Известия вузов. Математика
2010, №1, с. 21–33

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Ф. ДИКЕРТ, Т. ХАРЬЮ, Д. НОВОТКА

РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕЙНБАУМА ДЛЯ ПРИМИТИВНЫХ СЛОВ

Аннотация. Вейнбаум [1] показал, что если w — примитивное слово и a — буква в w, то некоторое сопряженное с w слово может быть записано в виде произведения uv, где a — это префикс и суффикс в u, а v ни начинается с a, ни заканчивается на a. Кроме того, и u, и v обладают единственным вхождением в w как циклические факторы. Последнее условие означает, что существует ровно одно сопряженное с w слово, в котором u является префиксом, а также существует ровно одно сопряженное с w слово, в котором v является префиксом. Именно это условие и делает результат нетривиальным.

Мы даем упрощенное доказательство результата Вейнбаума. Отправляясь от этого доказательства, мы получаем довольно простые доказательства и для некоторых более общих утверждений. Для этой цели мы вводим понятия фактора Вейнбаума и разложения Вейнбаума.

Ключевые слова: примитивное слово, сопряженные слова, циклический фактор.

УДК: 519.101

Abstract. Weinbaum [1] showed the following. Let w be a primitive word and a be letter in w. Then a conjugate of w can be written as uv such that a is a prefix and a suffix of u, but v neither starts nor ends with a, and u and v have a unique position in w as cyclic factors. The latter condition means that there is exactly one conjugate of w having u as a prefix and there is exactly one conjugate of w having v as a prefix. It is this condition which makes the result non-trivial.

We give a simplified proof for Weinbaum's result. Guided by this proof we exhibit quite different, but still simple, proofs for more general statements. For this purpose we introduce the notion of *Weinbaum factor* and *Weinbaum factorization*.

Keywords: primitive word, conjugate words, cyclic factor.

1. Введение

Слова w и w' *сопряжены*, если найдется такое слово v, что $wv = vw'$. *Циклическим фактором* примитивного слова w назовем произвольный фактор слова, сопряженного с w. Говорят, что циклический фактор u обладает единственным вхождением в слово w, если существует ровно одно сопряженное с w слово, в котором u является префиксом. Вейнбаум в [1] показал, что для каждой буквы a примитивного слова w существует слово uv, сопряженное с w, такое, что оба фактора u и v обладают единственным вхождением в слове w и циклический фактор u начинается с a и заканчивается на a, а v и ни начинается с a, и ни заканчивается на a.

Поступила 16.01.2007

В этой статье мы представим несколько измененное и более легкое доказательство результата Вейнбаума. Руководствуясь этими рассуждениями, мы фактически получим более общие утверждения. Это приведет нас к понятиям фактора Вейнбаума и разложения Вейнбаума (или, более кратко, W-разложения). *Фактор Вейнбаума* примитивного слова w — это циклический фактор, который удовлетворяет некоторым естественным условиям, достаточным для доказательства аналога результата Вейнбаума (букву a заменим на фактор f). Более того, фактор Вейнбаума даст нам другой фактор g, который мы назовем *дополняющим маркером.* В теореме 2 мы опишем W-разложение для пары (f, g) вместо одной буквы (или фактора), как в исходном результате Вейнбаума.

В разделе 5 мы докажем существование W-разложения, используя слова Линдона относительно специального лексикографического порядка. В разделе 6 мы рассмотрим W-разложения для неупорядоченных алфавитов. Основной результат, теорема 3, состоит в том, что W-разложение слова w для фактора Вейнбаума f может быть найдено итерацией некоторого отношения R за число шагов, не превосходящее $\log_\Phi(n)$, где $n = |w|$ и Φ — это коэффициент золотого сечения. В разделе 7 мы покажем, что эта оценка точна, когда найдем нижнюю границу для числа итераций для слов, которые соответствуют так называемым сингулярным факторам в бесконечной последовательности Фибоначчи.

