

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Fragestellungen für komprimierte Daten

---

1. Sei  $\Sigma$  im folgenden ein Alphabet mit  $|\Sigma| = k$ . Sei  $s \in \Sigma^*$  mit  $|s| \geq 4k^2 + 2$ . Zeigen Sie, dass dann  $\sigma(s) < |s|$  gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass aus  $|s| \geq 4k^2 + 2$  folgt, dass  $s$  sich als  $s = ubvbwbx$  mit  $|b| = 2$  schreiben lässt.

2. Lovasz Local Lemma ist die folgende Aussage:

Seien  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m$  Ereignisse (im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne) mit  $\text{Prob}[\mathcal{E}_i] \leq p$  für alle  $i$ . Angenommen, jedes Ereignis  $\mathcal{E}_i$  hängt von höchstens  $d$  vielen anderen Ereignissen aus  $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m\}$  ab, und gelte  $e \cdot p \cdot (d + 1) \leq 1$  (hierbei ist  $e$  die Eulersche Konstante). Dann gilt  $\text{Prob}[\bigwedge_{i=1}^m \overline{\mathcal{E}_i}] > 0$ .

Sei nun  $s \in \Sigma^*$  ein String der Länge  $n$ , dessen  $n$  viele Positionen zufällig (und unabhängig voneinander) mit Symbolen aus  $\Sigma$  belegt werden. Für alle  $1 \leq i < j \leq n - 1$  mit  $j \geq i + 2$  sei  $\mathcal{E}_{i,j}$  das Ereignis  $s[i, i + 1] = s[j, j + 1]$ . Berechnen Sie  $\text{Prob}[\mathcal{E}_{i,j}]$ .

3. Von wievielen anderen Ereignissen  $\mathcal{E}_{i',j'}$  hängt ein Ereignis  $\mathcal{E}_{i,j}$  höchstens ab?
4. Zeigen Sie mittels Lovasz Local Lemma, dass aus  $n \leq \frac{k^2}{6e} + 11$  (wobei  $k = |\Sigma|$ ) folgt, dass ein Wort  $s \in \Sigma^*$  mit  $|s| = n = \sigma(s)$  existiert.