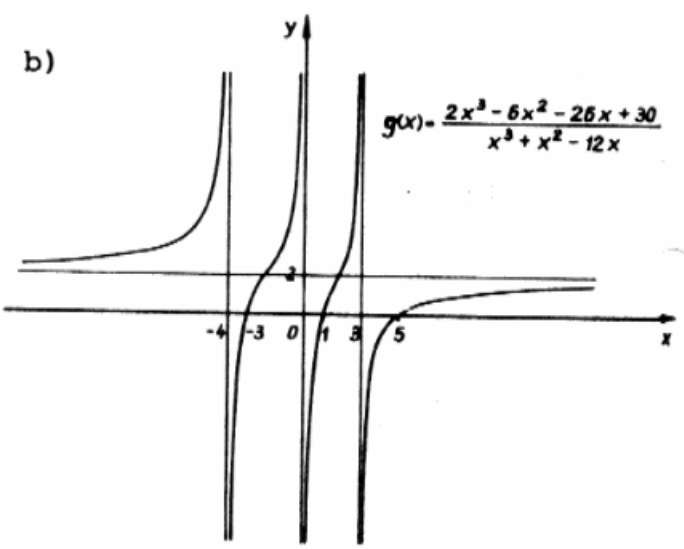
a) $x^3+2x^2-5x-6 = (x+1)(x+3)(x-2)$

b) $x^4-2x^3+2x-1 = (x-1)^3(x+1)$

Aufgabe 29) $D=R \; ; \; W = [-1;1]$

Aufgabe 30)





Aufgabe 31) Für $x \neq 1$ liefert Polynomdivision

$$x^3-x^2+3x-3 : x-1 = x^2+3 = g(x).$$

$g(1) = 4 \Rightarrow$ 4 ist die stetige Erweiterung von $f(x)$.

Aufgabe 32)

$$\left.\begin{aligned} R_1 + R_2 &= 9 \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad R_1^2 - 9R_1 - 18 = 0$$

$$R = 6 \; ; \quad R = 3$$

Lösungen zu den Übungsaufgaben 33 - 38

Aufgabe 33)

a) $2^x < 3\frac{1}{4} \Rightarrow x \cdot \ln 2 < \ln(3\frac{1}{4}) \Rightarrow x < \frac{\ln(3\frac{1}{4})}{\ln 2}$.

b) $10^{-x} < 2 \Rightarrow -x \ln 10 < \ln 2 \Rightarrow x > -\frac{\ln 2}{\ln 10}$.

c) $\frac{3}{10} > 10^{-2x} > \frac{1}{10} \Rightarrow \ln(\frac{3}{10}) > -2x \cdot \ln 10 > \ln(\frac{1}{10})$

$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\ln 3}{2 \ln 10} < x < \frac{1}{2}$.

d) $2^{3x} = 8^x \Rightarrow 3x \cdot \ln 2 = x \cdot \ln 8 \Rightarrow x \in R$.

Aufgabe 34) $\ln(\frac{p}{p_0}) = -\frac{g \cdot \varrho}{p_0} h \Rightarrow h = -\ln(\frac{p}{p_0})(\frac{p_0}{g \cdot \varrho})$.

Aufgabe 35) $f_2(-x) = (\frac{1}{4})^{-x} = 4^x = f_1(x)$.

Aufgabe 36)

a) $\ln 4 = \ln 2 + \ln 2 = 1{,}3862$

b) $\ln 9 = \ln 3 + \ln 3 = 2{,}1972$

c) $\ln(2/3) = \ln 2 - \ln 3 = -0{,}4055$

d) $\ln 3{,}5 = \ln 7 - \ln 2 = 1{,}2528$

Aufgabe 37)

a) Substitution: $y = e^x \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0$

Nach der Mitternachtsformel erhält man :

$y_1 = 1$, also $e^x = 1 \Leftrightarrow \underline{x = 0}$

$y_2 = -2$ (liefert keine Lösung)

b) $21 \cdot 2^x = 5^{(x-1)}$

$\Rightarrow \ln(21 \cdot 2^x) = \ln(5^{(x-1)})$

$\Rightarrow \ln 21 + x \cdot \ln 2 = (x-1) \cdot \ln 5$

also $x = -\frac{\ln 5 + \ln 21}{\ln 2 - \ln 5} = \frac{\ln 105}{\ln 2{,}5}$.

