Übungen zur Vorlesung DNA-Computing und Sprachtheorie

---

1. In der Vorlesung hatten wir im Zusammenhang mit Verzweigungsprozessen die Folge $(x_i)_{i\geq 0}$ mit $x_0 = 0$ und $x_{i+1} = (1-r) + r \cdot x_i^2$ betrachtet. Beweisen Sie, dass gilt: (i) $\lim_{i\to\infty} x_i = 1$ falls $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ und (ii) $\lim_{i\to\infty} x_i = \frac{1}{r} - 1$ falls $\frac{1}{2} < r \leq 1$.

2. Seien $B(i,b) \in \{A,T,C,G\}^{20}$, wobei $1 \leq i \leq k$ und $b \in \{0,1\}$, verschiedene einsträngige DNA-Sequenzen. Dann kann eine binäre Sequenz $b = b_1 b_2 \cdots b_k$ ($b_i \in \{0,1\}$) der Länge k durch die DNA-Sequenz

$$B_1(b) = B(1,b_1)B(2,b_2)\cdots B(k,b_k)$$

kodiert werden. Um nun aus einer DNA-Lösung S alle Sequenzen herauszufiltern, welche einen Binärstring mit einer 1 an der i-ten Position kodieren, müssen alle Sequenzen aus S herausgefiltert werden, welche die Teilsequenz $B(i,1)$ enthalten; wir nennen diese Operation filter$(i,1)$. Um die Fehlerwahrscheinlichkeit bei dieser Operation zu senken, wurde vorgeschlagen, $b = b_1 b_2 \cdots b_k$ durch die DNA-Sequenz

$$B_2(b) = B(1,b_1)B(2,b_2)\cdots B(k,b_k)B(1,b_1)B(2,b_2)\cdots B(k,b_k)$$

zu kodieren.

a) Sei nun b eine Binärsequenz mit einer 1 an der i-ten Position. Sei p_j ($j \in \{1,2\}$) die Wahrscheinlichkeit, dass die DNA-Sequenz $B_j(b)$ erfolgreich bei der Operation filter$(i,1)$ aus der DNA-Lösung herausgefiltert wird. Wie kann erreicht werden, dass $p_2 > p_1$ gilt?

b) Sei nun L eine Menge von Binärstrings und sei $r \in \mathbb{N}$. Mit $S_1(L)$ bezeichnen wir die DNA-Lösung, die für jeden String $b \in L$ genau $2r$ viele Kopien der DNA-Sequenz $B_1(b)$ enthält. Mit $S_2(L)$ bezeichnen wir die DNA-Lösung, die für jeden String $b \in L$ genau r viele Kopien der DNA-Sequenz $B_2(b)$ enthält. Warum ist es realistisch anzunehmen, dass in $S_2(L)$ gegenüber $S_1(L)$ nur halb soviele Kodierungen jedes Strings aus L existieren?

c) Angenommen wir führen nun eine Folge von m aufeinanderfolgenden Filteroperationen filter(i_ℓ, b_ℓ) $(1 \leq \ell \leq k)$ aus, einmal beginnend mit $S_1(L)$ und einmal beginnend mit $S_2(L)$. Sei b eine Binärsequenz bei der an der Position i_ℓ das Bit b_ℓ steht $(1 \leq \ell \leq k)$. Berechnen Sie die die Wahrscheinlichkeit P_j $(j \in \{1, 2\})$, dass eine der Kopien von $B_j(b)$ aus $S_j(L)$ durch die Folge der Filteroperationen erfolgreich aus $S_j(L)$ herausgefiltert wird.

d) Welche Beziehung müssen p_2 und p_1 erfüllen, damit P_2 größer als P_1 ist?