Verzweigungsgrad von Schach

Klaus Wich

2. November 2005

Zusammenfassung

Es gibt keine Schachstellung, bei der die Partei am Zug aus mehr als 257 Halbzügen wählen kann.

1 Fragestellung

Aus der Grundstellung beim Schach hat weiß die Wahl zwischen 20 möglichen Zügen. (16 Bauernzüge und 4 Springerzüge.) Für eine gegebene Schachstellung bezeichnen wir die Zahl der möglichen Halbzüge als Verzweigungsgrad der Stellung. Den größte Verzweigungsgrad einer legale Schachstellung wollen wir als den Verzweigungsgrad von Schach bezeichnen.

Was können wir über den Verzweigungsgrad von Schach aussagen?

2 Eine untere Schranke

In Abbildung 1 sind zwei Stellungen abgebildet die jeweils 218 Zugmöglichkeiten erlauben. Die linke findet man in [1] auf Seite 80. Nach den Angaben der Autoren geht sie auf N. Petrović zurück und wurde im Juni 1946 in „Fairy Chess Review“ veröffentlicht. Die Stellung rechts hat ebenfalls 218 Zugmöglichkeiten. Die Verwendung von schwarzen Springern statt Bauern erleichtert die Verifikation der Legalität etwas. (Bei angenommener Kooperation von Weiß und Schwarz ist es leicht den schwarze König in der linken unteren Ecke einzubauen, bevor weiß seine Bauern umgewandelt hat. Weiß braucht nun lediglich die Diagonale a1–h8 bis kurz vor Schlußs unbesetzt zu halten. Dann kann schwarz mit dem Springer b2 ständig hin- und herziehen, bis weiß alle Figuren außer Dame e5 postiert hat. Dieses Feld wird nun mit einem Schach betreten, wenn nötig nach einem Wartezug, und Schwarz zieht den Springer auf b2.) Interessanter ist der Unterschied im Damenaufbau. Die Dame a3 wurde auf f8 verlegt und dafür der Turm h8 auf a3. Dadurch entsteht ein noch klareres Muster: Die 9 Damen stehen auf dem 7×7 Teilbrett mit den Eckpunkten b2, b8, h8 und h2. Sie sind dort ungestört. (Man beachte, dass der Springer b2 schwarz ist und deshalb geschlagen werden kann.) Mit einem geeigneten Computerprogramm kann man nachweisen,

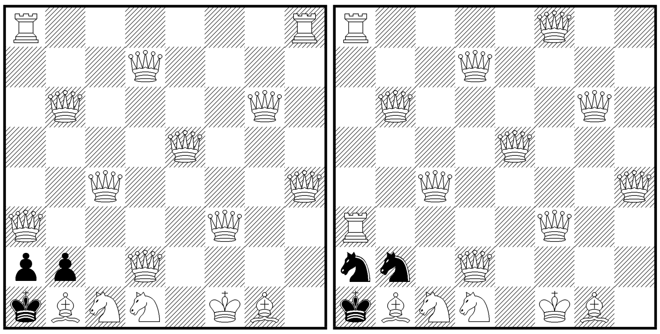

Abbildung 1: Legale Stellungen mit 218 Zugmöglichkeiten
Größter bekannter Verzweigungsgrad

dass 9 Damen auf einem 7×7 Brett genau dann optimal stehen wenn sie (bis auf Drehungen und Spiegelungen) genauso stehen wie auf dem oben genannten Teilbrett. Die übrigen Figuren verteilen sich auf die erste Reihe und die a-Linie. Sie versuchen vom Rand aus noch soviele Zugmöglichkeiten wie möglich mitzunehmen, ohne die Damen zu stören. Damit ist 218 eine untere Schranke für den Verzweigungsgrad von Schach. Insbesondere die rechte Stellung sieht aus den oben genannten Gründen ziemlich optimal aus. Dennoch können wir nicht ausschließen, dass es eine Stellung mit größerem Verzweigungsgrad gibt.

3 Obere Schranken

Um eine erste obere Schranke für den Verzweigungsgrad anzugeben können wir zwei Monotonieeigenschaften des Schachspiels benutzen:

1. Die Zahl der Schachfiguren (dies beinhaltet Bauern und Offiziere) nimmt im Verlauf einer Schachpartie niemals zu. (Im Gegensatz dazu erhöht sich Beispielsweise beim Spiel Mühle am Anfang die Zahl der Spielsteine auf dem Brett.)