Aufgabe 38)

a) $x+1 = \ln 2 \Rightarrow x = \ln 2 - 1 \approx -0{,}31$

b) mit e multipliziert: $e^x = e^{x+1} - e$

$\Rightarrow e^{x+1} - e^x = e \Rightarrow e^x(e-1) = e \Rightarrow x = -\ln(e-1) + 1 \approx 0{,}46$

c) Substitution: $e^x = u \Rightarrow 4u^2 - u - 5 = 0$

mit der Mitternachtformel folgt: $u_1 = \frac{5}{4}$; $u_2 = -1$

$\Rightarrow x = \ln\frac{5}{4} \approx 0{,}22$ (zweite Lösung existiert nicht.)

Lösungen zu den Übungsaufgaben 39 - 45

Aufgabe 39) a) $\lg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) - \lg(\sqrt{1-1/x^2}) - \lg(x) =$

$= \lg(1/[\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{1-1/x^2}]) - \lg(x) =$

$= \lg\left(\frac{x}{x^2-1}\right) - \lg(x) = -\lg(x^2-1)$.

b) leichtes Umformen ergibt :

$\frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})\cdot(x-\sqrt{x^2-a^2})\cdot a}{a}\right] = \ln(a)$.

Aufgabe 4o) $\frac{\cos x}{\cos 2x}\cdot(\cos x - \sin x\cdot\tan x - 2\cdot\sin x + \frac{\sin 2x}{\cos x}) + \tan^2 x =$

$= \frac{\cos x}{\cos 2x}\left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos x}\right) + \tan^2 x =$

$= \frac{\cos x}{\cos 2x}\cdot\frac{\cos 2x}{\cos x} + \tan^2 x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Aufgabe 41) a) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Dieser letzte Ausdruck wird durch $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ dividiert.

Nach Umformung erhält man : $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

b) $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cdot\cos x + \cos 2x\cdot\sin x =$

$= 2\cdot\sin x\cdot\cos^2 x + \sin x\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x) =$

$= \sin x\cdot(3\cdot\cos^2 x - \sin^2 x)$.

Aufgabe 42) Wegen $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ folgt:

$\sin(x+\Delta x) - \sin(x) = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

Aufgabe 43) $3o^o \hat{=} \frac{\pi}{6}$; $6o^o \hat{=} \frac{\pi}{3}$ => $y = 2[\sin 2t\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \cos 2t\cdot\sin\frac{\pi}{6}] +$

$+3[\sin 2t\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \cos 2t\cdot\sin\frac{\pi}{3}]$

$y = \sqrt{3}\cdot\sin 2t + \cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos 2t$

$Y \approx 4{,}84\ \sin(2t+48{,}o7^o)$

(vgl. Formelsammlung für verwendete Sätze)

Aufgabe 44) Mit $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ und $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ folgt:

$1 = \left(\frac{a^2}{1-a^2}+1\right)\cdot\sin^2\alpha = \left(\frac{1}{1-a^2}\right)\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-a^2}$.

Aufgabe 45) $\frac{\cos x\cdot(1-\tan^2 x)}{\tan x\cdot(\cot x - 1)} = \frac{\cos x\cdot(1-\tan x)(1+\tan x)}{1-\tan x} =$

$= \cos x + \cos x\cdot\tan x = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Lösungen zu den Übungsaufgaben 46 - 48

Aufgabe 46) Mit $\tan\alpha + \tan\beta = (1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)\cdot\tan(\alpha+\beta)$

und $\gamma = 180^\circ-(\alpha+\beta)$

folgt: i) $\tan\gamma = \dfrac{\tan 180^\circ - \tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 180^\circ\cdot\tan(\alpha+\beta)} = -\tan(\alpha+\beta)$

ii) $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma =$

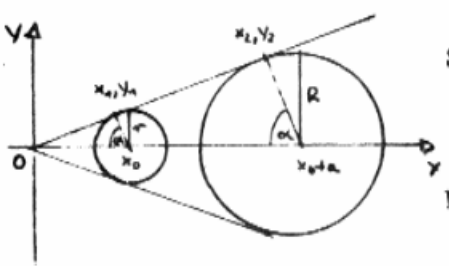
$= (1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)\cdot\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha+\beta) =$

$= \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$ q.e.d.

