Wolfgang Schmid

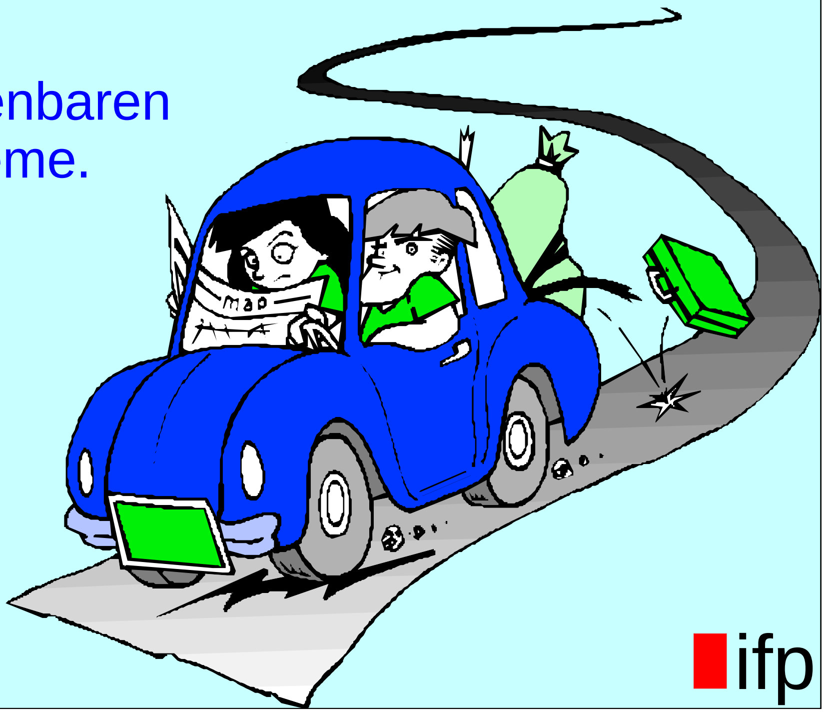
Berechnung kürzester Wege in Straßennetzen mit Wegeverboten

ifp

Problemstellung

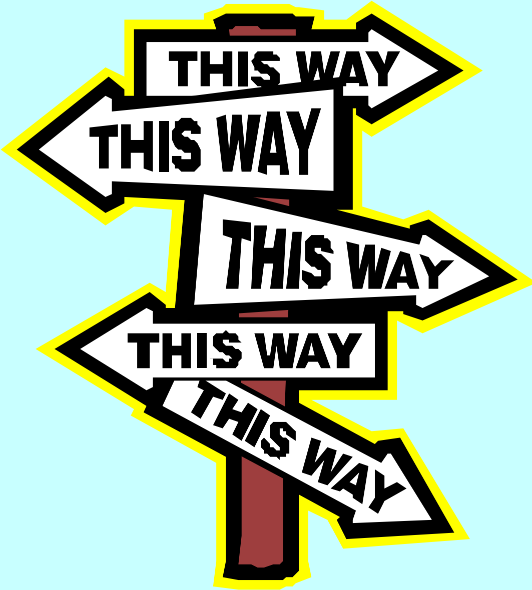
- Autonome Routenplanungssysteme gewinnen in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung im praktischen Einsatz.
- Anläßlich eines Tests in der Zeitschrift ADAC Motorwelt (04/1997) lieferten sechs verschiedene Systeme sechs verschiedene Ergebnisse.
- Schlußfolgerung: Algorithmen, Kontroll- und Programmstrukturen sind nicht ausreichend.

- Gerade bei Abbiege- und Wegeverboten offenbaren sich dem Benutzer die Schwächen der Systeme.
- Die Straßendaten werden in den gängigen Routenplanungssystemen durch Graphen dargestellt.
- Trotzdem gibt es keine grundlegenden graphentheoretischen Analysen zur Lösung dieses Problems.



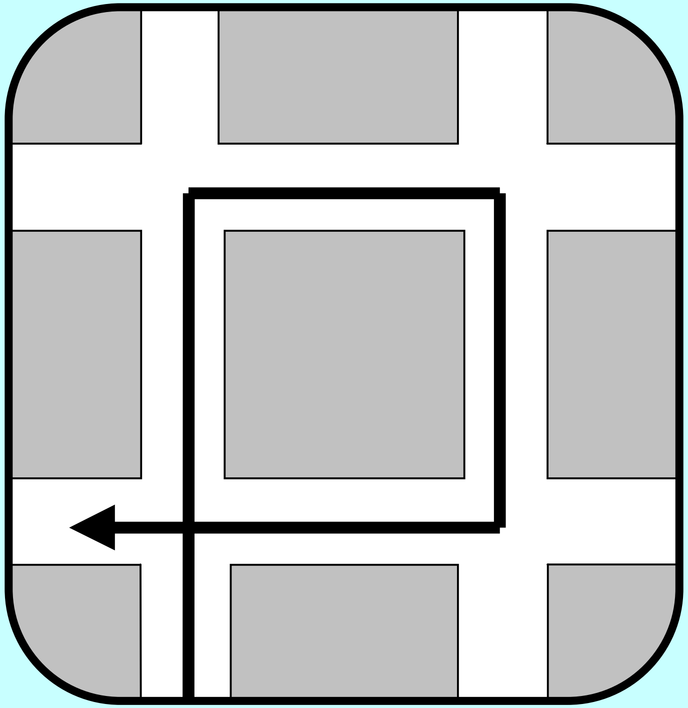
Inhaltsübersicht

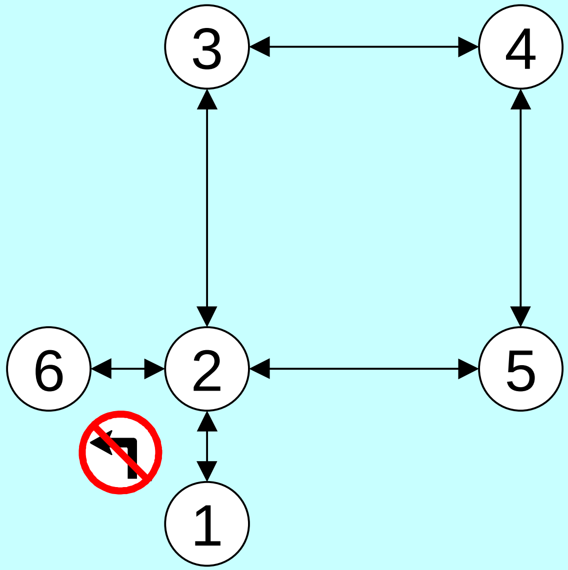
- Kürzeste Wege in Graphen mit Abbiegeverboten
- Kürzeste Wege in Graphen mit Wegeverboten
- Implementation und Anwendung



ifp

Abbiegeverbot - schwierige Verkehrsführung





$G := \{V, E, \alpha, \omega, \beta\}$ Graph mit $\alpha(e_{1,2}) = v_1$, $\omega(e_{1,2}) = v_2$, Abbiegeverbot $t := (e_{1,2}, e_{2,6})$.

Dijkstra- Algorithmus funktioniert nicht, da jeder Knoten nur einmal betrachtet wird.

Das einfache Verbieten des Abbiegens reicht nicht aus (naive Methode).

Kürzeste Wege in Graphen mit Abbiegeverboten

Statische Verfahren

- Algorithmus ist beliebig (+)
- Die Abbiegeverbote müssen nicht weiter beachtet werden (+)
- Graph wird verändert (Preprocessingphase) (--)
- unflexibel gegenüber Veränderungen (--)

- Knotenorientierte Netzwerke
- Methode des Ziehens neuer Kanten
- Verbotsorientiertes Knotensplitting

Dynamische Verfahren

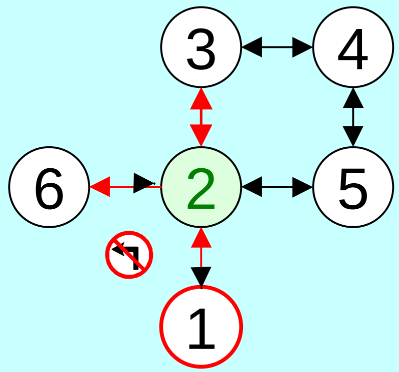
- Algorithmusabhängig (--)
- Die Abbiegeverbote müssen weiterhin beachtet werden (--)
- Graph bleibt erhalten (keine Preprocessingphase) (+)
- flexibel gegenüber Veränderungen (+)

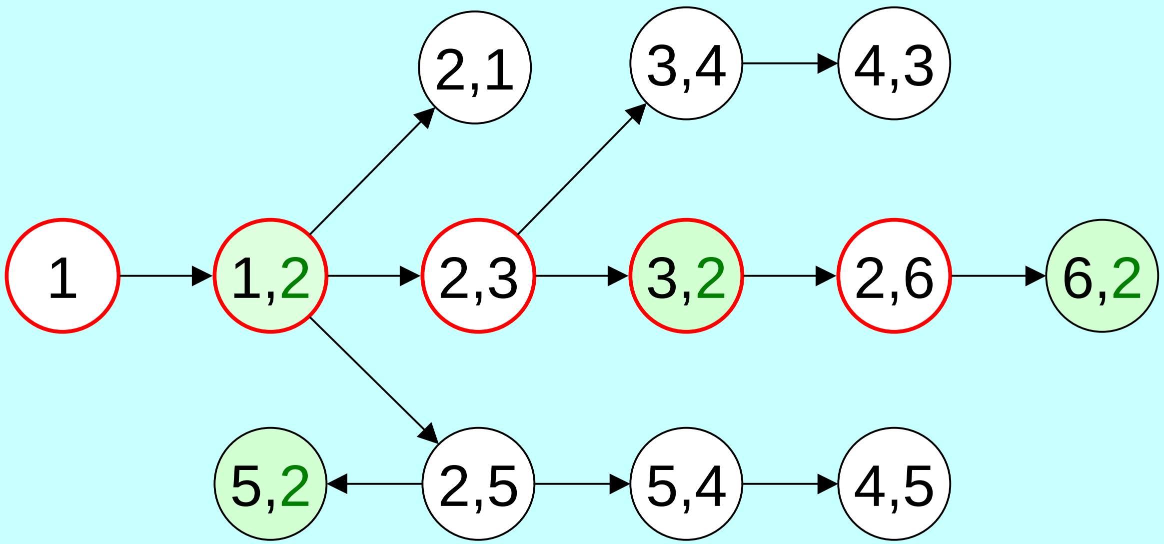
- Methode der Kantenaufnahme
- Methode der mehrfachen Knotenaufnahme
- naive Methode

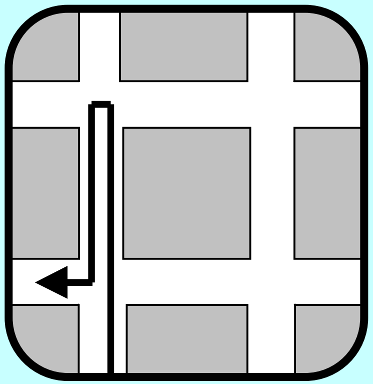
ifp

Methode der Kantenaufnahme (Standard)

- Dynamisches Verfahren
- Statt der Knoten werden Kanten in den Kürzeste-Wege-Baum aufgenommen.
- Die Größe des Kürzeste-Wege-Baumes wächst mit der Anzahl der Kanten des Graphen.

