

Übungen zur Vorlesung Randomisierte Algorithmen

1. Zeigen Sie, dass für die n -te Harmonische Zahl $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ gilt: $H_n \in \Theta(n \cdot \log(n))$.
2. Betrachten Sie die Permutation $\pi(T)$ (Level-Order Transversal des binären Suchbaums T), die sich aus einem Ablauf des Algorithmus **randQS** ergibt. Ist $\pi(T)$ gleichmäßig über den Wahrscheinlichkeitsraum aller Permutationen von S verteilt?
3. Alternative Analyse von **randQS**: Wie in der Vorlesung bezeichne $E[V(n)]$ den Erwartungswert für die Anzahl der Vergleiche bei Sortieren einer Menge mit n Elementen. Zeigen Sie die folgenden Gleichungen:

- $E[V(n)] = (n - 1) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E[V(i - 1)]$.
- $n \cdot E[V(n)] - (n - 1) \cdot E[V(n - 1)] = 2(n - 1) + 2E[V(n - 1)]$
- $\frac{E[V(n)]}{n+1} = 2H_n + \frac{4}{n+1} - 4$.

Aus der letzten Gleichung ergibt sich dann $E[V(n)] = 2H_n(n + 1) - 4n$.