



Aufgabenblatt 12

Abgabe: 27.01.2008, 24.00 Uhr

1. Zahlenbeziehungen (mittel)

(8+6+6 Punkte)

Für eine natürliche Zahl a sei $\Gamma^*(a)$ die Summe der Teiler von a , ohne hierbei a selbst mitzuzählen.

Es sei also

$$T'(a) = \{i \mid i \text{ teilt } a \text{ und } i \neq a\}$$

$$\text{dann ist } \Gamma^*(a) = \sum_{i \in T'(a)} i$$

Speziell:

$$\begin{array}{llll} \Gamma^*(1) = 0, & \Gamma^*(2) = 1, & \Gamma^*(3) = 1, & \Gamma^*(4) = 3, \\ \Gamma^*(5) = 1, & \Gamma^*(6) = 6, & \Gamma^*(7) = 1, & \Gamma^*(8) = 7 \text{ usw} \end{array}$$

Die Abbildung $\Gamma^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert einen gerichteten Graphen (\mathbb{N}, E) durch $(x, y) \in E \iff \Gamma^*(x) = y$. Da wir uns auf die Knotenmenge \mathbb{N} beschränken, geht also von 1 keine Kante aus.

Man sieht, dass $\Gamma^*(a) = 1$ genau dann wenn ist, wenn a eine Primzahl ist.

Es gibt Zahlen a mit $\Gamma^*(a) = a$, z.B. $a = 6$ und $a = 28$; solche Zahlen nennt man "vollkommene Zahlen". Meist ist $\Gamma^*(a) < a$, aber es gibt Zahlen mit $\Gamma^*(a) > a$; die kleinste solche Zahl ist 12.

Es gibt Zahlen a und b mit $\Gamma^*(a) = b$ und $\Gamma^*(b) = a$. Diese Tupel (a, b) nennt man "befreundete Zahlen". Das kleinste Paar ist $(220, 284)$.

$$\Gamma^*(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

$$\Gamma^*(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

In dem Graphen gibt es auch Zyklen der Länge ≥ 3 . Für sehr große Zahlen scheint es auch sehr lange Zyklen zu geben.

Aufgabe:

Schreiben Sie Scheme-Programme für folgende Probleme:

- Finden Sie alle vollkommenen Zahlen bis 10000.
- Finden Sie alle befreundeten Zahlen, bei denen eine Zahl ≤ 10000 ist.
- Finden Sie alle längeren Zyklen, bei denen eine Zahl ≤ 10000 ist.