

Wegeprobleme in Graphen Übungsblatt 04

Ausgabe: 19.06.

Besprechung am 27.06.

Ablauf der Übungen: Ausgabe der Übungen spätestens 8 Tage vor dem nächsten Übungstermin in der Vorlesung (pdf auf der Vorlesungsseite). Abgabe spätestens am Tag vor der Übung in der Vorlesung oder per E-Mail an Lewandowski@fmi.uni-stuttgart.de.

1. (leicht) **Längste Wege:** In azyklischen Graphen sind auch längste Wege wohldefiniert. Entwerfen Sie einen Algorithmus für längste Wege in azyklischen Graphen.

Hat ein Graph keine Zyklen positiver Länge, so sind längste Wege auch für allgemeine Graphen definiert. Entwerfen Sie auch für diesen Fall einen Algorithmus.

Welchen Aufwand in O -Notation haben Ihre Algorithmen?

2. (leicht–mittel) **Dijkstra vs. A^* -Algorithmus:** Dials Implementierung des Dijkstra-Algorithmus benötigt aufgrund der Eigenschaft

$$\max\{D(v) \mid v \in R\} \leq \min\{D(v) \mid v \in R\} + \gamma_{\max}$$

lediglich $\gamma_{\max} + 1$ Buckets. Obige Eigenschaft gilt offensichtlich nicht für den A^* -Algorithmus – aber vielleicht folgende? Sei $ed_z(\cdot)$ eine konsistente Schätzfunktion. Zeigen oder widerlegen Sie: Es gilt:

$$\max\{D(v) + ed_z(v) \mid v \in R\} \leq \min\{D(v) + ed_z(v) \mid v \in R\} + \gamma_{\max}$$

3. (mittel) **Dials Algorithmus:** Aufgrund der Intervalleigenschaft kann kein Bucket mit Index größer als $\max\{d(v) \mid v \in V\} + \gamma_{\max}$ angesprochen werden. Gibt es Beispiele, bei denen dieser Worst-Case auch erreicht wird? Wie groß ist $\max\{d(v) \mid v \in V\}$ in Abhängigkeit von γ_{\max} maximal?
4. (mittel) **$\sqrt{\gamma_{\max}}$ -Bucket-Variante:** Um den Worst-Case zu erreichen, genügt eine Liste mit $\gamma \equiv \gamma_{\max}$. Dabei ist jeder Knoten nur einmal im Überlaufbucket. Gibt es Beispiele bei denen $\Theta(n)$ Knoten sich $\Theta(\sqrt{\gamma_{\max}})$ mal im Überlaufbucket befinden? (Anmerkung: die Laufzeitabschätzung bzgl. O -Notation ändert sich dadurch nicht.)
5. (mittel) **Buckets in Graphen mit negativen Kantengewichten:** Wir haben Buckets bisher nur in Kürzeste-Wege-Algorithmen für Graphen mit positiven Kantengewichten betrachtet. Überlegen Sie, inwieweit man Buckets auch in Kürzeste-Wege-Algorithmen für Graphen, in denen auch negative Kantengewichte erlaubt sind, sinnvoll verwenden kann.
6. (mittel) **$\log \gamma_{\max}$ -Bucket-Variante:** Führen Sie auf einem Graphen mit $n \geq 7$ Knoten den Dijkstra-Algorithmus mit der $\log \gamma_{\max}$ -Bucket-Variante einmal ohne und einmal mit Beachtung von Goldbergs Caliber-Lemma durch. Wählen Sie die Kantengewichte aus dem Bereich $5 \leq \gamma(\cdot) \leq 20$. Der längste kürzeste Weg sollte so lang sein, dass der Inhalt des Überlaufbuckets wenigstens einmal neu verteilt werden muss. Versuchen Sie die verschiedenen Fälle in Ihrem Beispiel unterzubringen, also z.B. mehrere Knoten mit gleichem minimalem $D(\cdot)$ -Wert, Buckets mit leerem Intervall, ...