Aufgabe 47) $\dfrac{\tan x + 1}{\sin x - \cos x} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} \Rightarrow \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cdot\sin(x-75^\circ) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{12}\pi\ ,\ x_2 = \frac{17}{12}\pi\ ;\ (75^\circ \hat{=} \frac{5}{12}\pi)$

Aufgabe 48)



Strahlensatz: $\dfrac{x_0}{x_0+a} = \dfrac{r}{R}$

$\Rightarrow x_0 = \dfrac{r}{R-r}\cdot a = 100$

Nach der Tangentengleichung folgt:

$(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0) = r^2$

$\Rightarrow -(x_1-x_0)x_0 = r^2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{x_0^2-r^2}{x_0} = 96$.

Mit der Kreisgleichung erhält man y_1:

$(x_1-x_0)^2 + y_1^2 = r^2 \Rightarrow y_1 = \sqrt{r^2-(x_1-x_0)^2} = \sqrt{384} \sim 19{,}6$.

Für x_2 und y_2 folgt analog :

$x_2 = \dfrac{(x_0+a)^2-R^2}{x_0+a} = 192$; $y_2 = \sqrt{R^2-[x_2-(x_0+a)]^2} = \sqrt{1536} \sim 39{,}2$

$\sin\alpha = \dfrac{y_1}{r} = \dfrac{\sqrt{384}}{20} \Rightarrow \alpha \sim 1{,}37$; Kreisabschnitte: $b_1 = 2\alpha r = 54{,}8$; $b_2 = 2\alpha R = 109{,}6$

Länge des Riemens: $l = b_1-b_2+2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+2\pi R = 392{,}5$

Aufgabe 49) Umkehrfunkt. dann, wenn $|3x+1| < \frac{\pi}{2}$ =>

$x \in \left]-\frac{\pi+2}{6} ; \frac{\pi-2}{6}\right[$.

Wir erhalten: $2y = \tan(3x+1) \Rightarrow \arctan(2y) = 3x+1$

$\Rightarrow x = \frac{\arctan(2y) - 1}{3}$ mit $y \in]-\infty,\infty[$.

Aufgabe 50) a) $e^y = \cosh(3x+1) \Rightarrow \operatorname{Arcosh}(e^y) = 3x+1$

$\Rightarrow x = \frac{\operatorname{Arcosh}(e^y) - 1}{3}$.

b) $\arctan y = \operatorname{Arsinh}\sqrt{x} \Rightarrow x = (\sinh(\arctan y))^2$.

Aufgabe 51) $y = 3\sin(10\pi t+\varphi)$; $t=0$: $3\sin\varphi = 1{,}5 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 52) $I_g = I_1 + I_2 + I_3 = I_0[\sin t + \sin(t+\frac{2}{3}\pi) + \sin(t-\frac{2}{3}\pi)] =$

$= I_0[\sin t + 2\sin t \cdot \cos\frac{2}{3}\pi] = 0$ wegen $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 53) $\frac{1}{2}\cdot\frac{U}{R} = \frac{U}{R}(1-\exp(-\frac{R}{L}\cdot t)) \Rightarrow \frac{1}{2} = \exp(-\frac{R}{L}t) \Rightarrow t = \frac{L}{R}\cdot\ln 2$

Aufgabe 54) a) $f(nh) = 10^6\cdot(1+\frac{7}{100})^{nh} = 10^6\cdot 1{,}07^{nh}$

Aufgabe 55) a) $t = \frac{x}{a} \Rightarrow y = \frac{b}{a^2}x^2$; b) $t = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{x^3}$;

c) $t = \frac{x-1}{3} \Rightarrow y = \ln\frac{x-1}{3}$; d) $x^2 = \cos^2 t$, $y^2 = \sin^2 t$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |y| = (1-x^2)^{1/2}$;

d) $\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t$, $\frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow |y| = b(1-\frac{x^2}{a^2})^{1/2}$.

Zur Parameterdarstellung: Wähle $x=t$, $y = f(t)$.

Aufgabe 56) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\,\sin\frac{h}{2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{-\sin\frac{2x+h}{2}\,\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x$.

Aufgabe 57) a) $f'(x) = 12x^2 + 14x - \frac{1}{4}$; b) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$

c) $f'(x) = x^2(x^2-1)(7x^2-3)$

d) $f'(x) = \frac{4}{3}\cdot(2x-1)^{-1/3}$; e) $f'(x) = \frac{5-12x}{x^6}$

f) $f'(x) = 2\cdot(x+1)^{-2}$; g) $f'(x) = x\cdot\sin x$

h) $f'(x) = -5\cos^4 x\cdot\sin x$; j) $f'(x) = \cot x$

k) $f'(x) = -x^{-1}(x^2-1)^{-1/2}$; l) $f'(x) = \frac{2x}{(2-x^2)(3-x^2)}$

Aufgabe 58) a) $y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$; $\frac{dx}{dy} = \cos y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) $y' = (1+x^2)^{-1}$.