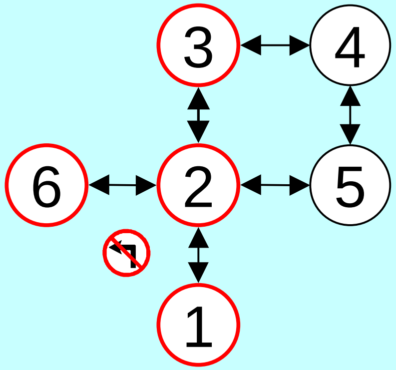


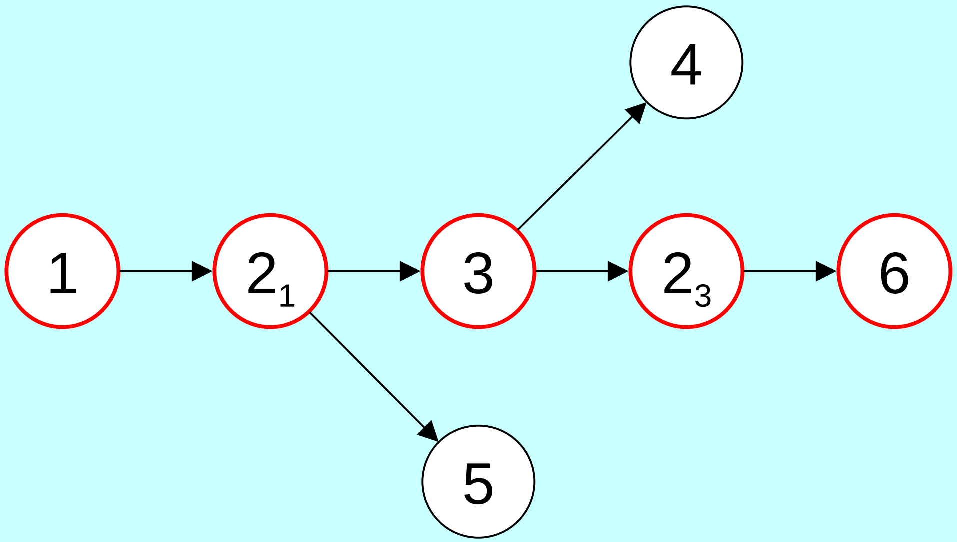




Methode der mehrfachen Knotenaufnahme

- Dynamisches Verfahren
- Wird ein Knoten über eine Kante, von der aus Abbiegeverbote existieren, in den Kürzeste-Wege-Baum aufgenommen, so darf dieser ein weiteres Mal, aber nicht über diese Kante, aufgenommen werden.
- Die Größe des Kürzeste-Wege-Baumes wächst mit der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Abbiegeverbote des Graphen.

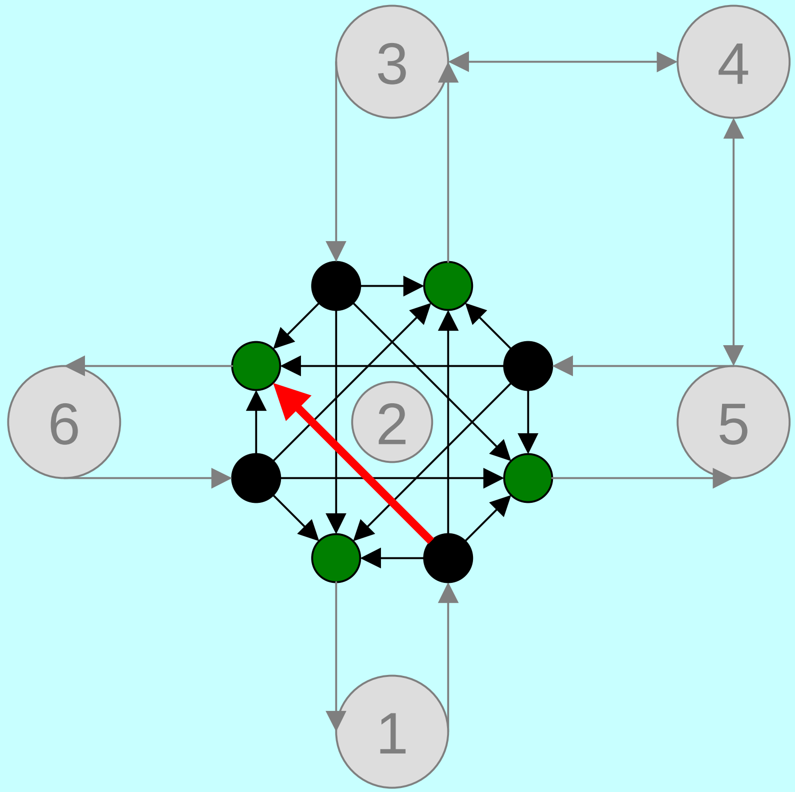




ifp

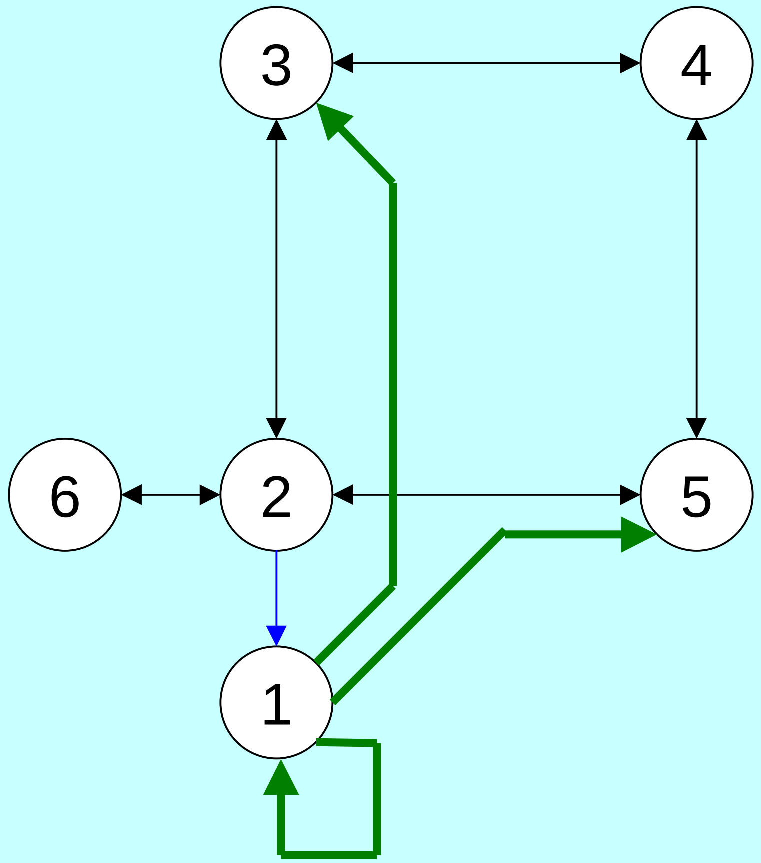
Knotenorientierte Netzwerke (Standard)

- Statisches Verfahren
- Jede Einfall- und Ausfallstraße erhält einen eigenen Knoten
- Das Abbiegen wird durch die Verbindung einer Einfallstraße mit einer Ausfallstraße dargestellt
- Das Löschen dieser Verbindung bedeutet ein Abbiegeverbot
- Flexibel wie ein dynamisches Verfahren
- Jede Kreuzung erzeugt $e + a$ Knoten und $e \cdot a$ Kanten



Die Methode des Ziehens neuer Kanten

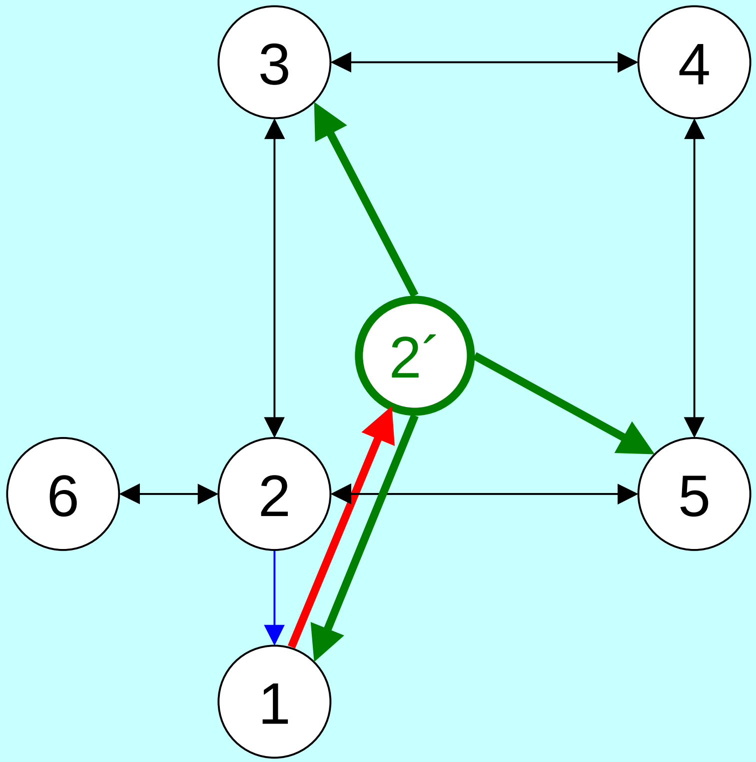
- Statisches Verfahren
- Jedes Abbiegeverbot wird durch Ziehen einer neuen Kante, welche die erlaubten Wege darstellt, überbrückt.
- Die neuen Kanten können einen ganzen Weg beinhalten.
- Die Größe des Kürzeste-Wege-Baumes wächst mit der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Abbiegeverbote des Graphen.



ifp

Die Methode des verbotsorientierten Knotensplitting

- Statisches Verfahren
- Der Endknoten jeder Kante, von der aus Abbiegeverbote existieren, wird gesplittet und der Kante als Endknoten zugewiesen.
- Originalknoten und Duplikat stellen die selbe Kreuzung dar.
- Nur die Kanten, in die abgebogen werden darf, werden gezogen.
- Die Größe des kürzeste-Wege-Baumes wächst mit der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Abbiegeverbote des Graphen.



