

Übungsblatt 14

Ausgabe: 08.02. Abgabeschluss: Mittw., 15.02., 9:45 Uhr, eClaus.informatik.uni-stuttgart.de

Abgabe erfolgt ausschließlich elektronisch über eClaus.informatik.uni-stuttgart.de – versuchen Sie nach Möglichkeit die Abgabe nicht in der letzten Minute zu machen!

Von jedem Aufgabenblatt werden maximal 20 Punkte auf den Schein angerechnet.

Ausblick auf das kommende Semester: Ich werde in der Vorlesung Einführung in die Informatik II von Prof. Claus eine Übungsgruppe für Autips anbieten (Termin voraussichtlich Dienstags 9:45 Uhr). Ich plane dabei für den Anfang jeder Übungsstunde ein paar Minuten Wiederholung ein für den Fall, dass Prof. Claus auf Stoff des ersten Semesters zurückgreift, den wir hier nicht durchgenommen haben.

1. (3+1+5 Punkte) **Transitive Hülle:** Die Transitive Hülle G_{tH} eines Graphen G erweitert die Kantenmenge so, dass es zwischen zwei Knoten u und v genau dann eine Kante (u, v) gibt, wenn es im Graphen G einen Weg von u nach v gibt. Folgender Algorithmus ändert die Adjazenzmatrix A eines Graphen so ab, dass diese am Ende der Transitiven Hülle des Graphen entspricht.

```
for i in 1..n loop A(i,i):=1 end loop; -- der leere Weg verbindet i mit i
for k in 1..n loop
  for i in 1..n loop
    for j in 1..n loop
      if A(i,k)=1 and A(k,j)=1 then -- es existiert ein Weg über den Knoten k
        A(i,j):=1;
      end if;
    end loop;
  end loop;
end loop;
```

- (a) (mittel, 3 Punkte) Begründen Sie, warum der Algorithmus die Transitive Hülle eines Graphen korrekt berechnet (Hinweis: nach dem ersten Durchlauf durch die k -Schleife sind alle Kanten (i, j) im durch die Adjazenzmatrix A_{ij} dargestellten Graphen vorhanden (d.h. $A(i, j)=1$), die entweder bereits im Ausgangsgraphen vorhanden sind oder für die es einen Weg gibt, der nur über den Zwischenknoten k führt – setzen Sie den Beweis induktiv fort).
- (b) (leicht, 1 Punkte) Geben Sie in O -Notation an, welchen Aufwand der Algorithmus in Abhängigkeit von der Knotenanzahl n hat.
- (c) (schwer, 5 Punkte) In der Regel liegt der Graph als Adjazenzliste vor, sodass die Abfrage, ob $A(i, j)=1$, nicht in einem Schritt erfolgen kann. Will man direkt auf der Adjazenzliste

arbeiten, so muss man zunächst die Knotenliste durchsuchen, um den Knoten i zu finden und in dessen Kantenliste überprüfen, ob es dort eine Kante zum Knoten j gibt.

Beschreiben Sie, wie die Knoten- und Kantenlisten angeordnet sein sollten, um unnötige Arbeit zu ersparen.

Schätzen Sie ab, wie groß der Aufwand zur Berechnung der Transitiven Hülle ist, wenn man direkt auf der Adjazenzliste arbeitet.

Wie groß wäre der Aufwand, wenn man zunächst die Adjazenzliste in eine Adjazenzmatrix umwandelt, dann mit der Matrix die Transitive Hülle berechnet und danach die Matrix wieder in eine Adjazenzliste zurückwandelt?

Geben Sie Ihre Abschätzungen jeweils in O -Notation an und begründen Sie Ihre Antworten.

2. (4+5 Punkte, mittel–schwer) **Zusammenhangskomponenten:** Wir wollen hier nun die Tiefensuche verwenden, um die schwachen Zusammenhangskomponenten eines Graphen zu bestimmen. Zum ersten Knoten sollen also alle weiteren Knoten bestimmt werden, die über eine oder mehrere Kanten mit dem ersten Knoten verbunden sind. Sind diese bestimmt, so führen wir den Algorithmus erneut für die verbleibenden Knoten durch. Der Algorithmus läuft in zwei Schritten:

- Schreiben Sie eine Funktion, die aus einem Graphen G in Adjazenzlistendarstellung einen neuen Graphen G' erzeugt, bei dem für jede Kante (i, j) sowohl (i, j) als auch (j, i) im Graphen vorkommt (achten Sie darauf, dass Sie Kanten nicht doppelt einfügen).
- Verwenden Sie die Tiefensuche, um die Knoten zu ermitteln, die durch Wege miteinander verbunden sind. Überlegen Sie sich, warum wir im ersten Aufgabenteil dazu die Kanten in beiden Richtungen im Graphen einfügen – was würde sich am Ergebnis ändern, wenn man direkt auf dem ursprünglichen Graphen arbeitet?

Sie können als Testfälle die Zufallsgraphen vom letzten Aufgabenblatt verwenden, vermutlich müssen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Kante im Graphen vorkommt, senken, damit nicht stets alle Knoten über Wege miteinander verbunden sind.

Geben Sie den Aufwand (als Kommentarzeilen eingefügt) in O -Notation an.

3. (5 Punkte, wichtig) **Rückblick auf das erste Semester:** Schreiben Sie (für sich) eine kurze Zusammenfassung des Stoffs des ersten Semesters (diese Zusammenfassung brauchen Sie nicht in eClaus abzugeben). Geben Sie eine Liste von 10 Punkten an, von denen Sie denken, dass sie besonders wichtig sind. Diese Punkte können sich sowohl auf den Stoff der Informatik im ersten Semester beziehen als auch allgemein sein (zum Beispiel in Hinblick auf die kommenden Semester).

Stellen Sie einige Fragen zusammen, die aus Ihrer Sicht noch nicht geklärt wurden.