2. Das Einfügen von Schachfiguren in eine Stellung kann die Zahl der Zugmöglichkeiten der bereits vorhandenen Figuren nicht erhöhen. (Als Beispiel für Spiele bei denen die Steine durch Kooperation ihre Zugmöglichkeiten erhöhen können seien Dame und Halma genannt.)

Die Gangart der Figuren wird unabhängig von der Legalität einer Stellung erklärt. Wir lassen also die Legalitätsbedingungen einfach fallen und eliminieren alle gegnerischen Figuren. Wegen Punkt 2 erhöht das nur unsere Zugmöglichkeiten. Nun hat jede Partei in der Grundstellung 16 Figuren und nach Punkt 1 werden es niemals mehr. Wegen Punkt 2 entfaltet eine Figur ihre größtmögliche Wirkung auf einem sonst leeren Brett. Eine Dame hat niemals weniger

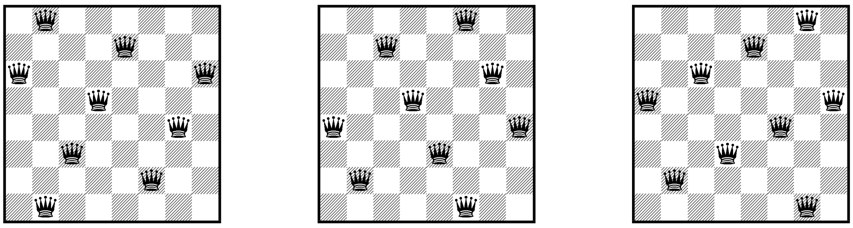

Abbildung 2: Stellungen mit 9 Damen und 201 Zugmöglichkeiten

Zugmöglichkeiten als ein König, ein Bauer, ein Läufer oder ein Turm. Ein Springer hat höchstens 8 Zugmöglichkeiten eine Dame höchstens 27 (im Zentrum).

Da eine Figur also höchstens 27 Zugmöglichkeiten haben kann und es höchstens 16 Schachfiguren einer Partei gibt, ergibt sich eine obere Schranke von

$$27 \cdot 16 = 432.$$

Offenbar kann aber eine Partei keine 16 Damen haben. Wenn wir für jede einzelne Figur der Grundstellung das Maximum annehmen was sie je erreichen kann, dann werden die Bauern natürlich in Damen gewandelt und mit 27 abgeschätzt. Doch Türme, Läufer, Springer und der König erreichen höchstens 14, 13, 8 und 8 Zugmöglichkeiten in dieser Reihenfolge. Wir erhalten somit die obere Schranke von

$$9 \cdot 27 + 2 \cdot 14 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 8 = 321.$$

Natürlich ist diese obere Schranke sehr grob, denn es ist klar, dass nur eine Schachfigur 27 Zugmöglichkeiten haben kann. Eine zweite Dame auf den zentralen vier Feldern wäre der ersten bereits im Wege.

Deshalb kann man mit dem Computer untersuchen wieviele Zugmöglichkeiten 9 Damen maximal haben. Es gibt etwa 27.5 Milliarden Stellungen. Das ist selbst mit einem brute force Algorithmus noch machbar. Man erhält ein Maximum von 201. Dies erzielt man mit den Stellungen in Abbilung 2. Dies führt zur Abschätzung:

$$201 + 2 \cdot 14 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 8 = 279.$$

Nun stellt sich natürlich die Frage ob es überhaupt optimal ist alle Bauern in Damen zu wandeln. Es könnte sein, dass bei dichten Stellungen ein Springer besser wäre. Dazu betrachten wir uns die Tabelle in Abbildung 3, welche mit einem vom Autor geschriebenen Computerprogramm ermittelt wurde. Sie zeigt wieviele Zugmöglichkeiten es für eine gegebene Anzahl von Damen optimalerweise gibt. Bis zur 12. Dame steigt das Maximum pro hinzugenommener Dame um mehr als 8 Züge. Dadurch kann man induktiv beweisen, dass man beim setzen von bis zu 12 Figuren idealerweise Damen nehmen muß. Den Beweis führt man wie folgt: Setzt man 0 Figuren, so hat man, im mathematischen Sinn, nur

Zahl der Damen	Zugmöglichkeiten	Änderung
0	0	-
1	27	27
2	52	25
3	77	25
4	100	23
5	123	23
6	144	21
7	163	19
8	182	19
9	201	19
10	214	11
11	225	11
12	236	11
13	243	7

Abbildung 3: Zugmöglichkeiten von Damen bei optimalem Aufbau

Damen verwendet, denn man hat offenbar keine andere Figur benutzt. Es sei nun n eine Anzahl von Figuren für die gilt:

1. Eine optimale Stellung für n Figuren besteht nur aus Damen
2. Eine optimale Stellung für $n+1$ Damen erlaubt mindestens 9 Züge mehr als eine optimale Stellung für n Figuren.

