Übungen zur Vorlesung Randomisierte Algorithmen

Ein k-regulärer Digraph ist ein gerichteter Graph, so dass jeder Knoten genau k ausgehende Kanten und genau k eingehende Kanten besitzt. Sei $G = (V, E)$ ein k-regulärer Digraph. Ein Zyklus in G ist eine Folge von Knoten $(v_1, \ldots, v_n)$ mit: (i) $n \geq 1$, (ii) $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, (iii) $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $1 \leq i < n$, und (iv) $(v_n, v_1) \in E$. Zwei Zyklen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(u_1, \ldots, u_m)$ sind Knoten-diskunkt, falls $\{v_1, \ldots, v_n\} \cap \{u_1, \ldots, u_m\} = \emptyset$ gilt.
Es soll folgende Aussage gezeigt werden: In G gibt es mindestens $\lfloor \frac{k}{3\ln(k)} \rfloor$ viele paarweise Knoten-diskunkte Zyklen, falls $k \geq 6$.

1. Sei $C = \lfloor \frac{k}{3\ln(k)} \rfloor$. Konstruieren Sie eine Partition der Knotenmenge V indem jeder Knoten $v \in V$ zufällig und gleichverteilt in eine der Klassen $V_1, \ldots, V_C$ kommt. Für $v \in V$ sei B_v das Ereignis, dass es einen Knoten $u \in V$ und eine Klasse V_i mit $(v, u) \in E$ und $u, v \in V_i$ gibt. Sei $A_v = \overline{B_v}$ das Komplementärereignis. Zeigen Sie, dass $\text{Prob}[A_v] \leq k^{-3}$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass es für jeden Knoten $v \in V$ eine Menge U von höchstens $(k+1)^2$ vielen Knoten gibt, so dass das Ereignis A_v unabhängig zu der Menge $\{A_u \mid u \notin U\}$ von Ereignissen ist.

3. Schließen Sie nun mittels Lovászs Local Lemma, dass $\text{Prob}[\bigcup_{v \in V} B_v] > 0$ gilt.

4. Warum folgt hieraus, dass es mindestens $\lfloor \frac{k}{3\ln(k)} \rfloor$ viele paarweise Knoten-diskunkte Zyklen in G gibt?