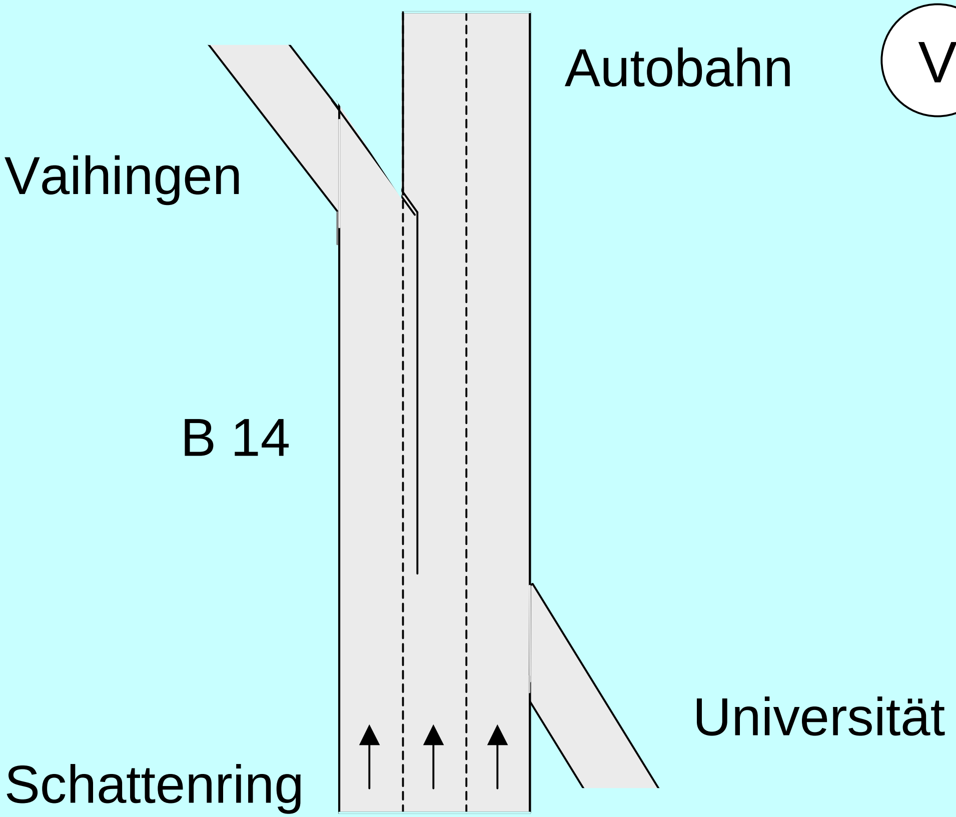
Der Beweisüberblick

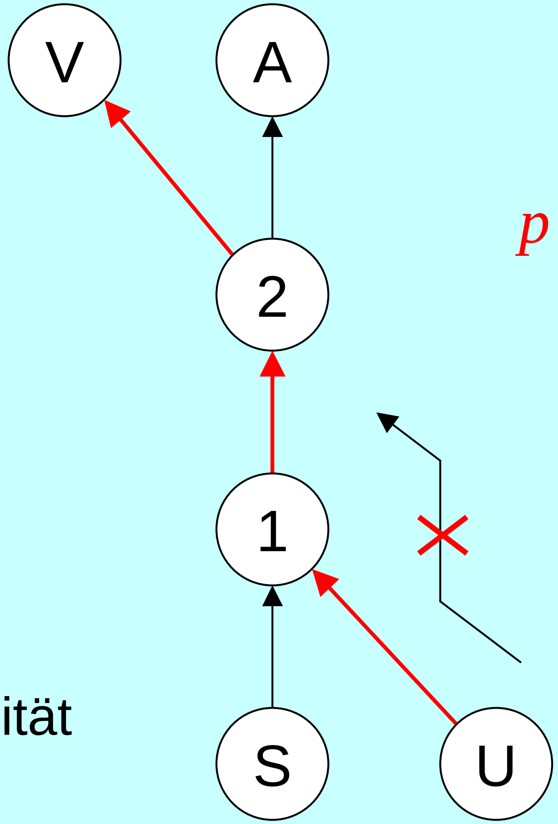
- Grundidee: Die Kanten werden durch ihren Anfangsknoten klassifiziert
- Church Rossow Eigenschaft: Die Grapherweiterung ist von der Reihenfolge der Abbiegeverbote unabhängig.
- Wegeäquivalenz: Die im erweiterten Graphen berechneten kürzesten Wege sind die kürzesten Wege im Ausgangsgraphen unter Berücksichtigung der Abbiegeverbote.
- Minimalität: Im erweiterten Graph darf keine Kante weggelassen werden

Wegeverbote

Eine Kantenfolge $w := (e_1, .., e_n)$ heißt *Weg*, wenn $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})\ \ i = 1..n-1$.

Ein Weg $p := (e_1, .., e_n)$ heißt *Wegeverbot*, wenn die Sequenz $(e_1, .., e_n)$ in keinem Weg vorkommen darf. P ist die Menge aller Wegeverbote.





$$p := (e_{u,1}\ ,\ e_{1,2}\ ,e_{2,v})$$

ifp

(Kürzeste) Wege in Graphen mit Wegeverboten

- Reduktion auf relevante Wegeverbote und Äquivalenzklassenbildung
- Die Wegeverdopplung
- Der Wegebaum
- Verbinden der gesplitteten Wege mit dem Ausgangsgraphen
- Verbinden der gesplitteten Wege untereinander

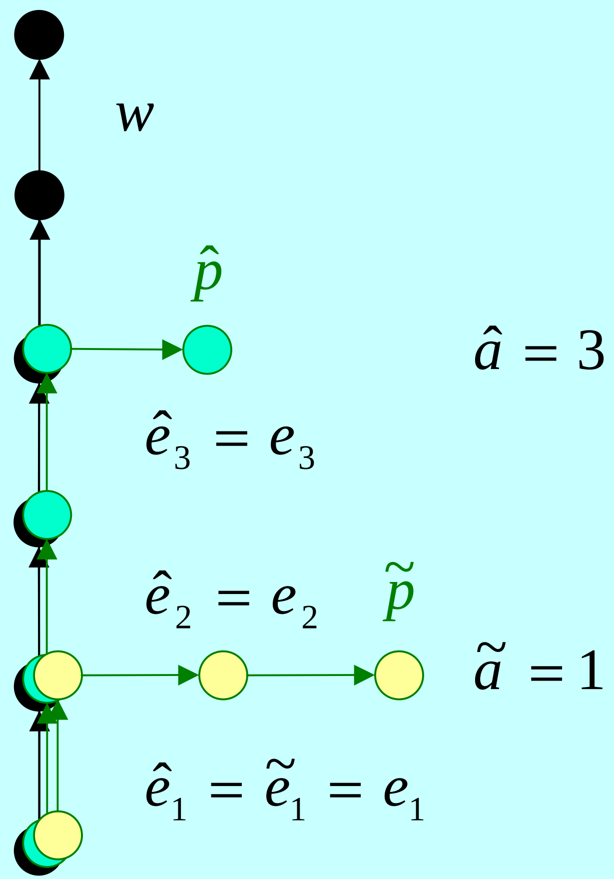
Reduktion, Klassenbildung und Anfangswege

Existieren Wegeverbote p, p' mit p ist Teilweg von p', so muß das größere Wegeverbot p' nicht mehr betrachtet werden.

Die erste Kante von p hat eine wichtige Bedeutung.
Äquivalenzklassenbildung: $\hat{p} \cong \tilde{p} \Leftrightarrow \hat{e}_1 = \tilde{e}_1$

Für $w \in W$ und $\tilde{p} \in P$ mit $\tilde{e}_1 = e_1$ sei
$a := aga(\tilde{p}, w) := \max\{\, k \mid \tilde{e}_i = e_i \text{ für } i = 1..k \,\}$
die Anzahl der gemeinsamen Anfangskanten von w und $\tilde{p}$. $\tilde{p}$ heißt *Anfangsweg* von w.

$\hat{p}$ heißt ein *maximaler Anfangsweg*,
wenn $aga(\hat{p}, w) = \max\{\, aga(p, w) \mid p \in P \,\}$.



ifp

Die Wegeverdopplung

Idee: Erste Kante eines Wegeverbotes umleiten, um dann den letzten Schritt zu verbieten.

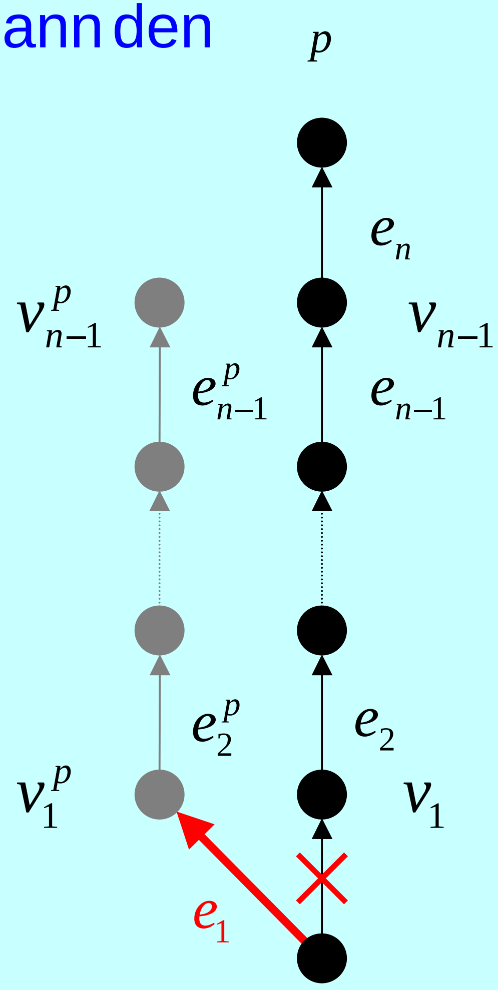
Wir betrachten ein Wegeverbot: $p := (e_1, \ldots, e_n)$.