И, наконец, в разделах 8 и 9 мы посмотрим на эту задачу с обратной точки зрения. Начнем со слова w (или с подходящей пары слов f и g). Следствие утверждения 4 утверждает, что для любого слова f, содержащего не менее двух букв, существуют примитивные слова, в которых f входит как фактор, но соответствующего W-разложения для f не существует. С другой стороны, доля слов с W-разложением для f и g (если f и g удовлетворяют некоторым необходимым условиям) быстро сходится к 1. Пары, удовлетворяющие этим условиям, называются *кандидатами Вейнбаума.* Используя такую пару (f, g), мы покажем в утверждении 2, что все достаточно длинные случайные слова имеют W-разложение для f и g. Таким образом, можно рассчитывать на то, что существует условие для множества троек (w, f, g), являющееся необходимым и достаточным для существования W-разложения слова w для f и g.

2. Предварительные сведения

Пусть A — конечный алфавит и A^* — свободный моноид над A. Обозначим через ε *пустое слово*, а через A^+ — свободную полугруппу над A. Таким образом, $A^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\}$. Длину слова $w \in A^*$ будем обозначать через $|w|$. Пусть $w = uv$, тогда слово u называется *префиксом*, а v — суффиксом слова w. Тот факт, что u есть префикс (v есть суффикс) слова w обозначается через $u \leq_{\mathrm{p}} w$ (соответственно через $v \leq_{\mathrm{s}} w$). Мы также будем писать $u \leq_{\mathrm{p}} wA^*$, если $u \leq_{\mathrm{p}} w'$ для некоторого $w' \in wA^*$, аналогично для $v \leq_{\mathrm{s}} A^*w$.

Слово $w \in A^*$ называется *примитивным*, если его нельзя представить в виде степени некоторого отличного от него слова, т. е. из равенства $w = x^k$ следует $k = 1$. Для слов сопряженность равносильна взаимной транспонированности (см. [2], с. 7). Это означает, что слово w' *сопряжено* с w, если существуют такие слова u и v, что $w = vu$ и $w' = uv$. Слово f называется (*собственным*) *фактором* слова w, если $w = ufv$ и $\varepsilon \neq uv \neq w$. Мы будем говорить, что f *входит* в w, если f — фактор w. Назовем слово f *циклическим фактором* слова w, если $|f| \leq |w|$ и f входит в w^2. Заметим, что все сопряженные с w слова являются факторами w^2. Следовательно, циклические факторы — это в точности факторы сопряженных с w слов. Циклический фактор f *обладает единственным вхождением* в w, если существует единственное сопряженное с w слово w', в котором f — префикс.

Два слова u и v *пересекаются* в (циклическом) слове w, если w^3 имеет фактор xyz такой, что $u = xy$ и $v = yz$ или $u = yz$ и $v = xy$, где x, y и z — непустые слова, либо если u — фактор v или если v — фактор u. Будем говорить, что слово u имеет *самопересечение* в w, если оно нетривиально пересекается само с собой в w. Слово f назовем *маркером*, если оно не имеет самопересечений в w. Заметим, что f может иметь нетривиальное пересечение с самим собой, но тогда это пересечение не должно входить в w. Например, aba — маркер в $ababb$, но не в $ababa$.

Если f — маркер в w, где $f \leq_{\mathrm{p}} w$, то w имеет единственное разбиение вида $w = fz_1fz_2 \cdots fz_k$, где $z_i \in A^*$ и $fz_if \notin A^+fA^+$.

3. Теорема Вейнбаума

Результат Вейнбаума — это следующая теорема в случае, когда $m = 1$.

Теорема 1 ([1]). *Пусть w — примитивное слово и a^m — циклический фактор в w, где $m \geq 1$. Тогда некоторое слово w', сопряженное с w, имеет разложение $w' = uv$, где u и v обладают единственным вхождением в w, слово u принадлежит $a^mA^* \cap A^*a^m$, слово v не принадлежит $aA^* \cup A^*a$.*

Доказательство. Пусть $f = a^m$. Выберем некоторый наибольший фактор g слова w такой, что $g \notin aA^* \cup A^*a \cup A^*fA^*$ и fgf является циклическим фактором w^2. Такой фактор существует. Действительно, некоторое сопряженное с w слово имеет префикс f, после которого стоит буква, отличная от a. Рассмотрим фактор g, который начинается с этой буквы и заканчивается, когда вновь встречаем фактор f в w^2. Тогда последняя буква в g тоже не есть a. Следовательно, $g \notin aA^* \cup A^*a \cup A^*fA^*$. Так как существует по крайней мере один такой фактор, то можем выбрать и наибольший. Важное наблюдение: каждое циклическое вхождение g в w предшествует f и следует за f. Таким образом, g является маркером.