Aufgabe 59) a) $f'(x) = 6x\cdot e^{3x^2}$; b) $f'(x) = 2\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\sin^2 x}$

c) $(x+n)e^x\cdot x^{n-1}$; d) $f'(x) = 3^x \ln 3$

e) $2x\cdot\ln 2\cdot 2^{x^2}$; f) $f(x) = e^{(x^x)} = \exp(\exp(x\ln x)) \Rightarrow$

$f'(x) = (1+\ln x)x^x\cdot e^{(x^x)}$.

Aufgabe 6o) $y = A\cdot\sin(\omega t+\alpha)$; $v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cdot\cos(\omega t+\alpha)$;

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\sin(t\omega+\alpha)$.

Aufgabe 61) Geschw.: $v = \frac{dx}{dt} = v_e \tan h(\frac{g}{v_e}\cdot t)$

Beschl.: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = g[\cosh(\frac{gt}{v_e})]^{-2}$

Aufgabe 62) $F(x,y) = (xy+1)^2-3=o$; $\frac{dF}{dx} = 2(xy+1)(y+xy') = o$ $y'=-\frac{y}{x}$

$y = \frac{\sqrt{3}-1}{x}$; $y' = -\frac{\sqrt{3}-1}{x^2} = -\frac{y}{x}$.

Aufgabe 63) $f_t'(x) = x^2 - 2tx \overset{!}{=} o$ => Extremwerte $x_1 = o$; $x_2 = 2t$

$f_t''(2t) = 2t > o$ => Tiefpunkt $(2t; -\frac{4}{3}t^3)$

Ortskurve: $x = 2t$ => $y = -\frac{1}{6}x^3$.

Aufgabe 64) a) $\lim\limits_{x \to 1/2} \frac{12x-5}{16x-2} = \frac{1}{6}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln a}{e^x} = \ln a$, d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\cos(2x) - 2\cos(x)}{2e^x - 2x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{-4\sin(2x) + 2\sin(x)}{2e^x - 2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-8\cos(2x) + 2\cos(x)}{2e^x} = -3$

e) Regel nicht anzuwenden: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+5}{x^3-1} = \frac{9}{7}$

f) $x^x = e^{x \ln x}$; wegen Stetigkeit von e wird $x \ln x$ untersucht:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = o$ => $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$

g) Rechengang vgl. f) : $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x} = 1$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x \cdot \ln a}{a^x + x a^x \cdot \ln a} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln a}{1 + x \cdot \ln a} = \ln a$

Aufgabe 65) $x \in [o; 2\sqrt{6}]$, $y \in [o; 6]$. $F(x,y) = x \cdot y$, $y = 6 - \frac{1}{4}x^2$

$F(x) = 6x - 1/4 \cdot x^3$; $F'(x) = 6 - 3/4 \cdot x^2 \overset{!}{=} o$

=> $x_o = 2\sqrt{2}$ => $F_{max} = 2 \cdot F(x_o) = 16\sqrt{2}$.

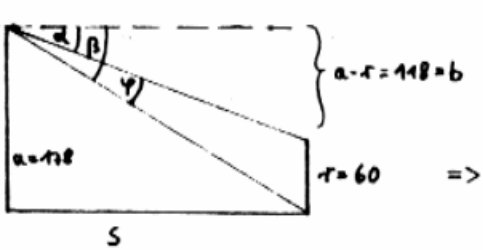
Aufgabe 66) $r \in [o; 3a]$, $h \in [o; 3a]$. $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \pi r^2 a$

Nebenbedingung: $r^2 = 9a^2 - h^2$

also: $V(h) = \frac{1}{3}\pi h(9a^2 - h^2) + \pi a(9a^2 - h^2)$

$V' \overset{!}{=} o$ => $h = a$ => $V(a) = \frac{32}{3}\pi a^3$.

Aufgabe 67)



$\varphi = \beta - \alpha$;

$\tan\alpha = \frac{b}{s}$, $\tan\beta = \frac{a}{s}$

=> $\varphi = \arctan\frac{a}{s} - \arctan\frac{b}{s}$

$\varphi' \overset{!}{=} o$ => $\frac{b}{s^2+b^2} - \frac{a}{s^2+a^2} = o$

=> $s = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{21004} \cong 145$

Maximaler Blickwinkel für s=1,45m : $\varphi \cong 11{,}7°$.