Verdopple die Knoten und Kanten von p ohne erstes und letztes Element:

Knoten: $v_1^p, \ldots, v_{n-1}^p$, Kanten: $e_2^p, \ldots, e_{n-1}^p$.

Weise e_1 einen neuen Endknoten zu: $\omega(e_1) := v_1^p$

Die kanonische Projektion weist Duplikaten ihre Originale zu: $\Pi(e_i^p) = e_i$

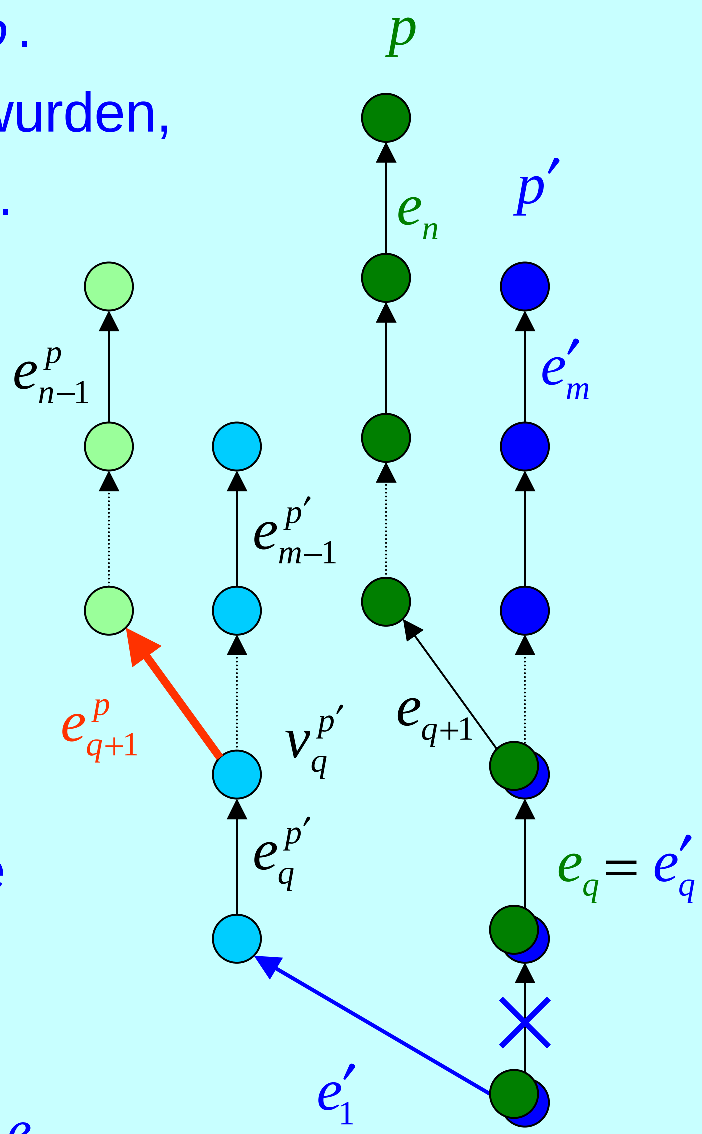


Der Wegebaum

Wir betrachten schrittweise jedes Wegeverbot p.
Wenn bereits Wegeverbote aus $[p]$ gesplittet wurden,
so muß p nicht von Anfang an gesplittet werden.

Sei $p' := (e'_1, \ldots, e'_m)$ der maximale Anfangsweg
von p in der Menge aller Wegeverbote,
die bereits bearbeitet wurden. Die Anzahl
der gemeinsamen Anfangskanten sei q.

Wir verdoppeln die Elemente des Wege-
verbotes p erst ab Kante $q+1$ und hängen diese
an den maximalen Anfangsweg an:



$$\alpha\left(\boxed{e^p_{q+1}}\right) := v^{p'}_q \qquad \alpha\left(e^p_{i+1}\right) := \omega\left(e^p_i\right) = v^p_i \qquad \Pi\left(e^p_i\right) := e_i$$

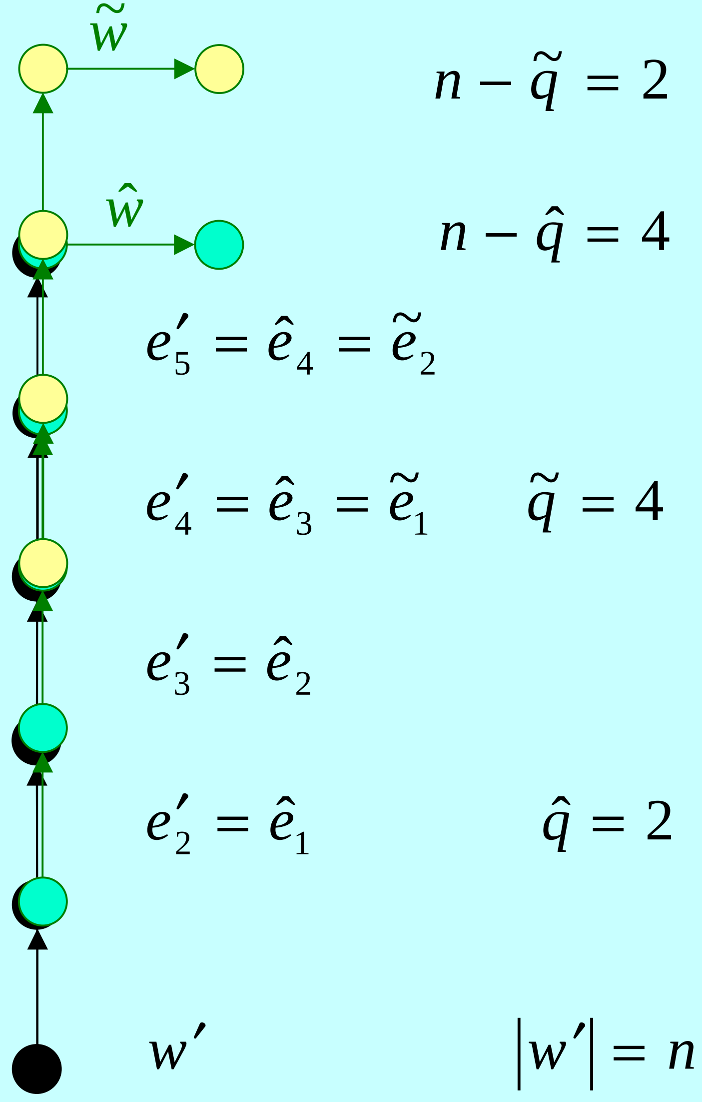
Endwege

$\tilde{w}$ heißt *Endweg* von w', wenn ein Index $\tilde{q} \geq 0$ existiert, so daß $e'_{q+i} = \tilde{e}_i$ für $1 \leq i \leq n - \tilde{q}$.

$\tilde{w}$ beginnt innerhalb von w' verläuft dann gleich bis zum Ende von w' geht dann eventuell noch weiter.

$n - \tilde{q}$ ist die Anzahl der gemeinsamen Endkanten.

Ein Endweg $\hat{w}$ heißt *maximal* wenn $n - \hat{q}$ maximal ist.

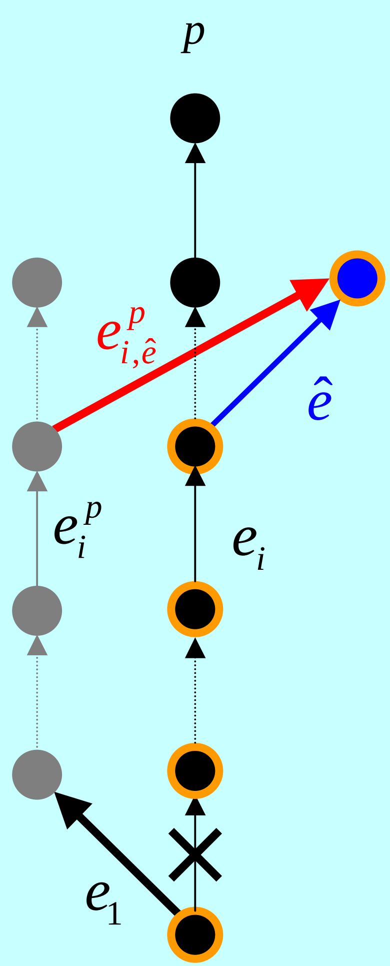


Die Verbindung mit dem Ausgangsgraphen

Zu jeder Kante $\hat{e}$ mit $\alpha(\hat{e}) = \omega(e_i)$ betrachten wir den Weg $\boxed{w :=} (e_1, .., e_i, \hat{e})$, der mit der gleichen Kante (e_1) beginnt wie p, ein Stück parallel verläuft und p über die Kante $\hat{e}$ verläßt.

