Übungen zur Vorlesung Randomisierte Algorithmen

Das Zufallsexperiment aus Aufgabe 2 von Blatt 4 kann als ein randomisierter Algorithmus zur Berechnung einer Partition $V = V_0 \cup V_1$ angesehen werden. Will man mit diesem randomisierten Algorithmus eine Partition mit der Eigenschaft ($\star$) von Blatt 4 deterministisch berechnen, so könnte man alle 2^n vielen Möglichkeiten für die n vielen Zufallsbits durchprobieren, was jedoch einen Exponentialzeitalgorithmus ergibt. Wir wollen nun eine effizientere Derandomisierung finden.

(1) Zeigen Sie, dass paarweise Unabhängigkeit der Zufallbits für die Berechnung in Aufgabe 2 von Blatt 4 ausreicht.

Eine Menge $\mathcal{H}$ von Funktionen $h : V \to \{0,1\}$ heißt *universell*, falls für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt:

$$\text{Prob}[h(u) = h(v)] = \frac{1}{2}$$

falls h zufällig und gleichverteilt aus $\mathcal{H}$ ausgewählt wird.

(2) Sei $\mathcal{H}$ nun eine universelle Menge von Funktionen $h : V \to \{0,1\}$. Betrachten Sie den im Vergleich zu Aufgabe 2 von Blatt 4 wie folgt modifizierten randomisierten Algorithmus: Wähle zufällig und gleichverteilt eine Funktion $h \in \mathcal{H}$ aus, und füge jeden Knoten $v \in V$ zur Menge V_i hinzu, falls $h(v) = i$ ($i \in \{0,1\}$). Beweisen Sie, dass der Erwartungswert für die Anzahl der Kanten zwischen V_0 und V_1 gleich $\frac{|E|}{2}$ ist.

Wir zeigen nun, dass eine universelle Klasse $\mathcal{H}$ von Funktionen existiert, so dass $|\mathcal{H}|$ durch $2 \cdot |V|$ beschränkt ist. Wir betrachten dabei Knoten aus V als Bitstrings der Länge $\ell := \lceil \log |V| \rceil$. Sei $\mathcal{H} = \{h_{a_1 \ldots a_l} \mid a_i \in \{0,1\}\}$. Für $v = v_1 \ldots v_\ell \in V$ ($v_i \in \{0,1\}$) sei

$$h_{a_1 \ldots a_\ell}(v) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} (v_i \wedge a_i),$$

wobei $\oplus$ die XOR-Operation bezeichnet. Beachten Sie, dass $|\mathcal{H}| \leq 2 \cdot |V|$ gilt.

(3) Beweisen Sie, dass $\mathcal{H}$ universell ist.