Aufgabe 68) $f'(x_H) = \tan\alpha - \frac{g\cdot x_H}{v_0^2\cos^2\alpha} \overset{!}{=} o \qquad x_H = \frac{\tan\alpha}{g}\cdot v_0^2\cos^2\alpha$.

Weiter gilt: $f''(x_H) = -\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha} < o$,also Maximum.

$f(x_H) = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. $x_W = 2x_H = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

Faßt man x_W als Funktion von α auf, so erhält man einen maximalen Wert für $\alpha=\frac{\pi}{4}$: $x_W = \frac{v_0^2}{g}$.

Aufgabe 69) $x_0=o$; $f(x)= \cos x$; $f(o)= 1$; $f'(o)= o$; $f''(o)= -1$; $f'''(o)= o$; $f^{(4)}= 1$.

$\Rightarrow f(x) = 1 + o - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + R_4(x,o)$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Aufgabe 7o) a) $\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{c}{2}x^2$; b) $\frac{1}{m}e^{mx}$; c) $-\frac{1}{a}\cos(ax)$

d) $\frac{1}{b(n+1)}(a+bx)^{n+1}$; e) $\frac{1}{b}\cdot\ln(a+bx)$;

f) Subst. $u= \frac{x^3}{3} - 2x^2$, $\frac{du}{dx}=x^2-4x$; $\int u^3du = \frac{1}{4}(\frac{x^3}{3}-2x^2)^4$

g) $-e^{\cos x}$; h) $\frac{1}{2}\cdot\ln^2x$; j) $\ln\sin x$ $(\cot x = \frac{\cos x}{\sin x})$

k) $\cos x + x\cdot\sin x$ (partielle Integr.) ; l) $x\cdot\ln x - x$ (p.I.)

m) $\frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x + \frac{1}{2}x$ (p.I.) ; n) $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$ (2×p.I.)

o) Subst. $u=e^x$, $du=u dx$; $\int(u^2+1)^{-1}du = \arctan u$
Resub.: $\rightarrow \arctan e^x$

p) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)$ (mehrmalige part. Int.)

q) $x\cdot\ln^3x - 3x\cdot\ln^2x + 6x\cdot\ln x - 6x$; r) $-\frac{1}{b}\cdot\ln(a+b\cos x)$

s) $\frac{1}{4}x^4(\ln x - \frac{1}{4})$; t) $\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a})$

u) $\frac{1}{ab}\arctan(\frac{b}{a}x)$; v) $x\cdot\ln^n x - n\int\ln^{n-1}x\,dx$ (vgl.Bronstein)

w) $\sin^3x = \sin x\cdot\cos^2x \Rightarrow \int\sin^3x\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3x$

x) $\frac{1}{n}(-\cos x\cdot\sin^{n-1}x + (n-1)\int\sin^{n-2}x\cdot dx)$

Lösungen zu den Übungsaufgaben 71 - 78

Aufgabe 71) a) $\frac{x+13}{x^2-4x-5} = \frac{x+13}{(x-5)(x+1)} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x+1}$

$\Rightarrow x+13 = (A_1+A_2)x + A_1-5A_2 \quad \Rightarrow A_1 = 3\ ,\ A_2 = -2$

also: $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx = \int \frac{3}{x-5}\,dx - \int \frac{2}{x+1}\,dx = 3\ln(x-5) - 2\ln(x+1)$

b) $2\ln(x-3) + 4\ln(x-0{,}5)$; c) $\left[5\ln(x+0{,}5) - 4\ln(x+1)\right]\cdot\frac{1}{2}$

d) $2\ln(x-5) + \frac{3}{x-5}$ (Ansatz: $\frac{2x-13}{(x-5)^2} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{(x-5)^2}$)

e) $3\ln(x+2) + \frac{5}{x+2}$; f) $\frac{2x-10}{x^2+2x+10} = \frac{2x+2}{x^2+2x+10} - \frac{12}{x^2+2x+10}$

$\Rightarrow$ integriert ergibt sich: $\ln(x^2+2x+10) - 4\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)$

Aufgabe 72) a) $[x^4-x^3-2x^2]_0^2 = 0$; b) $[-\cos u]_0^2 = 1-\cos 2 \sim \sqrt{2}$

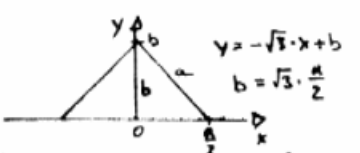
c) $\frac{1}{2}[\cos 3 - \cos(2x+3)]$; d) $ab(x_2\ln x_2 - x_2 - x_1\ln x_1 + x_1)$

e) $\frac{3}{2}m^2 - \ln 2$; f) $3a\cdot 5^{1/3}$.

