Aufgabenblatt 8 Wintersemester 2005/2006 Markus Lohrey

Übungen zur Vorlesung Randomisierte Algorithmen

---

1. Sei K_n der vollständige ungerichtete Graph mit n Knoten, d.h. in K_n gibt es zwischen je zwei verschiedenen Knoten eine Kante. Wir betrachten im folgenden Färbungen der $\binom{n}{2}$ vielen Kanten von K_n mit zwei Farben (etwas rot und blau). Eine Teilmenge U von Knoten von K_n heißt monochromatisch, falls es eine Farbe χ gibt, so dass jede Kante zwischen zwei Knoten aus U mit χ gefärbt ist. Angenommen $k \leq n$ erfüllen

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1.$$

Zeigen Sie mittels der probabilistischen Methode, dass es dann eine Kanten-Färbung von K_n gibt, so dass es keine monochromatische Teilmenge mit k Knoten gibt.
Hinweis: Färben Sie die Kanten von K_n zufällig und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es eine monochromatische Teilmenge mit k Knoten gibt.

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Für einen Knoten $v \in V$ sei d_v der Grad von v (Anzahl der Nachbarn). Zeigen Sie mittels der probabilistischen Methode, dass es in G eine unabhängige Menge $U \subseteq V$ von Knoten (d.h. es gibt keine Kante zwischen zwei Knoten aus U) der Größe mindestens $\sum_{v \in V} \frac{1}{d_v+1}$ gibt.
Hinweis: Wählen Sie eine beliebige Auflistung der Knoten von G. Gehen Sie dann diese Auflistung von links nach rechts durch und generieren Sie dabei mittels einer Greedy-Strategie eine möglichst große unabhängige Teilmenge.