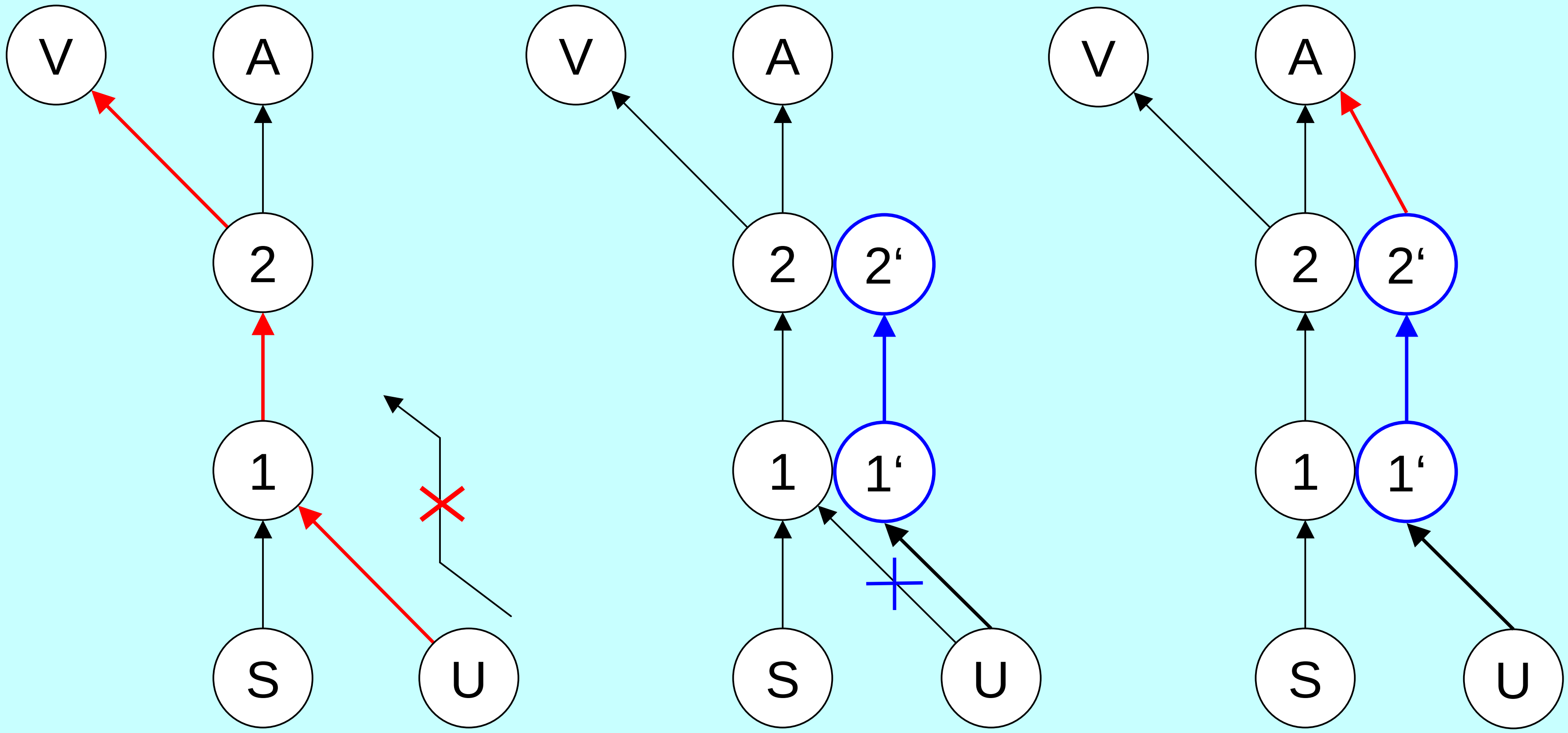
1. Fall: Es gibt kein p', das Endweg von w ist.

Über die Kantenfolge $(e_i, \hat{e})$ kann p ohne weitere Beachtung von Verboten verlassen werden. Zu jedem dieser Kantenpaare definieren wir eine neue Kante $\boxed{e^p_{i,\hat{e}}}$ mit $\alpha\left(e^p_{i,\hat{e}}\right) := v^p_i$, $\omega\left(e^p_{i,\hat{e}}\right) := \omega(\hat{e})$ und $\Pi\left(e^p_{i,\hat{e}}\right) := \hat{e}$, die das Duplikat von p mit dem Ausgangsgraphen verbindet. Die Kante $\hat{e}$ kann mehrfach gesplittet werden.



ifp

Lösung des einführenden Beispiels

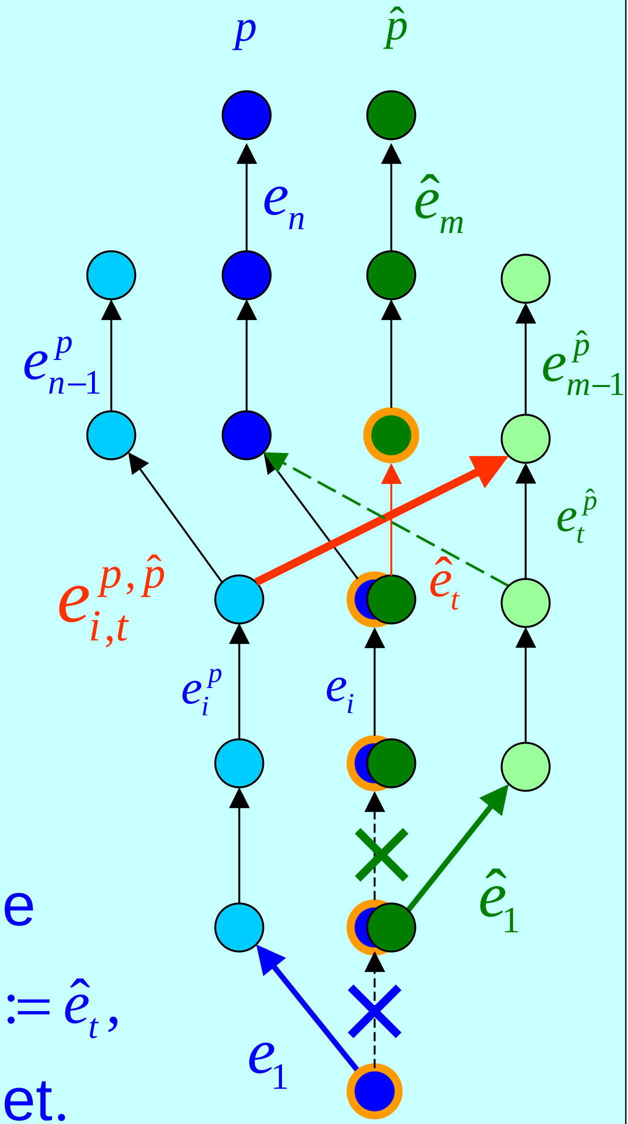


Die Verbindung mit den gesplitteten Wegen

Zu jeder Kante $\hat{e}$ mit $\alpha(\hat{e}) = \omega(e_i)$ betrachten wir wieder den Weg $\boxed{w :=}(e_1, .., e_i, \hat{e})$.

2. Fall: Es gibt Wegeverbote p', die Endwege von w sind mit $p' \notin [p]$, und sei $\hat{p}$ der maximale dieser Endwege mit $\hat{e}_t = \hat{e}$.

Über die Kantenfolge $(e_i, \hat{e}_t)$ kann p verlassen werden, wenn u.a. $\hat{p}$ weiterhin beachtet wird. Zu jedem dieser Kantenpaare definieren wir eine neue Kante $\boxed{e_{i,t}^{p,\hat{p}}}$ mit $\alpha(e_{i,t}^{p,\hat{p}}) := v_i^p$, $\omega(e_{i,t}^{p,\hat{p}}) := v_t^{\hat{p}}$ und $\Pi(e_{i,t}^{p,\hat{p}}) := \hat{e}_t$, welche die gesplitteten Wege von p und $\hat{p}$ verbindet.



ifp

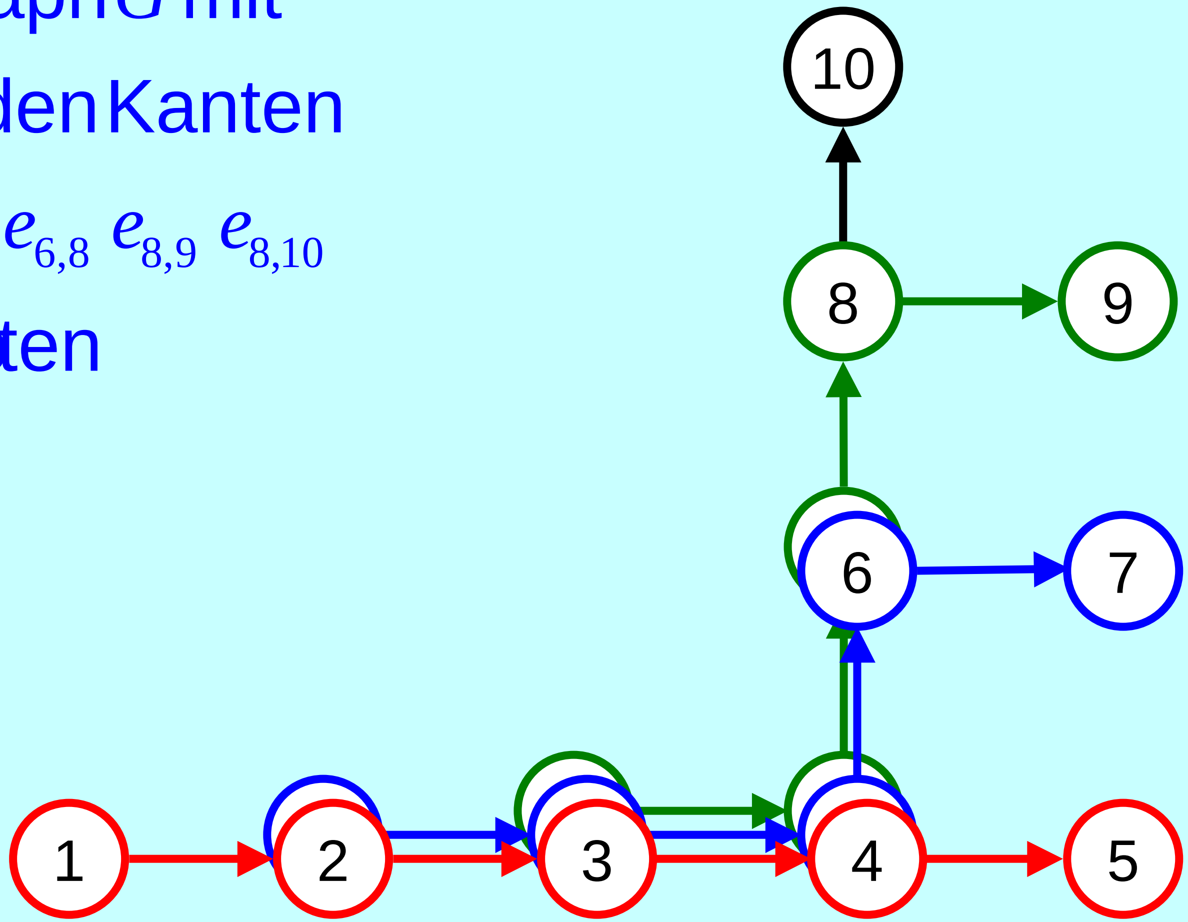
Beispiel für eine Grapherweiterung

Gegeben sei ein Graph G mit den Knoten $v_1, .., v_{10}$, den Kanten $e_{1,2}\ e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,5}\ e_{4,6}\ e_{6,7}\ e_{6,8}\ e_{8,9}\ e_{8,10}$ und den Wegeverboten

$$p_1 := e_{1,2}\ e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,5},$$

$$p_2 := e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,6}\ e_{6,7}$$

$$p_3 := e_{3,4}\ e_{4,6}\ e_{6,8}\ e_{8,9}.$$



ifp

Beispiel nach der Wegeverdopplung

Das Wegeverbot

$p_1 := e_{1,2}\ e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,5}$,

erzeugt

die Kanten $e_{2',3'}\ e_{3',4'}$

und die Knoten

$v_{2'}\ v_{3'}\ v_{4'}$.