Aufgabe 73) $\int_0^1 e^x dx = e-1$. ξ so, daß gilt: $\int_0^\xi e^x dx = \frac{1}{3}(e-1)$

$\Rightarrow e^\xi - 1 = \frac{1}{3}(e-1) \Rightarrow \xi = \ln(e+2) - \ln 3$.

Aufgabe 74) Das Dreieck werde dargestellt durch



$$y = -\sqrt{3}\cdot x + \sqrt{3}\cdot\frac{a}{2} \ .$$

es folgt: $V = 2\pi\int_0^{a/2} y^2 dx = 2\pi\int_0^{a/2}(3x^2-3ax+\frac{3}{4}a^2)\,dx \Rightarrow V = \frac{a^3\pi}{4}$.

Aufgabe 75) $F = \int_{-1/2}^{1}(2x^3-3x^2+1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x\right]_{-1/2}^{1} = \frac{27}{32}$.

(Schnittpunkte der Kurven $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$).

Aufgabe 76) ungerade Fkt.: Punktsymmetrie $\Rightarrow \int_{-a}^{a}\ldots = 0$

gerade Fkt.: y-Achsensymmetrie $\Rightarrow \int_{-a}^{a}\ldots = 2\cdot\int_0^a\ldots$

Aufgabe 77) $F = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x\,dx + \int_2^3 3\,dx = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{29}{6}$.

Aufgabe 78) Durch Differentialsubst. erhalten wir aus

$V = \pi\int x^2 dy$ mit $dy = (3-2x)\,dx$ den Ausdruck $V = \pi\int x^2(3-2x)\,dx$

Dieser Ausdruck wird integriert in folgenden Grenzen:
i) $[0;\frac{3}{2}]$ ii) $[\frac{3}{2};3]$. $\Rightarrow V_1 = \frac{27}{32}\pi$ und $V_2 = \frac{459}{32}\pi$

Für das gesuchte Volumen gilt: $V = V_2 - V_1 = \frac{27}{2}\pi$.

Aufgabe 79) a) mit $\frac{\pi}{5} \triangleq 36^\circ$ erhält man: $4\cdot\frac{2}{5}(\cos(184^\circ+36^\circ)+i\sin(184^\circ+36^\circ))$

$= \frac{8}{5}(\cos 220^\circ + i\sin 220^\circ) = \frac{8}{5}(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9})$.

b) mit $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$ ergibt sich:

$(\sqrt{3}+2i)+i = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(\sqrt{6}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})) =$

$= 6\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 6\sqrt{2}i$ da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

c) ω und ω^2 eingesetzt ergibt:

$a^2 + ab[(\cos\frac{8\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3}) + i(\sin\frac{8}{3}\pi + \sin\frac{4}{3}\pi)] + b^2$

(wegen $\cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$);

$\cos\frac{8}{3}\pi = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$; $\sin\frac{8}{3}\pi = +\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2$.

Aufgabe 80) a) $[5(\cos(0{,}6435)+i\sin(0{,}6435))]^5 = 3125(\cos 3{,}2175 + i\sin 3{,}2175)$

b) $(\cos\pi + i\sin\pi)^7 = -1$ wegen $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$.

c) $64(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = -64$ (vgl.b))

Aufgabe 81) a) $L = \{1, i, -i, -1\}$.

b) $\sqrt[3]{i} = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$ mit $r_n = 1$, $\varphi_n = \frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$.

c) $r_n = 1$, $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11\pi}{6}$.

d) $r_n = \sqrt[3]{2}$, $\varphi_n = \frac{11}{18}\pi$, $\frac{23}{18}\pi$, $\frac{35}{18}\pi$.

e) $r_n = \sqrt[5]{9}$, $\varphi_n = \frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{10}$, $\frac{13\pi}{10}$, $\frac{17\pi}{10}$.

