Übungen zur Vorlesung Randomisierte Algorithmen

Seien $n, d \in \mathbb{N}$ und $\alpha, c \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < 1$ und $c > 1$. Ein (n, d, α, c) OR-concentrator ist ein ungerichteter Graph G mit folgenden Eigenschaften:

- Die Knotenmenge von G ist $L \cup R$, wobei $L \cap R = \emptyset$ und $|L| = |R| = n$ gilt. Es gibt keine Kanten innerhalb von L oder innerhalb von R, d.h. G is bipartit.
- Jeder Knoten aus L hat höchstens d Nachbarn in R.
- Ist S eine beliebige Teilmenge von L mit $|S| \leq \alpha \cdot n$, dann hat S mehr als $c \cdot |S|$ viele Nachbarn in R.

Sei $d = 18$, $c = 2$, $\alpha = \frac{1}{3}$. Im folgenden soll mittels der probabilistischen Methode gezeigt werden, dass für jedes genügend große n ein (n, d, α, c) OR-concentrator existiert.

1. Erzeugen Sie einen zufällligen bipartiten Graphen G mit Knotenmenge $L \cup R$ ($L \cap R = \emptyset$ und $|L| = |R| = n$) indem jeder Knoten aus L zufällig d viele Knoten aus R auswählt (mit Zurücklegen). Sei $S \subseteq L$ und $T \subseteq R$ mit $|S| = s$ und $|T| = c \cdot s$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Nachbarn von S in T enthalten sind?

2. Sei $\mathcal{E}_s$ folgendes Ereignis: Es gibt eine Teilmenge $S \subseteq L$ mit (i) $|S| = s$ und (ii) S hat höchstens $c \cdot s$ viele Nachbarn in R. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\text{Prob}[\mathcal{E}_s] \leq \binom{n}{s} \binom{n}{c \cdot s} \left(\frac{c \cdot s}{n}\right)^{d \cdot s} \tag{1}$$

3. Zeigen Sie unter Verwendung von $\binom{n}{k} \leq (n \cdot e/k)^k$ und $s \leq \alpha \cdot n$, dass die rechte Seite in (1) beschränkt werden kann durch:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{18} (3e)^3\right]^s$$

4. Summieren Sie nun über alle $s \geq 1$ und zeigen Sie so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass G kein (n, d, α, c) OR-concentrator ist, echt kleiner als 1 ist.