$e_{4,5}$ und v_5 werden

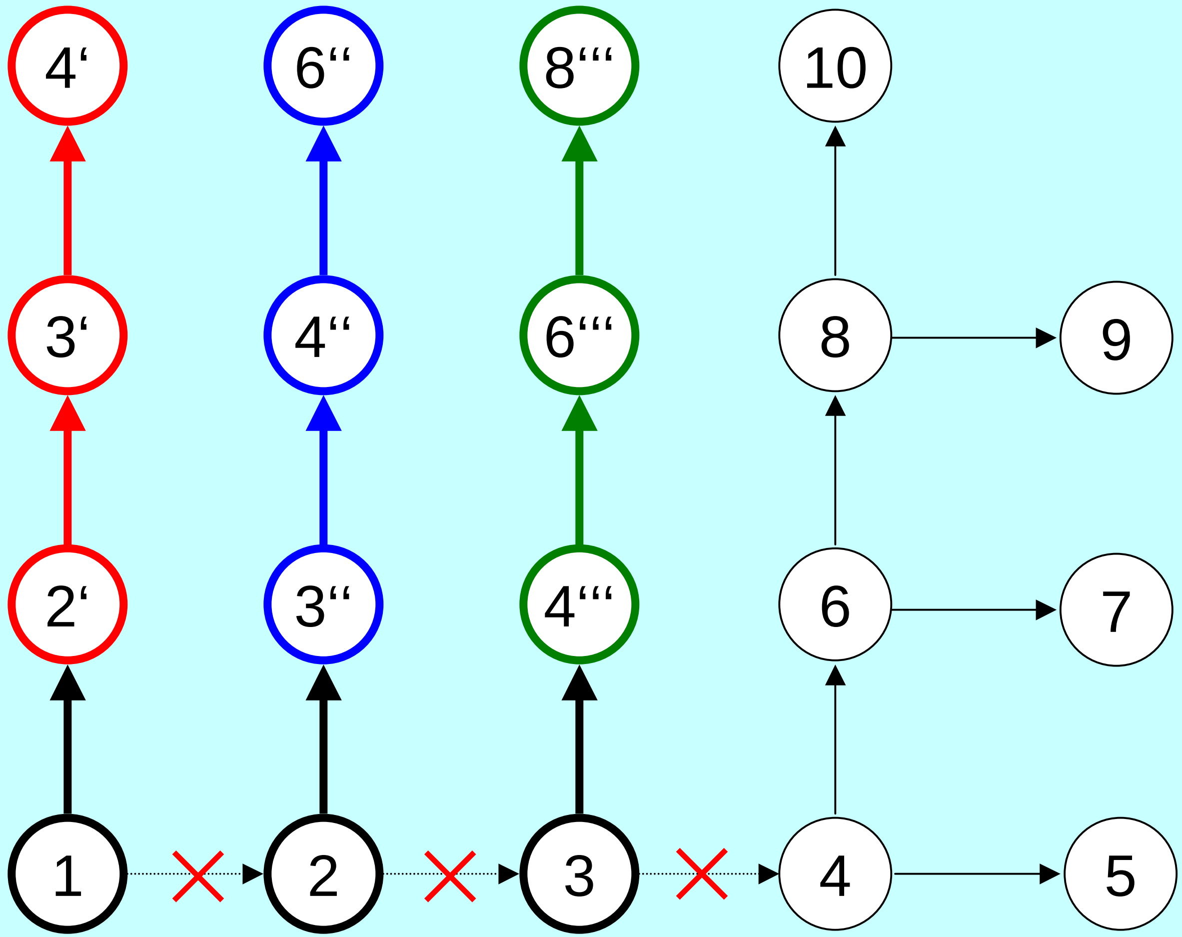
nicht gesplittet.

Der Kante $e_{1,2}$ wird

ein neuer Endknoten

zugewiesen :

$$\omega(e_{1,2}) := v_{2'}$$



ifp

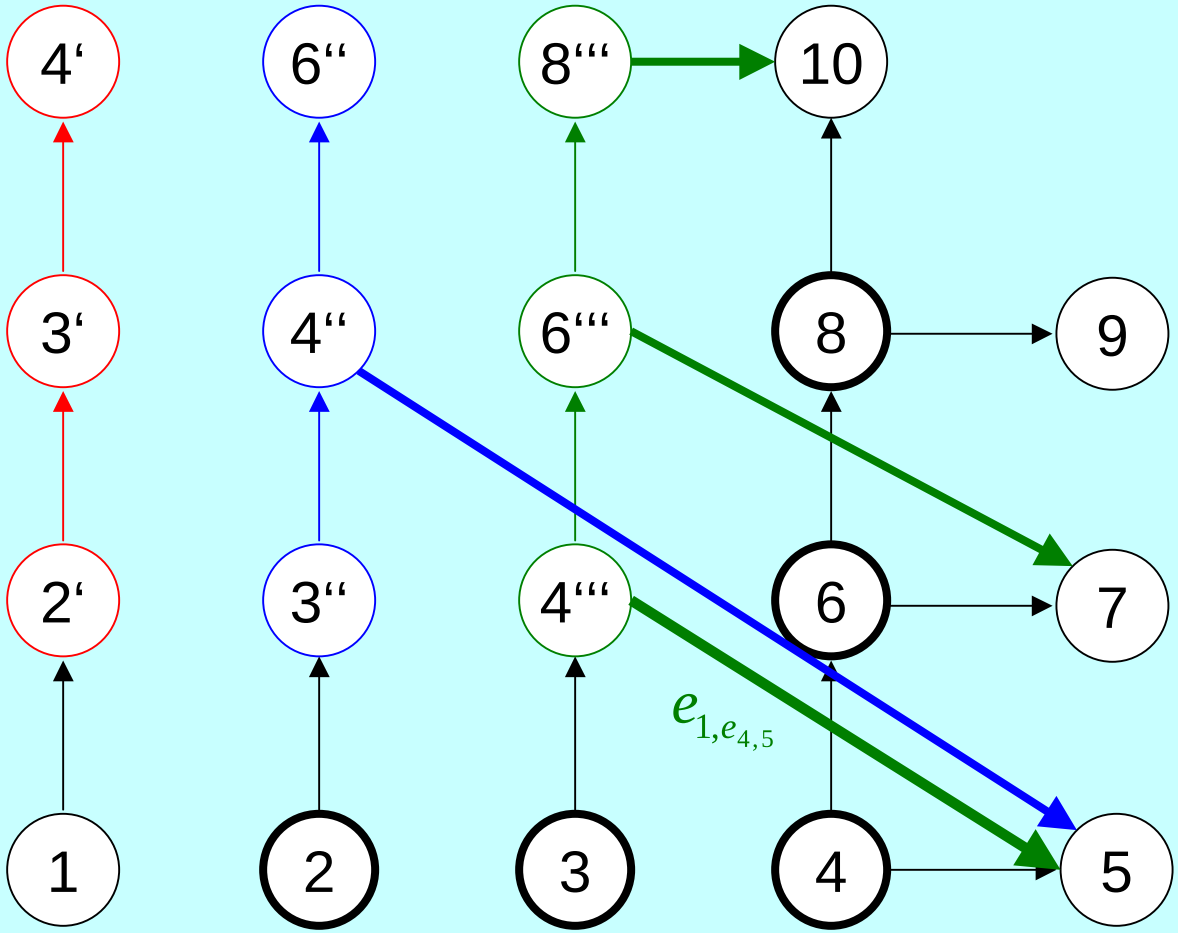
Beispiel nach der Verbindung mit dem Ausgangsgraphen

$p_3 := e_{3,4}\ e_{4,6}\ e_{6,8}\ e_{8,9}$

kann über die drei Kombinationen

$\left(e_{3,4}\ e_{4,5}\right)\left(e_{4,6}\ e_{6,7}\right)$
$\left(e_{6,8}\ e_{8,10}\right)$

ohne Beachtung von Verboten verlassen werden.