Aufgabe 82) a) $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \ln(e^{i\frac{\pi}{4}}) = i\frac{\pi}{4}$;

aber da $e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

lautet das exakte Ergebnis: $(8k+1)i\frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{-3-3i}{3-3i} = \frac{(-3-3i)(3+3i)}{18} = -i$

Aufgabe 83) a) $r = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$; $\varphi = \arctan 1 = 45^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{4}$

b) $r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $\varphi = \arctan(-\frac{1}{2}) \sim -26{,}6^\circ \mathrel{\hat{=}} -0{,}147\pi$

Aufgabe 84) Ansatz über die normierte Mitternachtsgleichung:

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

a) $x_1 = -2+i \quad x_2 = -3+i$

b) $x_1 = 2i \quad x_2 = -1$

AUfgabe 85) a) $z_0' = -(x_0+iy_0) = r_0(\cos(\varphi_0+\pi)+i\sin(\varphi_0+\pi))$

$= -r\ (\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$

b) $z_0' = x_0 - iy_0 = r_0(\cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0)$

c) $z_0' = -x_0+iy_0 = r_0(-\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$

d) $z_0' = y_0+ix_0 = r_0(\cos(-\varphi_0+\frac{\pi}{2})+i\sin(-\varphi_0+\frac{\pi}{2}))$

$= r\ (\sin\varphi_0+i\cos\varphi_0)$

bzw. $z_0' = -(y_0+ix_0) = r_0(\cos(\frac{3}{2}\pi-\varphi_0)+i\sin(\frac{3}{2}\pi-\varphi_0))$

$= -r_0(\sin\varphi_0+i\cos\varphi_0)$

Aufgabe 86) a) Die Punkte auf dem Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1 .

b) Die Punkte zwischen den Kreisen um den Punkt $z = -1+i$ mit den Radien 1 bzw. 2 .

Aufgabe 87) a) Normalenvektor der Ebene ;

$$\vec{e}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor der Geraden :

$$\vec{r}_t = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

Parallelität $\Leftrightarrow$ $\vec{e}_E \cdot \vec{r}_t = 0$

also: $2(1+t)+t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{2}{3}$

Durch Punktprobe erhält man : $g_{-\frac{1}{3}} \in E$.

Aufgabe 87) Fortsetzung

b) $g_t: \begin{cases} x_1 = 2+t+\lambda(1+t) \\ x_2 = 1 \quad +\lambda(1-t) \\ x_3 = 1+t+\lambda t \end{cases}$

Einsetzen in E ergibt: $\lambda(2+3t) = -(2+3t)$

für $t \neq -\frac{2}{3}$ erhält man : $\lambda = -1$

=> Schnittpunkt $S_t(1/t/1)$.

c) $g_t \perp E \iff \vec{e}_E \times \vec{r}_t = o$

also: $\begin{vmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ 1+t & 1-t & t \\ 2 & o & 1 \end{vmatrix} = (1-t)\vec{x}_1 - (1-t)\vec{x}_2 + 2(t-1)\vec{x}_3 = o$

=> $t_2 = 1$

d) $h_t: \begin{cases} x_1 = \mu \\ x_2 = -\mu+t+1 \\ x_3 = 2\mu \quad -1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ Wird in die Parameterdarstellung von g_t (s.b)) eingesetzt.

=> $\lambda = -1 \wedge \mu = 1$ und somit $S_t'(1/t/1)$

e) E_t in Parameterdarstellung:

$E_t: \vec{X} = \vec{S}_t' + \alpha\vec{r}_g + \beta\vec{r}_h$; r_g, r_h Richtungsvekt. g_t, h_t

Umformen in Koordinatengleichung:

=> $E_t: (2-t)x_1 - (2+t)x_2 - 2x_3 = -t(3+t)$

$x_1 = x_2 = x_3 = o$ => $-t(3+t) = o$; $t_3 = o$, $t_4 = -3$

f) Normalenvektoren der Ebenen: $\vec{e}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ o \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_{-2} = \begin{pmatrix} 2 \\ o \\ -1 \end{pmatrix}$

$\measuredangle(E, E_{-2}) = \measuredangle(\vec{e}_E, \vec{e}_{-2})$:

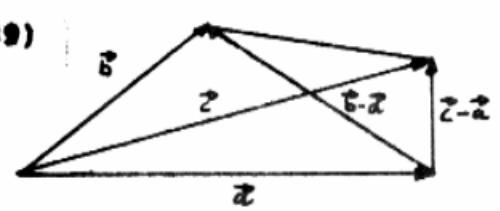
$\cos\varphi = \frac{\vec{e}_E \cdot \vec{e}_{-2}}{|\vec{e}_E| \cdot |\vec{e}_{-2}|} = \frac{3}{5}$ => $\varphi = 53{,}13^\circ$