Angenommen eine optimale Stellung für $n+1$ Figuren enthält einen Springer, dann erlaubt diese mindestens soviele Züge wie eine optimale Stellung mit $n+1$ Damen. Entfernt man nun einen Springer verliert man dadurch höchstens 8 Zugmöglichkeiten. Die resultierende Stellung hätte also mindestens eine Zugmöglichkeit mehr als jede optimale Stellung für n beliebige Figuren. Aber die neue Stellung hat n Figuren. Das ist ein Widerspruch. Also ist unsere Annahme, dass es eine optimale Stellung mit $n+1$ Figuren gibt, welche einen Springer enthält falsch.

Wem das zu mathematisch war, der kann einige Anwendungen des Induktionsschritts im konkreten Beispiel betrachten:

Mit einer Dame kann man 27 Zugmöglichkeiten erzielen. Mit einem Springer nur 8. Mit einer Figur ist es daher optimal eine Dame zu verwenden.

Gäbe es eine optimale Stellung mit zwei Figuren von denen mindestens eine ein Springer ist, dann müsste diese Stellung mindestens 52 Zugmöglichkeiten haben, da man mit zwei Damen 52 Zugmöglichkeiten erzielen kann. Entfernt man aus unserer angenommenen Stellung einen Springer so würde man höchstens 8 Zugmöglichkeiten verlieren. Man hätte also eine Stellung mit nur einer Figur und mindestens 44 Zugmöglichkeiten. Aber wir wissen, dass es mit einer Figur höchstens 27 Zugmöglichkeiten gibt also ist es optimal bei zwei Figuren nur Damen zu verwenden.

Gäbe es eine optimale Stellung mit drei Figuren von denen mindestens eine ein Springer ist, dann müsste diese Stellung mindestens 77 Zugmöglichkeiten haben, da man mit drei Damen 77 Zugmöglichkeiten erzielen kann. Entfernt man aus unserer angenommenen Stellung einen Springer so würde man höchstens 8 Zugmöglichkeiten verlieren. Man hätte also eine Stellung mit nur zwei Figuren und mindestens $77-8 = 69$ Zugmöglichkeiten. Aber wir wissen, dass es mit zwei Figuren höchstens 52 Zugmöglichkeiten gibt also ist es optimal bei drei Figuren nur Damen zu verwenden.

So fährt man fort bis zu dem Punkt:

Gäbe es eine optimale Stellung mit 12 Figuren von denen mindestens eine ein Springer ist, dann müsste diese Stellung mindestens 236 Zugmöglichkeiten haben, da man mit 12 Damen 236 Zugmöglichkeiten erzielen kann. Entfernt man aus unserer angenommenen Stellung einen Springer so würde man höchstens 8 Zugmöglichkeiten verlieren. Man hätte also eine Stellung mit nur 11 Figuren und mindestens $236 - 8 = 228$ Zugmöglichkeiten. Aber wir wissen, dass es mit 11 Figuren höchstens 225 Zugmöglichkeiten gibt also ist es optimal bei 12 Figuren nur Damen zu verwenden.

Bei 13 Damen können wir die Annahme der Existenz eines Springers nicht mehr zum Widerspruch führen. Denn nach entfernen eines Springers erhielten wir eine Stellung mit 12 Damen und mindestens $243 - 8 = 235$ Zugmöglichkeiten. Da man mit 12 Figuren 236 Zugmöglichkeiten erreichen kann können wir auf diese Weise nicht Ausschließen das ein Springer hilfreich ist. Das heißt natürlich nicht das die optimale Stellung mit 13 Damen einen Springer enthält. Wahrscheinlich ist das nicht der Fall. Aber wir können diese Möglichkeit mit den oben beschriebenen Mittel nicht ausschließen.

Was können wir nun für eine optimale Stellung mit 13 Figuren noch sagen? Eine solche Stellung enthält höchstens einen Springer. Enthielte sie nämlich zwei oder mehr Springer so könnte man zwei Springer entfernen und würde eine Stellung mit 11 Figuren und $243 - 2 \cdot 8 = 227$ Zugmöglichkeiten erhalten. Mit 11 Figuren sind aber nur 225 Züge möglich.

Hat die optimale Stellung keinen Springer, so sind 243 Zugmöglichkeiten (tatsächlich) erreichbar. Mit einem Springer sind es höchstens $236 + 8 = 244$. Also ist 244 eine obere Schranke für 13 Schachsteine.