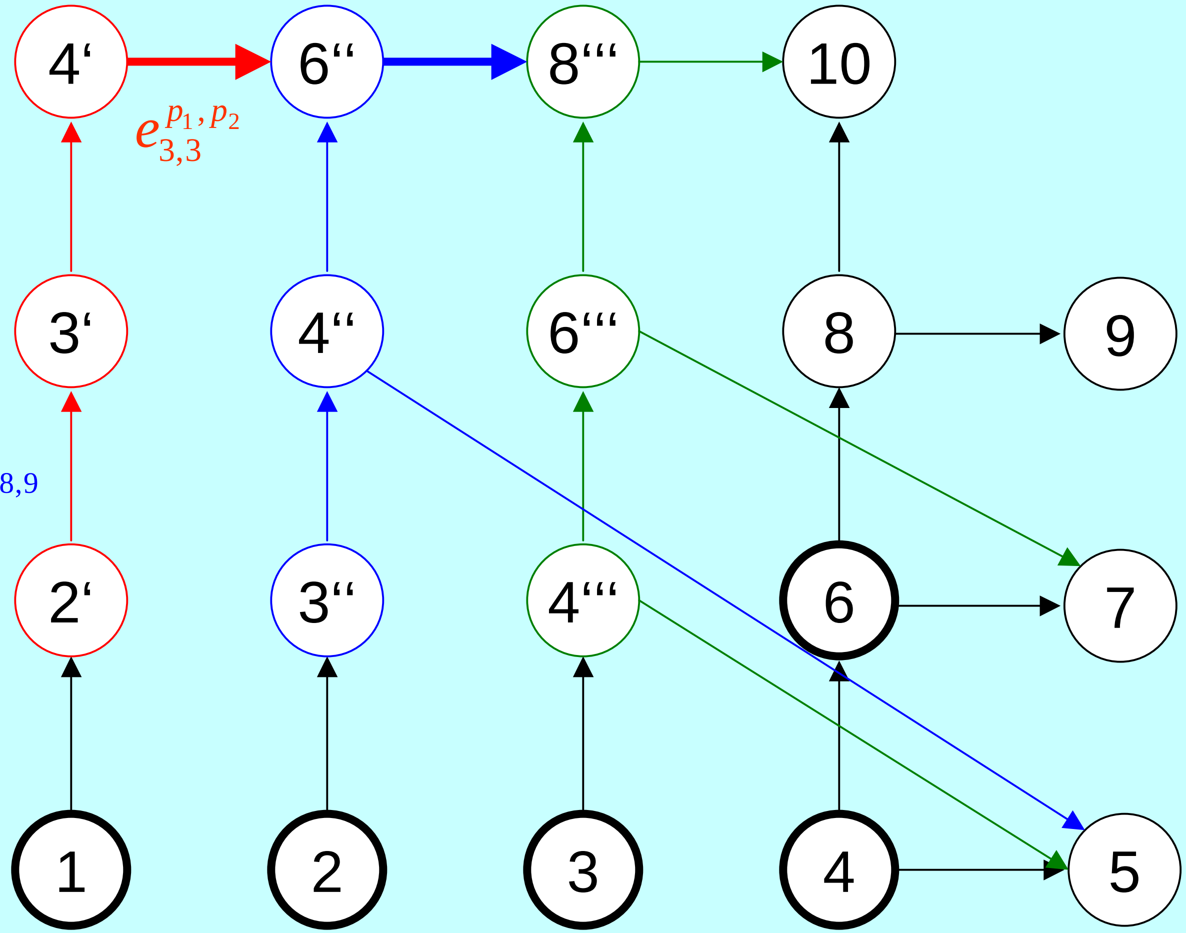
$$\left(e_{3,4}\ e_{4,5}\right) = \left(e_1^{p_3}\ e_{4,5}\right) \rightarrow\ e_{1,e_{4,5}}$$

ifp

Beispiel nach der Verbindung der gesplitteten Wege

$p_1 := e_{1,2}\ e_{2,3}\ e_{3,4}\ e_{4,5}$ kann über die Kante $e_{4,6}$ verlassen werden, wenn p_2 und p_3 weiterhin beachtet werden.

$$
\begin{array}{llllll}
w = & e_{1,2} & e_{2,3} & e_{3,4} & e_{4,6} & \\
p_2 = & & e_{2,3} & e_{3,4} & e_{4,6} & e_{6,7} \\
p_3 = & & & e_{3,4} & e_{4,6} & e_{6,8} \quad e_{8,9}
\end{array}
$$



p_2 und p_3 sind Endwege von w.
p_2 ist maximaler Endweg, deshalb wird die Erweiterung mit p_2 verbunden.

$$\left(e_{3,4}\ e_{4,6}\right) = \left(e_3^{p_1}\ e_3^{p_2}\right) \rightarrow e_{3,3}^{p_1,p_2}$$

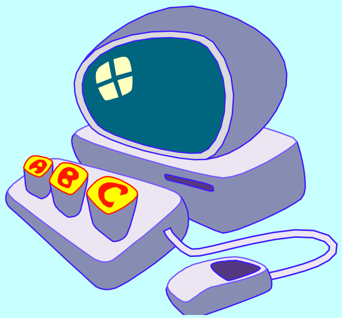
ifp

Beweisüberblick

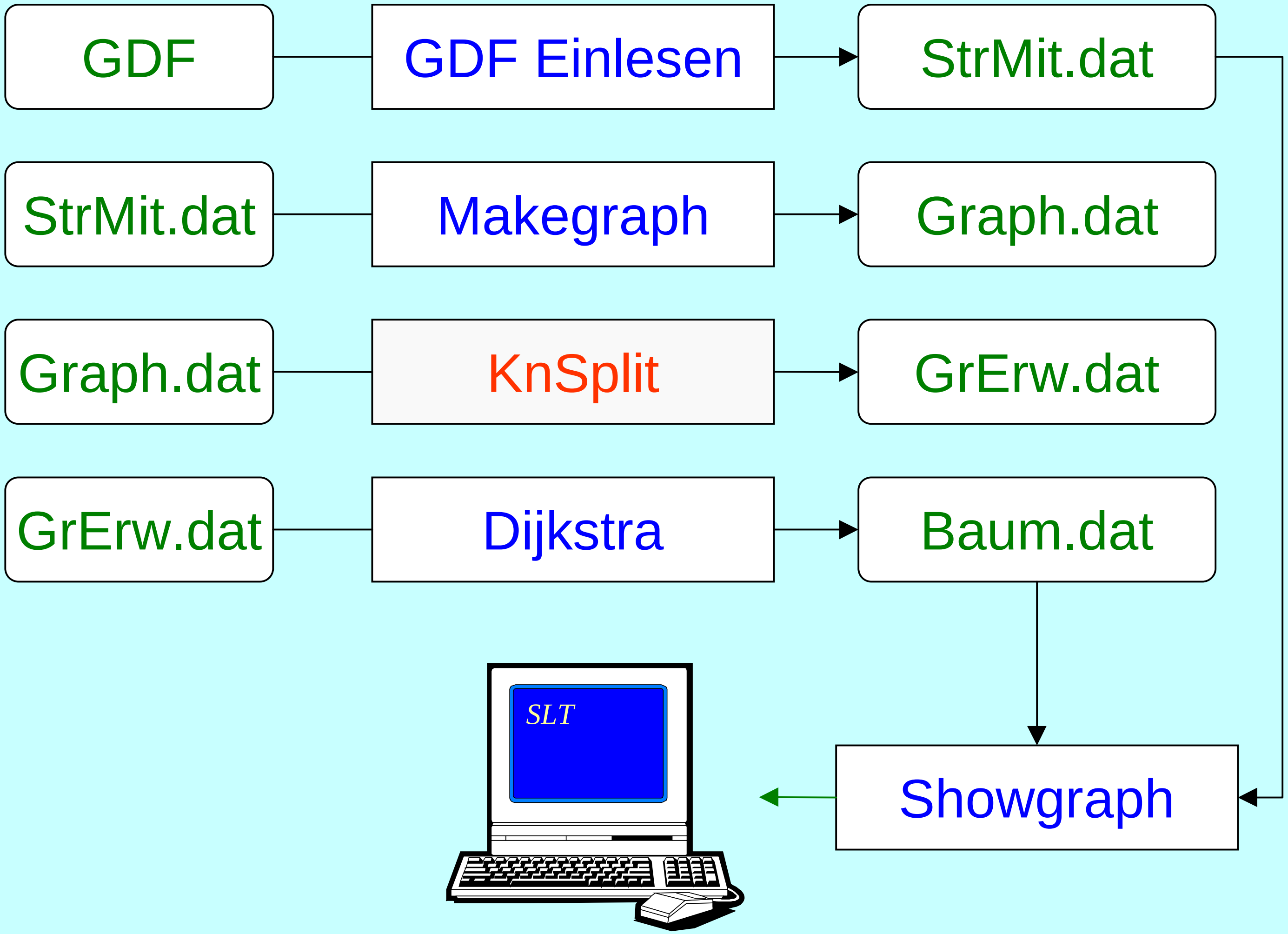
- Grundidee: Klassifikation der Kanten durch Ihre Anfangs- und Endknoten.
- Church-Rossow Eigenschaft: Der Wegegraph ist von der Reihenfolge der behandelten Wegeverbote unabhängig.
- Homomorphie: Die kanonischen Projektionen sind surjektiv und inzidenzerhaltend.
- Wegeäquivalenz: Die möglichen Wege des Wegegraphen sind genau die erlaubten Wege im Ausgangsgraphen.
- Minimalität: Vom Wegegraph darf keine Kante oder Knoten weggelassen werden.

Implementationsaspekte

- Die Berechnung, das Erkennen oder die Eingabe von Straßenmitten
- Die Erzeugung eines repräsentierenden Graphen
- Die Erzeugung eines Wegegraphen ohne Abbiegeverbote
- Die Berechnung der kürzesten Wege zwischen zwei Punkten
- Die graphische Darstellung der Ergebnisse



Systemarchitektur



ifp

Zusammenfassung und Ausblick

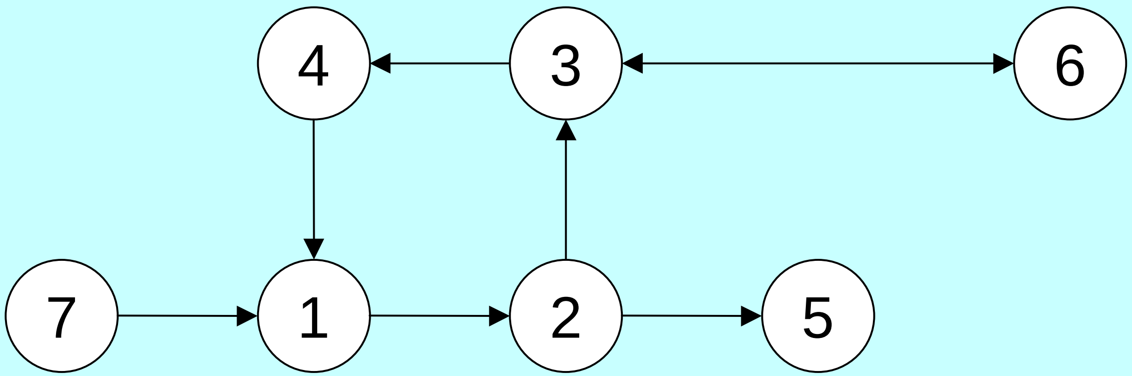
- Entwicklung dynamischer und statischer Algorithmen zur Berechnung kürzester Wege in Graphen mit Abbiegeverboten.
- Erweiterung eines statischen Algorithmus auf Wegeverbote.