Таким образом, либо g есть буква, либо можно заменить g на некоторую букву b. В результате получим (новое) слово $\overline{w}$. Если докажем точно такое же утверждение для $\overline{w}$ и b, то получим (с точностью до порядка двух факторов) искомое разбиение для w и f. Действительно, пусть $\overline{w} = v'u'$, где v' и u' обладают единственным вхождением в $\overline{w}$, фактор v' начинается с b и заканчивается на b, а u' не начинается с b и не заканчивается на b. Так как можем рассматривать слова, сопряженные с $\overline{w}$, то возьмем $\overline{w}' = u'v'$. Это приведет к искомому разложению $w = uv$. Необходимо убедиться, что u и v обладают единственным вхождением в w. Это верно, так как g является маркером без пересечений с a^m в w.

Используя индукцию по длине w, можем предполагать, что $g = b$ является буквой. Повторяя те же рассуждения для b, получим новый фактор h, который соответствует g на первом шаге. Снова, используя индукцию по длине h, можно считать, что h — это буква. Так как в w буква b предшествует f и находится после f, то это означает, что $m = 1$ и $h = a$. Но, отсюда следует, что $w \in (ab)^+ \cup (ba)^+$. Так как w — примитивное слово, то имеем, что $w = ab$ или $w = ba$, и доказательство становится тривиальным. □

4. Разложение Вейнбаума и факторы

Пусть w — примитивное слово, а слово w' сопряжено с ним. Рассмотрим произвольное слово f. Тогда $w' = uv$ называется *разложением Вейнбаума слова w для f* (или *W-разложением*), если u и v обладают единственными вхождениями в w, а также $u \in fA^* \cap A^*f$ и $v \notin fA^* \cup A^*f$. Мы получим исходное определение Вейнбаума, если заменим f на одну букву. Каждая буква a является маркером в слове w, но предположение, что для маркера всегда строится W-разложение, неверно. Ситуация оказывается более сложной.

Пример 1. Рассмотрим слово $w = abaaaba$. Заметим, что

1) для сопряженного с w слова $w' = (aaa) \cdot (baab)$ легко строится W-разложение для a, aa и aaa; факторы a и aaa являются маркерами;

2) однако aa — не маркер;

3) циклический фактор $f = aabaa$ не является маркером и для него нет W-разложения у w, так как a не обладает единственным вхождением в w;

4) фактор aba является маркером, но для него в w опять нет W-разложения, так как ни a, ни $aaba$, ни $abaa$ не обладают единственным вхождением в w.

Перед тем, как продолжить, дадим более сильное и более симметричное определение для двух факторов f и g.

Пусть w, f, g — слова, причем w примитивно. Разложение $w' = uv$ слова w', сопряженного с w, называется *W-разложением w для f и g*, если выполняются следующие три условия:

1) слова u и v обладают единственным вхождением в w,
2) $u \in (fA^* \cap A^*f) \setminus (gA^* \cup A^*g)$,
3) $v \in (gA^* \cap A^*g) \setminus (fA^* \cup A^*f)$.

Заметим, что если uv является W-разложением слова w для f, то uv есть W-разложение w для f и v.

Замечание 1. Для слов f и g выполняется условие

$$(fA^* \cap A^*f) \setminus (gA^* \cup A^*g) \neq \emptyset \iff g \not\leq_{\mathrm{p}} f \quad \text{и} \quad g \not\leq_{\mathrm{s}} f.$$

Пример 2. Слово

$$w = bbaabacbaacbaaaca$$

имеет W-разложение для $f = ab$ и $g = ac$. Действительно, передвигая суффикс a в начало, получаем

$$w' = abbaabacbaacbaaac = (fbaf) \cdot (gbagbaag),$$

где оба фактора $fbaf$ и $gbagbaag$ обладают единственным вхождением в w.