Aufgabe 88) $\vec{u} \times \vec{v} = 1 = |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\measuredangle u,v)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\measuredangle u,v)$

=> $\tan(\measuredangle u,v) = -1$ => $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

Aufgabe 89)



$\frac{1}{2}[(\vec{b}\times\vec{a}) + (\vec{c}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c}) + (\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})]$

$= \frac{1}{2}[(\vec{b}\times\vec{a}) + (\vec{c}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c}) + (\vec{b}\times\vec{c}) - (\vec{a}\times\vec{c}) - (\vec{b}\times\vec{a}) + (\vec{a}\times\vec{a})] = \vec{o}$

wegen $(\vec{a}\times\vec{a}) = \vec{o}$ und $(\vec{c}\times\vec{b}) = -(\vec{b}\times\vec{c})$.

Aufgabe 9o) Drei Vektoren sind linear abhängig, wenn gilt:

$\alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b} = \vec{c}$, mit nichttrivialer Lösung für α und β .

a) $\alpha + o = 1$ $(^1)$ Aus $(^2)$ und $(^3)$ folgt $\alpha=\beta=o$.
$-\alpha + \beta = o$ $(^2)$ Aus $(^1)$ ergibt sich dann ein
$\alpha + \beta = o$ $(^3)$ Widerspruch => linear unabhängig.

b) $\alpha + o = 1$ $(^1)$ Aus $(^1)$ und $(^2)$ folgt $\alpha=\beta=1$.
$-\alpha + \beta = o$ $(^2)$ In $(^3)$ eingesetzt ergibt sich eine
$\alpha + \beta = 2$ $(^3)$ wahre Aussage => linear abhängig.

Aufgabe 91) $F_1 = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{14}$; $F_2 = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{29}$

$F_3 = \frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{11}$; $F_4 = \frac{1}{2}|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$F_5 = \frac{1}{2}|\vec{a}\times(\vec{c}-\vec{b})| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$; $F_{ges} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$

Aufgabe 92) Ansatz: $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \vec{b}$.

$\vec{b}$ steht senkrecht zu $(4,-3,5)$ <=> $4b_1 - 3b_2 + 5b_3 = o$ $(^o)$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem:

$(^1)$ $1 = 2\lambda + b_1$ Aus $(^1)$ und $(^3)$ folgt $b_3 = -2-b_1$
$(^2)$ $-2 = -\lambda + b_2$ Aus $(^2)+2\ (^3)$ folgt $b_2 = \frac{1}{2}(-3-b_1)$
$(^3)$ $-3 = -2\lambda + b_3$ Eingesetzt in $(^o)$: $b_1=11$, $b_2=-7$, $b_3=-13$
b_1 in $(^1)$ ergibt $\lambda = -5$.

Ergebnis: $\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = -5\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}11\\-7\\-13\end{pmatrix}$.

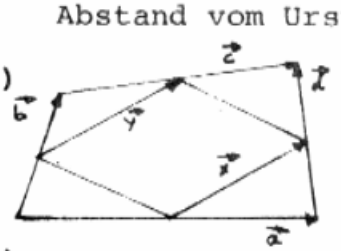
Aufgabe 93) Normalenform: $\vec{x}\cdot\vec{n} - \vec{p}\cdot\vec{n} = o$, mit

$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{p} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - 7 = o$.

Hessesche Normalenform: $\vec{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{7}{\sqrt{6}} = o$.

Abstand vom Ursprung: $\frac{7}{\sqrt{6}}$

Aufgabe 94)

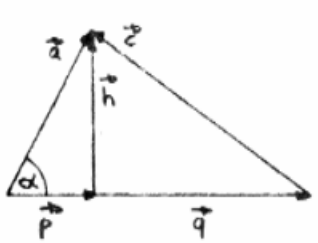


$\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$

Zu zeigen: $\vec{x} = \vec{y}$

$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{y}$

Aufgabe 95)



$|\vec{h}| = |\vec{a}|\cos(90^o-\alpha) = |\vec{a}|\sin\alpha$

$|\vec{h}| = |\vec{c}|\cos(90^o-(90^o-\alpha)) = |\vec{c}|\cos\alpha$

$|\vec{p}| = |\vec{a}|\cos\alpha$, $|\vec{q}| = |\vec{c}|\sin\alpha$

=> $|\vec{h}|^2 = |\vec{p}||\vec{q}|$