Das führt uns zu folgender Abschätzung. Außer den beiden Springern und dem König (mit je maximal 8 Zugmöglichkeiten) verfügt eine Partei Anfangs über 13 weitere Figuren (mit höchstens 243 Zugmöglichkeiten). Somit ergibt sich die Schranke

$$3 \cdot 8 + 243 = 267.$$

Faktisch haben wir bei dieser Abschätzung den Läufern und Türmen erlaubt sich in Damen und Springer zu verwandeln. Dennoch stellt diese grobe Abschätzung eine weitere Verbesserung dar.

Doch auch das ist noch nicht das Ende der Fahnenstange. Überraschenderweise führt eine getrennte Betrachtung von Turm- und Läuferzügen zu einer noch besseren Abschätzung. Es gibt maximal 11 Figuren die wie ein Läufer ziehen können. Das sind die Läufer selbst, die Dame und die 8 Bauern nach einer Wandlung in Dame oder Läufer. Entsprechend gibt es höchstens 11 Figuren die wie ein Turm ziehen können. Wir Untersuchen nun getrennt was man mit Türmen und Läufern erreichen kann. Bis zu 8 Türme postiert man idealerweise auf einer Diagonale der Länge 8. Man gewinnt jeweils das Optimum von 14 Zügen. Die nächsten beiden Türme füllen die verbliebenen Ecken. Dabei gewinnt man jeweils 12 Zugmöglichkeiten zerstört aber auch zwei. Also gewinnt man netto 10 Möglichkeiten. Beim 11. Turm wird es kniffelig. Mit dem Computer bestimmt man 138 Zugmöglichkeiten. Für 11 Läufer erhält man (ebenfalls mit dem Computer verifiziert) maximal 95 Zugmöglichkeiten. Wenn wir 9 Damen zwei Türme und zwei Läufer auf ein Schachbrett stellen, so können wir die Zahl der Züge in zwei Schritten zählen. Zunächst zählen wir die Läuferzüge der Läufer und der 9 Damen. Das sind höchstens 95. Dann zählen wir die Turmzüge der beiden Türme und der 9 Damen, dass sind höchstens 138. Da eine Dame nichts anderes kann als wie ein Läufer oder Turm zu ziehen haben wir als höchstens $95 + 138 = 233$ Zugmöglichkeiten in unserer Stellung. Wie zuvor kann man Fragen was passiert wenn einige Bauern in Springer gewandelt werden. Aber man sieht, dass das erzielte Optimum pro Dame um mehr als 8 ansteigt. Also erhält man bei unserer Abschätzmethode die größten Werte, wenn man annimmt, dass alle Bauern in Damen gewandelt werden. (Das ist aber kein Beweis das diese Vorgehensweise tatsächlich optimal ist.)

Außer den Damen, Türmen und Läufern haben wir wieder die zwei Springer und den König die je höchstens 8 Zugmöglichkeiten haben. Es ergibt sich somit die obere Schranke von

$$138 + 95 + 3 \cdot 8 = 257.$$

Natürlich ist auch diese noch grob. Um dies zu verdeutlichen stelle man sich vor man habe die tatsächlich optimale Stellung die mit den Schachfiguren einer Partei erreichbar ist.

Nun stellen wir drei Bretter auf. Auf das 1. stellen wir nur Läufer und zwar auf die Positionen an denen in der optimalen Stellung Läufer oder Damen stehen. Auf dem zweiten Brett verfahren wir in gleicher Weise mit den Türmen. Auf das dritte Brett kopieren wir die Springer und den König.

Verteilt auf die drei Brettern sollten die Figuren nun mehr Bewegungsfreiheit haben und die Summe der Zugmöglichkeiten auf den drei Brettern sollte zugenommen haben. Nun optimieren wir noch die Stellungen auf den drei Brettern auch das sollte noch Zugewinne bringen. Wenn wir mehr als zwei Springer auf dem dritten Brett haben entfernen wir diese und fügen je Springer einen Läufer in das erste und einen Turm in das zweite Brett ein. Danach optimieren wir die Stellung auf dem ersten und zweiten Brett abermals. Pro Springer gewinnen wir auf den beiden Brettern zusammen jeweils mehr als 8 Zugmöglichkeiten hinzu. Erst danach haben wir 257 Zugmöglichkeiten und es ist noch kein gegnerischer König im Spiel der nicht Schach stehen darf!

