Universität Stuttgart
Fakultät 5, Institut FMI
EfidI 1 Zusatzkurs

WS 2005/2006
Wolfgang Schmid
18. Januar 2006

Aufgabenblatt 10

Besprechung am Dienstag, den 25 Januar 2006, 8:00 Uhr V38.01

Aufgabe 1: (Sortieren mit Suchbäumen)

Beschreiben Sie kurz, wie man binäre Suchbäume zum Sortieren benutzen kann. Ein binärer Suchbaum soll durch Einfügen von Elementen aus einer Liste neu aufgebaut werden. Wie viele Vergleichsoperationen werden benötigt, wenn die Werte der Liste

a) aufsteigend vorsortiert,
b) absteigend vorsortiert,
c) gut durchmischt

sind.

Aufgabe 2 (Anwendungen der Regeln von de l'Hospital)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit den Regeln von de l'Hospital

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{\sin 4x} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+5}{2x^2+3x+1} = 2$

c) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = -\frac{3}{5}$

d) $\lim_{x\downarrow 0}(x^2 \ln x) = 0$

e) $\lim_{x\downarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} = \infty$

f) $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt[3]{x^3-x^2}) = \frac{1}{3}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-\arctan x}{x^2\ln(1+x)} = \frac{1}{6}$

h) $\lim_{x\uparrow 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e$

i) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2$

j) $\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$

k) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$

l) $\lim_{x\downarrow 0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = 1$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte nach der Regel von L'HOSPITAL:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$ (b) $\lim_{x\to\infty} xe^{-\sqrt{x}}$ (c) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 x},\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right).$$

b) $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine k-fache Nullstelle des Polynoms $P(x)$, das heisst, es gelte

$$P(x_0) = P'(x_0) = \ldots = P^{(k-1)}(x_0) = 0 \text{ und } P^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Berechnen Sie $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{(x-x_0)^j}$ für $j = 0, 1, \ldots, k$.

Aufgabe 5 (O-Notation)

Gegeben ist die Funktion f(n)= $5\,n^2+ n$. Zeigen Sie f liegt in O(n^2)durch geeignete Wahl der Konstanten c und n_0. Zeigen Sie f liegt nicht in O(n).

Aufgabe 6 (O-Notation)

Bestimmen Sie für den zeitlichen Aufwand in Elementaroperationen *T(n)* die entsprechenden Ordnungen der Laufzeitkomplexitäten *O(n)*:

a) $T(n) = 237 + \log n + 20\ n^2 + 1.2^n$
b) $T(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n\text{-}1 + n$
c) $T(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \ldots + a_i n^i$ mit konstantem $a_i \neq 0$
d) $T(n) = \log_2 n + \log_{10} n$
e) $T(n) = (\log_{10} n + c)\ (n+1/n)$
f) $T(n) = c^n + n^c$

Aufgabe 7 (Baumoperationen)

Sei n die Anzahl der Knoten eines Baumes. Bestimmen Sie Algorithmen zur Bestimmung folgender Probleme: depth, countnodes, countleaves. Welche Laufzeit haben Ihre Algorithmen gemessen in der O Notation?

Allgemeine Hinweise:

- Bei weiteren Fragen, wenden Sie sich bitte an W. Schmid (sltsoftware@yahoo.de).
- Weitere Hinweise finden Sie auf unserer Veranstaltungswebseite unter:
  http://www.info2.de.vu
  http://www.zusatzkurs.de.vu