Далее w будет примитивным словом. Пусть f — собственный фактор слова w. Обозначим через $G(f)$ множество факторов слова w таких, что $g \in G(f)$ тогда и только тогда, когда g — циклический фактор слова w, за которым следует и которому предшествует f в слове w^3, и g не пересекается с f. Более точно, мы положим

$$G(f) = \{g \mid |fg| \leq |w|,\ fgf \text{ — циклический фактор } w^2,\ fgf \notin A^+fA^+\}.$$

Замечание 2. Множество $G(f)$ может быть пустым даже для коротких факторов f. Например, в слове $w = (aab)^k aaaba$, где $k \geq 2$ и $f = aabaa$, каждый фактор fgf имеет третье вхождение f.

Мы имеем конструктивный результат, когда $G(f) \neq \emptyset$. В этом случае нас интересуют максимальные элементы множества $G(f)$. Положим

$$\max(G(f)) = \{g \in G(f) \mid g \text{ не входит ни в один другой элемент из } G(f)\}.$$

Определим подмножество $R(f)$ множества факторов слова w следующим образом:

$$R(f) = \{g \in \max(G(f)) \mid \ f \text{ и } g \text{ не пересекаются в } w\}.$$

Слово f называется *фактором Вейнбаума* слова w, если $R(f) \neq \emptyset$.

Заметим, что фактор Вейнбаума не обязательно является маркером, а маркер не обязательно является фактором Вейнбаума.

Пример 3. Пусть $w = abababb$. Слово $f = aba$ не является маркером в w, но $R(f) = \{bb\}$. Однако ab — маркер в w, но $G(ab) = \{b\}$ и $R(ab) = \emptyset$.

Важное замечание, сделанное ниже в лемме 1, состоит в том, что каждый элемент g из $R(f)$ является маркером. Следовательно, любой элемент из $R(f)$ можно назвать *дополнительным маркером*, так как если $g \in R(f)$, то g — маркер в w. Более того, f и g не пересекаются в w по определению $R(f)$. В частности, g не является фактором f.

Замечание 3. Рассмотрим слово w такое, что $|w| \geq 2$, и букву a из алфавита A. В качестве g можно выбрать циклический фактор максимальной длины между двумя вхождениями буквы a в w такой, что $g \in R(a)$ — дополнительный маркер. Более общо, пусть $f \in a^+$ и g — произвольные наибольшие циклические факторы слова w, где $g \notin aA^* \cup A^*a \cup A^*fA^*$, но fgf — циклический фактор слова w^2. Тогда $g \in R(f)$ и, в частности, $R(f) \neq \emptyset$.

Лемма 1. *Если f — циклический фактор слова w, то любой фактор $g \in R(f)$ является маркером.*

Доказательство. Можем предположить, что $\varepsilon \neq g \in R(f) \neq \emptyset$. Предположим, что g не является маркером. Тогда $h = xyz$ — фактор слова w^2, где $xy = g = yz$ для некоторых непустых слов x, y и z. Так как f и g, также как f и h, не пересекаются в w, то существует $h' = phq \in G(f)$ (между двумя последовательными вхождениями f в w^2) и h — фактор слова h'. Это приводит к противоречию, так как получили, что $g \notin \max(G(f))$. □

5. Разложение Вейнбаума для слов Линдона

В этом разделе докажем более сильный вариант теоремы Вейнбаума [1], используя слова Линдона.

Пусть $\trianglelefteq$ — полный порядок на алфавите A. Тогда $\trianglelefteq$ можно продолжить до *лексикографического* порядка на A^*, полагая $u \trianglelefteq v$, если либо $u \leq_{\mathrm{p}} v$, либо $xa \leq_{\mathrm{p}} u$ и $xb \leq_{\mathrm{p}} v$, где $a \neq b$, $a \trianglelefteq b$ и $x \in A^*$. *Словом Линдона* называется примитивное слово, являющееся минимальным в множестве сопряженных с ним слов относительно порядка $\trianglelefteq$. Заметим, что если w — это слово Линдона, то оно *неокаймленное*, т. е. $w \notin fA^* \cap A^*f$ для каждого собственного фактора f слова w. Действительно, предположим противное: пусть f — собственный фактор слова w минимальной длины такой, что $w \in fA^* \cap A^*f$. Получим, что $w = fxf$, но тогда $w = fxf \trianglelefteq ffx$, откуда $xf \trianglelefteq fx$. Следовательно, $xff \trianglelefteq fxf = w$; противоречие.

