Übungen zur Vorlesung Algorithmische Fragestellungen für komprimierte Daten

1. Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus für folgendes Problem an:

EINGABE: Ein SLP G und ein nichtdeterministischer endlicher Automat A.

FRAGE: Gilt $\mathrm{eval}(G) \in L(A)$?

2. SUBSETSUM ist das folgende Berechnungsproblem:

EINGABE: Binär kodierte Zahlen $w_1, \ldots, w_n, t \geq 1$.

FRAGE: Gibt es Bits $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$, so dass $\sum_{i=1}^n x_i \cdot w_i = t$ gilt?

Es ist bekannt, dass SUBSETSUM NP-vollständig ist. Seien im weiteren Zahlen $w_1, \ldots, w_n, t \geq 1$ wie im SUBSETSUM-Problem gegeben und sei $\overline{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$. Für zwei Vektoren $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{N}^n$ sei $\overline{x} \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$. Sei weiter $s_k = w_1 + \cdots + w_k$ $(1 \leq k \leq n)$ und $s = s_n = w_1 + \cdots + w_n$. Schließlich bestehe das SLP G aus folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned} A_1 &\to b a^{s+w_1} b \\ A_{k+1} &\to A_k a^{s-s_k+w_{k+1}} A_k \quad (1 \leq k < n), \end{aligned}$$

wobei A_n das Startnichtterminal von G ist. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{eval}(G) = \prod_{\overline{x} \in \{0,1\}^n} a^{\overline{x} \cdot \overline{w}} b a^{s - \overline{x} \cdot \overline{w}}.$$

Hierbei werden in dem Produkt $\prod_{\overline{x} \in \{0,1\}^n}$ alle Bitvektoren der Länge n in lexicographischer Reihnfolge durchlaufen.

3. Für zwei Wörter u und v der gleichen Länge n ist die Hamming-Distanz $d_H(u,v)$ zwischen u und v definiert als

$$d_H(u,v) = |\{i \mid 1 \leq i \leq n, u[i] \neq v[i]\}|,$$

d.h. $d_H(u,v)$ is die Anzahl der Positionen, an denen sich u und v unterscheiden. Folgern Sie aus Aufgabe 2, dass das folgende Problem NP-schwer ist:

EINGABE: Zwei SLPs G_1 und G_2 und eine binär kodierte Zahl N.
FRAGE: Gilt $d_H(\mathrm{eval}(G_1), \mathrm{eval}(G_2)) < N$?