4 Fazit und Ausblick

Der Verzweigungsgrad von Schach liegt zwischen 218 und 257. Die obere Schranke ist dabei sehr grob. Die untere Schranke ist seit langer Zeit bekannt. Es spricht einiges dafür, dass sie scharf ist. Ein Beweis steht bisher aus. Versuche einen solchen Beweis zu finden scheinen nicht ganz hoffnungslos. Zumindest eine starke Verbesserung der oberen Schranke scheint möglich. Man kann zwar nicht die Schätzungsweise $2 \cdot 10^{43}$ Stellungen des Schachspiels durchsuchen.[1] Das erscheint jedoch kaum nötig. Wir wählen eine beliebige Schachstellung. Ist schwarz am Zug verwandeln wir die schwarzen Steine in weiße und umgekehrt. Nun modifizieren wir diese Stellung wie folgt: Wir entfernen bis auf den schwarzen König alle schwarzen Steine. Wir ignorieren daraus resultierende Schachs. Züge die den schwarzen König schlagen zählen wir nicht. Durch Bauernumwandlung erhaltene Springer bleiben bestehen. Die anderen umgewandelten Figuren und die übrigen Bauern werden in Damen verwandelt. Man erhält so eine Stellung mit höchstens 17 Figuren. Wenn wir das mit jeder legalen Schachstellung machen erhalten wir eine Menge von Stellungen die dramatisch kleiner ist als die Zahl der legalen Schachstellungen. (Die Anzahl liegt in der Größenordnung 10^{22}.) Da bei jeder Umwandlung (Abbildung) einer legalen Stellung in unseren Stellungsraum die Zahl der Zugmöglichkeiten nicht kleiner wird, ist die obere Schranke für diese kleiner Menge auch eine obere Schranke des Verzweigungsgrad von Schach. Die Menge ist immer noch viel zu groß um sie mit Hilfe von Computern komplett zu durchsuchen. Schlimmer noch, wir wissen nicht genau wie wir *nur* die aus legalen Stellungen hervorgegangenen aufzählen sollen ohne alle Schachstellungen durchzugehen. Das letztere Problem lösen wir indem wir nur minimale Legalitätskriterien an unsere Stellungen anlegen und so die durchsuchte Menge noch etwas vergrößern. Vergrößern der Stellungsmenge macht die obere Schranke möglicherweise schlechter, aber es bleibt eine obere Schranke.

Minimale Legalitätskriterien könnten die Abwesenheit von nicht abdeckbaren Schachs auf den Schwarzen König beinhalten. Ferner kann man die weißen Figuren in Damen, Springer, Türme, Läufer auf weißen und Läufern auf schwarzen Feldern einteilen. Für jede dieser Figurenarten zählt man getrennt die Differenz aus ihrer Anzahl in der vorliegenden Stellung und der Anzahl in der Grundstellung. So erhält man für jede Figur einen Überschuss oder ein Defizit. Die Zahl der Figuren darf 16 minus der Summe der Defizite nicht überschreiten, denn ein Defizit ist nur durch eine geschlagene Figur erklärbar. Ferner kann es nur für Dame und Springer Überschüsse geben. Die Summe der Überschüsse ist auf 8 begrenzt.

Man kann alle Stellungen (im erweiterten Suchraum mit den oben genannten Legalitätskriterien) sukzessive Aufbauen und bevor man in die Rekursion geht Abschätzungen anstellen, ob man unterhalb des Knotens im Suchbaum noch mit einem Optimum rechnen muß. Durch Beschneidungen des Suchbaums könnte das Ausschöpfen des Suchraum mit Computerunterstützung möglicherweise in erträglicher Zeit durchgeführt werden. Diese würde vermutlich zu einer

[1] Nach Petrović [1] Seite 10.

wesentlich besseren oberen Schranke führen.

Man kann vermuten, dass in der optimalen Stellung in unserem Suchraum der schwarze König in einer Ecke steht, denn dort behindert er die weißen Steine am wenigsten. Wenn das stimmt dann ist es vermutlich möglich durch Abdecken der Schachs in unmittelbarer Nähe zum schwarzen König zu einer legalen Schachstellung zu kommen. Diese legale Schachstellung hätte nur wenige Züge weniger als die gefundene obere Schranke. Man würde also entweder eine obere Schranke in der Nähe von 218 finden, oder aber eine bessere untere Schranke konstruieren können.

Zweifellos sind die gerade gemachten Überlegungen spekulativ. Aber wie sagte Kennedy: „We choose to go to the moon in this decade and do the other things, not because they are easy, but because they are hard, ...“.

Literatur

[1] Eero Bonsdorff, Dr. Karl Fabel, and Olavi Riihimaa. *Schach und Zahl*. Walter Rau Verlag, Düsseldorf, 1971.