Aufgabe 1: (Binärbaume)

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Jeder Knoten eines Binärbaums hat zwei nichtleere Teilbäume

(2) Beim Löschen eines Elements aus einem Binärbaum ändert sich die Höhe dieses Baumes.

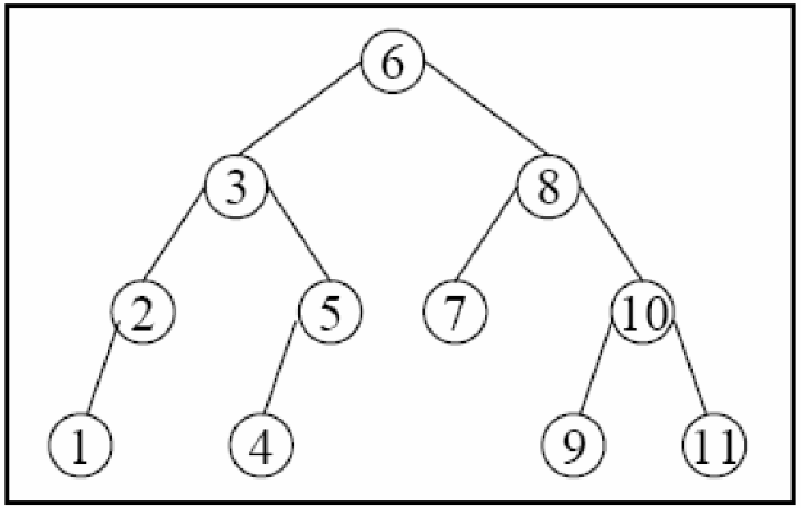
(3) Beim Einfügen eines Elements in einen Binärbaum kann die Höhe dieses Baumes unverändert bleiben.

(4) Die Inorder-Ausgabe eines Suchbaums ist immer Sortiert.

(5) Ein Binärbaum der Höhe 4 besitzt höchstens 15 Knoten.

(6) Ein Binärbaum mit der Höhe 5 besitzt mindestens 7 Knoten.

Aufgabe 5: Löschen Sie nacheinander die folgenden Elemente aus dem unten abgebildeten Suchbaum **9, 8, 7, 3, 6.**

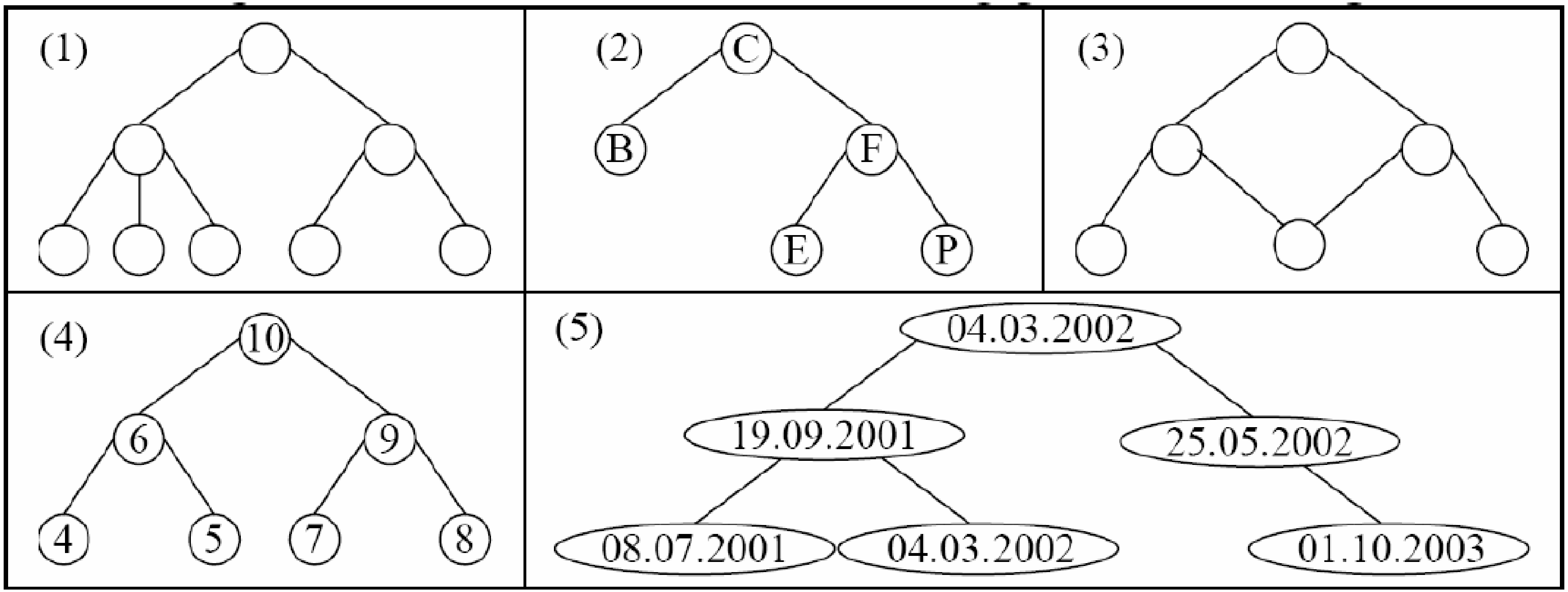


Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass jeder Binärbaum mit n Blättern, n-1 innere Knoten hat.

