

Übungen zur Vorlesung Randomisierte Algorithmen

1. Eine Sprache L gehört zur Klasse BPP (bounded error probabilistic polynomial time), falls eine Konstante $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$, ein Polynom $p(n)$, und ein randomisierter Algorithmus A existiert mit:
 - A rechnet auf einer Eingabe x höchstens $p(|x|)$ viele Schritte (für jede Wahl der Zufallsbits).
 - Wenn $x \in L$ dann $\text{Prob}[A \text{ akzeptiert } x] \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$
 - Wenn $x \notin L$ dann $\text{Prob}[A \text{ akzeptiert } x \text{ nicht}] \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$
2. Welche Inklusionen gelten zwischen den Klassen BPP, RP und coRP?
3. Ist BPP unter Komplement abgeschlossen?
4. Für $L \in \text{BPP}$ gibt es einen randomisierten Polynomialzeitalgorithmus A , der bei Eingabe x sowohl im Fall $x \in L$ als auch im Fall $x \notin L$ eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $< \frac{1}{2} - \varepsilon$ hat. Zeigen Sie, wie die Fehlerwahrscheinlichkeit unter Aufrechterhaltung einer polynomiellen Zeitschranke auf $2^{-|x|}$ reduziert werden kann.

Hinweis: Führen Sie t viele unabhängige Wiederholungen des Algorithmus A durch (für ein später näher zu spezifizierendes t), und akzeptieren Sie die Eingabe x genau dann, falls die Anzahl der Wiederholungen von A , wo dieser die Eingabe x akzeptiert hat, mindestens $\frac{t}{2}$ ist. Schätzen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit mittels Chernoffs Schranke ab.