

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Fragestellungen für komprimierte Daten

1. Sei Σ im folgenden ein Alphabet mit $|\Sigma| = k$. Sei $s \in \Sigma^*$ mit $|s| \geq 4k^2 + 2$. Zeigen Sie, dass dann $\sigma(s) < |s|$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass aus $|s| \geq 4k^2 + 2$ folgt, dass s sich als $s = ubvbwbx$ mit $|b| = 2$ schreiben lässt.

2. Lovasz Local Lemma ist die folgende Aussage:

Seien $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m$ Ereignisse (im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne) mit $\text{Prob}[\mathcal{E}_i] \leq p$ für alle i . Angenommen, jedes Ereignis \mathcal{E}_i hängt von höchstens d vielen anderen Ereignissen aus $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m\}$ ab, und gelte $e \cdot p \cdot (d + 1) \leq 1$ (hierbei ist e die Eulersche Konstante). Dann gilt $\text{Prob}[\bigwedge_{i=1}^m \overline{\mathcal{E}_i}] > 0$.

Sei nun $s \in \Sigma^*$ ein String der Länge n , dessen n viele Positionen zufällig (und unabhängig voneinander) mit Symbolen aus Σ belegt werden. Für alle $1 \leq i < j \leq n - 1$ mit $j \geq i + 2$ sei $\mathcal{E}_{i,j}$ das Ereignis $s[i, i + 1] = s[j, j + 1]$. Berechnen Sie $\text{Prob}[\mathcal{E}_{i,j}]$.

3. Von wievielen anderen Ereignissen $\mathcal{E}_{i',j'}$ hängt ein Ereignis $\mathcal{E}_{i,j}$ höchstens ab?
4. Zeigen Sie mittels Lovasz Local Lemma, dass aus $n \leq \frac{k^2}{6e} + 11$ (wobei $k = |\Sigma|$) folgt, dass ein Wort $s \in \Sigma^*$ mit $|s| = n = \sigma(s)$ existiert.