Aufgabe 2: (Klassifikation)

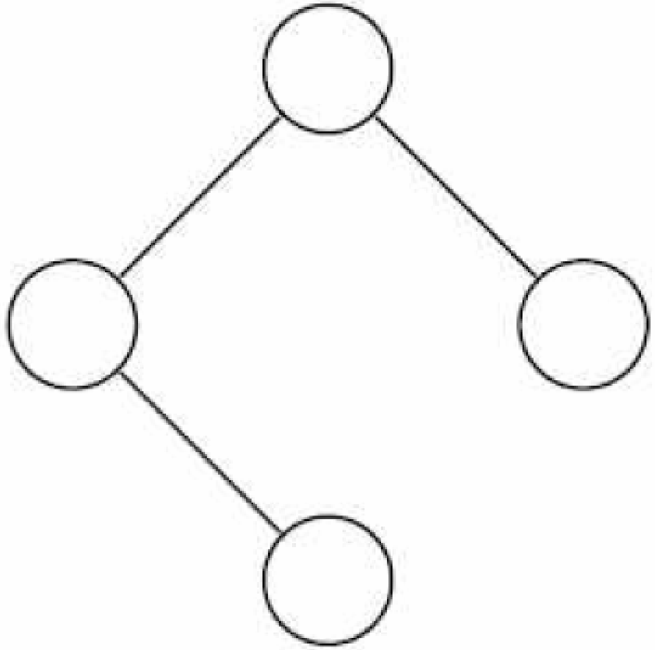
In der Vorlesung haben wir verschiedene Gruppen von Bäumen kennen gelernt: Gruppe **A**: *Suchbäume,* Gruppe **B**: *Binärbäume,* Gruppe **C**: *Bäume* Gruppe **D**: *Graphen*

Diese stehen in einem Hierarchieverhältnis $D \supseteq C \supseteq B \supseteq A$. Ordnen Sie jede der nachfolgenden Strukturen einer dieser Gruppen zu und begründen Sie kurz, warum die Struktur zur angegebenen Hierarchie gehört.



Aufgabe 10: (Baumformen)

Betrachten Sie den nebenstehenden binären Suchbaum. Mit welcher relativen Häufigkeit wird dieser Baum durch das sukzessive Einfügen der Schlüssel aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ erzeugt? Es wird mit einem leeren Baum gestartet; jede Permutation der Reihenfolge des Einfügens soll gleich wahrscheinlich sein.



Aufgabe 11: (Traversierung)

Gegeben ist folgende Inorder Reihenfolge der Knoten:

I N F I S T L U S T I G !

Geben Sie zwei dazu passende binäre Bäume an. Ferner sei die Preorder-Folge gegeben:

U I N I F T S L T S G I !

Wie sieht der Baum aus, für den diese Preorder-Folge und die Inorder-Folge gilt? Geben Sie einen Algorithmus an, der aus einer gegebenen Inorder- und einer Preorder-Folge den zugehörigen Baum bestimmt (die Knoten sind eindeutig bezeichnet).

Aufgabe 12: (Bäume)

Wie viele Bäume lassen sich aus einem gegebenen Binärbaum mit n Knoten durch Anhängen eines neuen Knotens konstruieren? Verallgemeinern Sie Ihr gefundenes Ergebnis auf Bäume vom Grad m.

Aufgabe 13: (Bäume)

Binäre Bäume sind durch Angabe von Inorder und einer zweiten Besuchsreihenfolge vollständig charakterisiert. Zeichnen Sie jeweils den Baum, der durch die angegebenen Strategien festgelegt ist.

a) Preorder: ACBDEXYWZ
   Inorder: BCEDAWYZX

b) Inorder: ZBXECYA
   Postorder: XBZCEYA

Aufgabe 2 (Anwendungen der Regeln von de l'Hospital)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit den Regeln von de l'Hospital

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\sin 4x} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+5}{2x^2+3x+1} = 2$

c) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = -\frac{3}{5}$

d) $\lim_{x\downarrow 0}(x^2 \ln x) = 0$

e) $\lim_{x\downarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} = \infty$

f) $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) = \frac{1}{3}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^2 \ln(1+x)} = \frac{1}{6}$

h) $\lim_{x\downarrow 0}(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e$

i) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$

j) $\lim_{x\downarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$

k) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$

l) $\lim_{x\downarrow 0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x = 1$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte nach der Regel von l'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-\sqrt{x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x}\right).$$

b) $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine k-fache Nullstelle des Polynoms $P(x)$, das heisst, es gelte

$$P(x_0) = P'(x_0) = \ldots = P^{(k-1)}(x_0) = 0 \text{ und } P^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{(x-x_0)^j}$ für $j = 0, 1, \ldots, k$.

Aufgabe 5 (O-Notation)

Gegeben ist die Funktion $f(n)= 5\, n^2 + n$. Zeigen Sie f liegt in $O(n^2)$ durch geeignete Wahl der Konstanten c und n_0. Zeigen Sie f liegt nicht in $O(n)$.

Aufgabe 6 (O-Notation)

Bestimmen Sie für den zeitlichen Aufwand in Elementaroperationen $T(n)$ die entsprechenden Ordnungen der Laufzeitkomplexitäten $O(n)$:

a) $T(n) = 237 + \log n + 20\, n^2 + 1.2^n$
b) $T(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 + n$
c) $T(n) = a_0 + a_1\, n + a_2\, n^2 + a_3\, n^3 + \ldots + a_i\, n^i$ mit konstantem $a_i \neq 0$
d) $T(n) = \log_2 n + \log_{10} n$
e) $T(n) = (\log_{10} n + c)\,(n + 1/n)$
f) $T(n) = c^n + n^c$