Universität Stuttgart
Fakultät 5 Institut FMI
EfidI 1 Zusatzkurs

WS 2005/2006
W. Schmid
21. Oktober 2005

Aufgabenblatt 2

Dieses Aufgabenblatt dient in erster Linie als Formelsammlung und wird nur bei Bedarf besprochen.

Aufgabe 1 : Rechenregeln für Summenzeichen
Zeigen Sie: für $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{lcl} \sum_{i=1}^{n}(a \cdot a_i) & = & a \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \\ \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) & = & (\sum_{i=1}^{n} a_i) + (\sum_{i=1}^{n} b_i) \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j & = & (\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot (\sum_{j=1}^{m} b_j) \end{array}$$

Aufgabe 2 : Summe der ungeraden Zahlen
Leiten Sie folgende Formel mittels Koeffizientenvergleich oder Indexverschiebung her und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

$$1 + 3 + 5 + .. + 2n - 3 + 2n - 1 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 \quad = \quad n^2$$

Aufgabe 3 : Die Bernoullische Ungleichung
Zeigen Sie die Benoullische Ungleichung mittels vollständiger Induktion: Sei $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, dann gilt

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Aufgabe 4 : Die geometrische Summe
Zeigen Sie die Formel für die geometrische Summe mittels vollständiger Induktion:
Sei $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = q^0 + q^1 + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Aufgabe 5 : Die Binomische Formel
Zeigen Sie die Binomische Formel mittels vollständiger Induktion:
Sei $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann gilt

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$$

Aufgabe 6 : Partialbruchzerlegung

Leiten Sie für die folgenden Summen eine explizite Darstellung her und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+k)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1) \cdot (i+2)}$$

Aufgabe 7 : diverse Summen

Leiten Sie folgende Formeln her und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{n} i &= \tfrac{n^2+n}{2} \\
\textstyle\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\textstyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i &= 2 - \tfrac{1}{2^{n-1}} - \tfrac{n}{2^n} \\
\textstyle\sum_{i=1}^{n} \log i &= n \log n - \tfrac{n}{\ln 2} + O(\log n) \\
\textstyle\sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} n+i \\ i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n+m+1 \\ m \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Allgemeine Hinweise:
Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).
Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter:
http://www.info2.de.vu
http://www.zusatzkurs.de.vu