Universität Stuttgart
Institutsverbund Informatik
Dr. Barbara König

SS 2005
Aufgabenblatt 4
24. Mai 2003

Übung zu “Automatische Analyse und Verifikation von Programmen”

Dieses Übungsblatt wird am Donnerstag, den 2. Juni, von 14:00–15:30 Uhr im Raum 0.108 besprochen.

Aufgabe 13 *Bytecode Verifier: Unterschiedliche Stack-Längen*

Für ein Programm, das korrekt im Sinne des Java Bytecode Verifiers ist, wird gefordert, dass an jedem Programmpunkt die Stack-Länge konstant ist. Das Supremum von zwei Verbands-Elementen, die Stacks unterschiedlicher Länge repräsentieren ist immer *Err*. Es kann aber Fälle geben, in denen man doch das Supremum von zwei solchen Verbandselementen betrachten will. Betrachten Sie beispielsweise die unten links abgebildeten Typen zweier Stacks, die sich aus verschiedenen Pfaden ergeben haben und die sich an einem bestimmten Programmpunkt treffen. Falls wir annehmen, dass der noch abzuarbeitende Bytecode rechts angegeben ist und der Rückgabewert vom Typ Integer sein soll, so entsteht in diesem Fall kein Laufzeitfehler.

Integer	Integer
Integer	Integer
Class A	Integer
NullT	

ℓ: IAdd
$\ell+1$: Return

Modifizieren Sie den Verband $(T, \sqsubseteq_T)$ so, dass an einem Programmpunkt grundsätzlich auch Stacks unterschiedlicher Länge erlaubt sein dürfen. Dabei muss natürlich weiterhin die Abwesenheit von Laufzeitfehlern durch die Analyse garantiert werden. Beachten Sie auch, dass der modifizierte Verband weiterhin die Ascending Chain Condition erfüllen soll.

Aufgabe 14 *Abschluss-Operatoren*

Sei $(L, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband. Eine Abbildung $\rho\colon L \to L$ heißt Abschluss-Operator, falls

- ρ *monoton* ist.
- $\forall l \in L\colon l \sqsubseteq \rho(l)$, d.h., ρ ist *extensiv.*
- $\forall l \in L\colon \rho(\rho(l)) = \rho(l)$, d.h., ρ ist *idempotent.*

Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Sei $\langle \alpha, \gamma \rangle$ eine Galois-Verbindung. Dann ist $\gamma \circ \alpha$ ein Abschluss-Operator.

(b) Sei $\rho\colon L \to L$ ein Abschluss-Operator und sei $M = \{\rho(l) \mid l \in L\}$. Dann ist $\langle \rho, \eta \rangle$ mit $\eta\colon M \to L$ and $\eta(m) = m$ für alle $m \in M$ eine Galois-Verbindung.

Aufgabe 15 *Komposition von Galois-Verbindungen*

Gegeben seien die Galois-Verbindungen $\langle \alpha_i, \gamma_i \rangle$, $i = 1, 2$ mit $\alpha_i \colon L \to M_i$ und $\gamma_i \colon M_i \to L$. Das *direkte Produkt* von α_1 und α_2 wird folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{rcl} \alpha \colon L & \to & M_1 \times M_2 \\ l & \mapsto & (\alpha_1(l), \alpha_2(l)) \end{array}$$

Dabei gilt für $m_1, m_1' \in M_1$ und $m_2, m_2' \in M_2$: $(m_1, m_2) \sqsubseteq (m_1', m_2') \iff m_1 \sqsubseteq m_1' \ \wedge\ m_2 \sqsubseteq m_2'$.

(a) Bestimmen Sie ein $\gamma \colon M_1 \times M_2 \to L$, so dass $\langle \alpha, \gamma \rangle$ eine Galois-Verbindung ist. Versuchen Sie dabei, evtl. mit Hilfe eines Beispiels, eine möglichst einfache Beschreibung von γ zu finden.

(b) Sei $f \colon L \to L$ eine (monotone) Funktion und seien $f_i^{\#} = \alpha_i \circ f \circ \gamma_i \colon M_i \to M_i$, $i = 1, 2$ die jeweils genauesten Approximationen dieser Funktion bezüglich der beiden Galois-Verbindungen. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f_1^{\#} \times f_2^{\#} \colon M_1 \times M_2 & \to & M_1 \times M_2 \\ (m_1, m_2) & \mapsto & (f_1^{\#}(m_1), f_2^{\#}(m_2)) \end{array}$$

nicht notwendigerweise die genaueste Approximation von f bezüglich der Galois-Verbindung $\langle \alpha, \gamma \rangle$ ist.

(c) Betrachten Sie das direkte Produkt der zwei Galois-Verbindungen $\langle \alpha_1, \gamma_1 \rangle$ und $\langle \alpha_2, \gamma_2 \rangle$, die mit Hilfe von Extraktionsfunktionen β_1, β_2 folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{array}{rcl} \beta_1 \colon \mathbb{Z} & \to & \{\overset{0}{-}, +\} \\ z & \mapsto & \begin{cases} \overset{0}{-} & \text{falls } z \leq 0 \\ + & \text{falls } z > 0 \end{cases} \\ \beta_2 \colon \mathbb{Z} & \to & \{-, \overset{0}{+}\} \\ z & \mapsto & \begin{cases} - & \text{falls } z < 0 \\ \overset{0}{+} & \text{falls } z \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Die beiden Abstraktionen α_1, α_2 sind beide surjektiv. Ist die Abstraktion α aus dem direkten Produkt $\langle \alpha, \gamma \rangle$ auch surjektiv? Falls nicht, so schränken Sie $\langle \alpha, \gamma \rangle$ entsprechend ein.