- Der entwickelte Algorithmus stellt eine Verbesserung des Algorithmus von Azevedo zur Berechnung k-kürzester Wege (1990) dar.
- Der vorgestellte Algorithmus ist genau beschrieben, um mit den aktuellen Methoden zur Routenplanung kombiniert werden zu können.
- Übertragung des Verfahrens auf andere Bereiche wie z.B. Logistik.

- Reduktion der Wegeverbote durch schrittweises Betrachten. Derzeit werden alle Wegeverbote auf einmal betrachtet.
- Erweiterung eines dynamischen Abbiegeverbots-Algorithmus auf Wegeverbote.

Beispiel mit selbstüberlappendem Wegeverbot

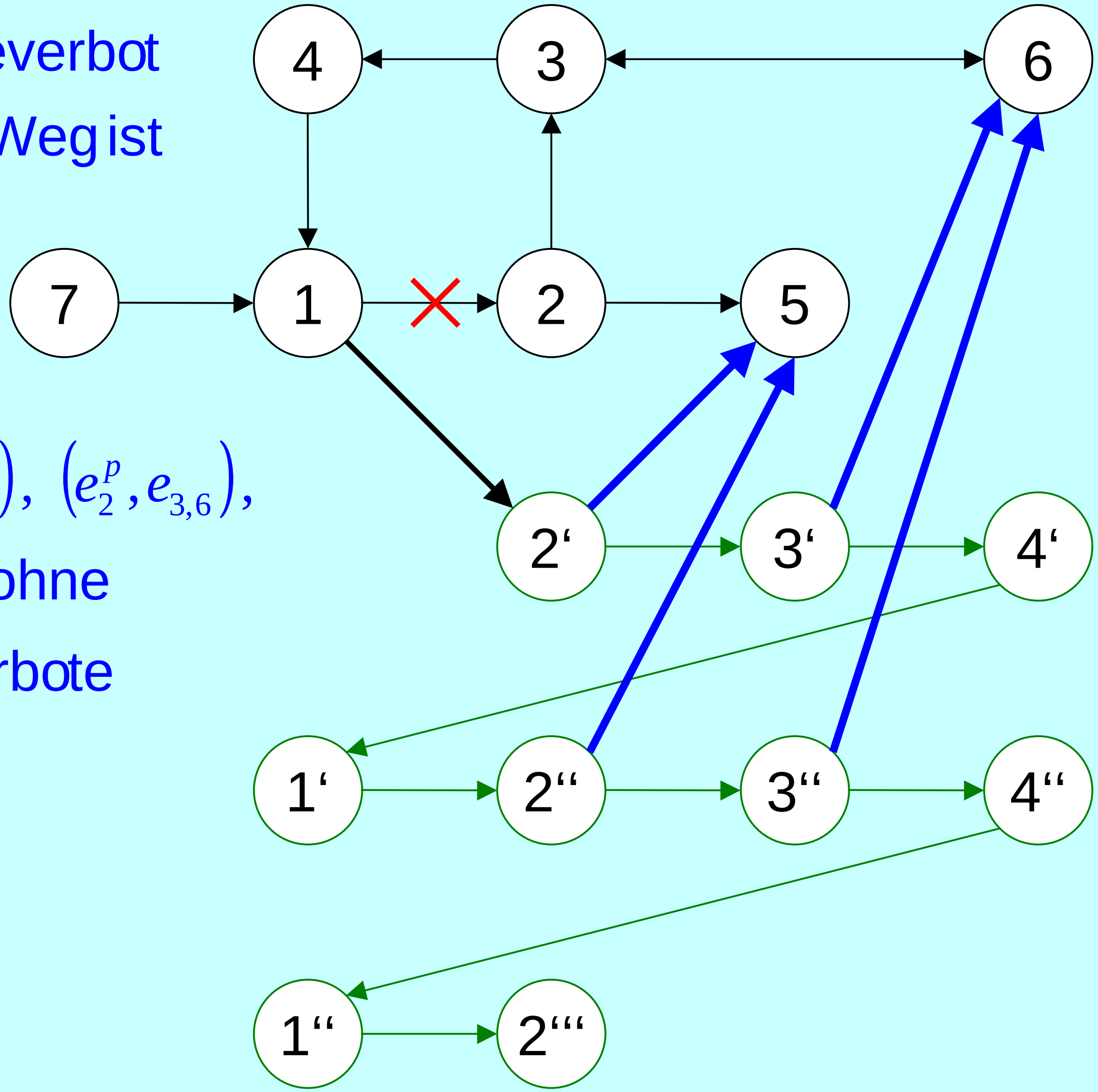
Gegeben sei ein Graph G mit den Knoten $v_1, \ldots, v_7$ und den Kanten $e_{1,2}$ $e_{2,3}$ $e_{2,5}$ $e_{3,4}$ $e_{3,6}$ $e_{4,1}$ $e_{6,3}$ $e_{7,1}$ und dem Wegeverbot $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 5$. Das bedeutet, daß das zwei oder mehrmalige Umfahren Häuserblocks $1, 2, 3, 4$ und das anschließende Abbiegen nach 5 verboten ist.



ifp

Das Häuserblockbeispiel mit verdoppeltem Weg

Zuerst wird wieder das Wegeverbot verdoppelt. Der verdoppelte Weg ist grün dargestellt.



Über die Kantenpaare $\left(e_1^p, e_{2,5}\right)$, $\left(e_2^p, e_{3,6}\right)$, $\left(e_5^p, e_{2,5}\right)$ und $\left(e_2^p, e_{3,6}\right)$ kann p ohne Beachtung weiterer Wegeverbote wieder verlassen werden.

Deshalb werden die Kanten

$e_{2',5}$, $e_{3',6}$, $e_{2'',5}$ und $e_{3'',6}$,

(blau) gezogen.

ifp

Wegegraph des Häuserblockbeispiels

Der Weg $w := 1234\,1234\,123$

besitzt das Wegeverbot p

zwei Mal als Endweg:

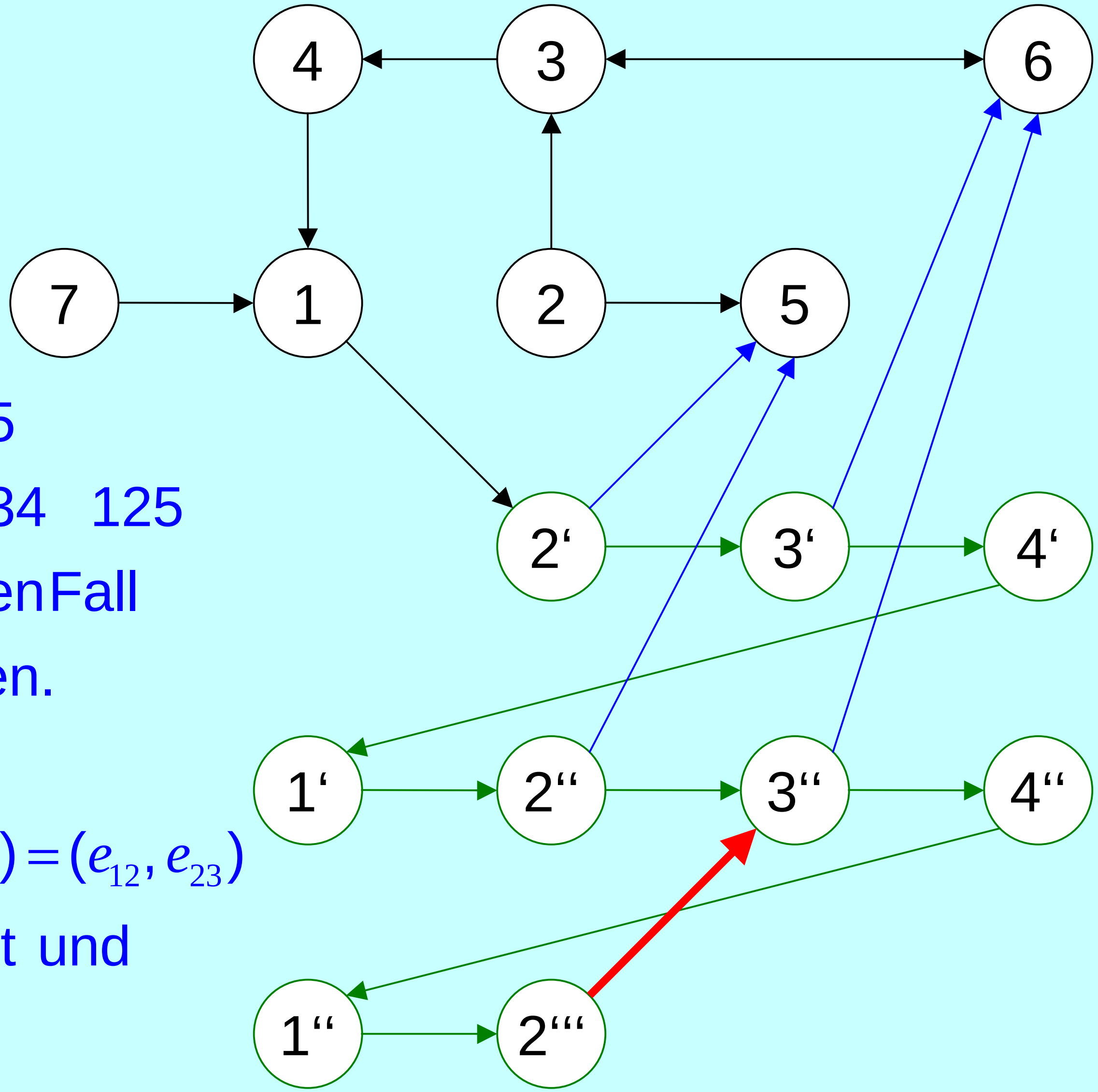
$w =$ 1234 1234 123

$p =$ 1234 1234 125

$p =$ 1234 1234 125

im oberen Fall mit 6 im unteren Fall

mit 2 gemeinsamen Endkanten.



Deshalb wird zum Paar $(e_9^p, e_6^p) = (e_{12}, e_{23})$

eine neue Kante $e_{9,6}^{p,p}$ definiert und

so 2''' mit 3'' verbunden.

ifp