Лемма 2. *Пусть $w = uv$ — слово Линдона относительно лексикографического порядка $\trianglelefteq$ такое, что v — это максимальный суффикс в w относительно $\trianglelefteq$. Тогда оба слова u и v обладают единственным вхождением в w. Более того, если v' — циклический фактор слова w такой, что $v \trianglelefteq v'$, то $v \leq_{\mathrm{p}} v'$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что v обладает единственным вхождением, так как v — максимальный суффикс и слово Линдона неокаймленное. Предположим, что v' — циклический фактор слова w такой, что $v \trianglelefteq v'$, и пусть $w^2 = xv'y$, где $|x| < |w|$.

Предположим сначала, что $w = xv'y'$. Так как v — максимальный суффикс, то получаем, что $v'y' \trianglelefteq v \trianglelefteq v'$. Следовательно, $y' = \varepsilon$ и поэтому $u = x$ и $v = v'$.

В другом случае мы имеем $w = xv'_1 = v'_2y$, где $v' = v'_1v'_2$ и $v'_2 \neq \varepsilon$. Предположим, что $v'_1 \neq v$. Если $|v| < |v'_1|$, то из $v \trianglelefteq v'$ следует, что $v \trianglelefteq v'_1$, а это противоречит максимальности v. Если же $|v'_1| < |v|$, то из $v'_1 \trianglelefteq v \trianglelefteq v'_1v'_2 = v'$ вытекает $v = v'_1v_2$ для некоторого $v_2 \neq \varepsilon$ такого, что $v_2 \trianglelefteq v'_2$. Таким образом, $v_2 \not\leq_{\mathrm{p}} v'_2$, а иначе из $w \in v_2A^* \cap A^*v_2$ следует, что w не есть слово Линдона. Получили, что $v_2uv'_1$ — слово, сопряженное с w и $v_2uv'_1 \trianglelefteq v'_2y = w$, что противоречит тому, что w — слово Линдона. Следовательно, $v \trianglelefteq v'$ влечет $v \leq_{\mathrm{p}} v'$.

Наконец, рассмотрим вхождения префикса u. Пусть $w^2 = xuy$, где $0 < |x| \leq |w|$. Пусть также $w^2 = xuv'y'$, где $|v'| = |v|$. Мы имеем $v \trianglelefteq v'$, так как uv' сопряжено с w и w — слово Линдона. Слово v' — циклический фактор слова w и, поэтому, по предыдущему $v = v'$ и v' обладает единственным вхождением в w. Это означает, что $w = x$ и u также обладает единственным вхождением в w. □

Теорема 2. *Пусть w — примитивное слово, f — фактор Вейнбаума для w и $g \in R(f)$. Тогда w имеет* W*-разложение для f и g.*

Доказательство. Здесь через $\overline{z}$ будем обозначать букву, соответствующую слову z. Так как рассматриваем сопряженые слова и по лемме 1 g — маркер (или, в случае $f = a$, g — наибольший циклический фактор слова w без a), то можно предположить, что $w = gz_1gz_2 \cdots gz_k$, где $k \geq 1$, причем $z_i \in fA^* \cap A^*f$ и g не является фактором ни одного из z_i. Пусть $B = \{\overline{g}, \overline{z}_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ — новый алфавит, соответствующий словам g и z_i. Можно предположить, что $x = \overline{gz}_1\overline{gz}_2 \cdots \overline{gz}_k$ — слово Линдона относительно лексикографического порядка $\trianglelefteq$ на B^* такого, что $\overline{g}$ минимально в B и если z_i входит в z_j, то $\overline{z}_i \trianglelefteq \overline{z}_j$ для всех i, j таких, что $1 \leq i, j \leq k$.

Пусть t — максимальный суффикс в x относительно порядка $\trianglelefteq$, скажем, $x = st$. Тогда $s = \overline{g}\,\overline{z}_1 \cdots \overline{g}\,\overline{z}_{m-1}\overline{g}$ и $t = \overline{z}_m\overline{g} \cdots \overline{z}_{k-1}\overline{g}\,\overline{z}_k$, где $\overline{z}_m$ — максимальный элемент относительно $\trianglelefteq$. В силу леммы 2 префикс s обладает единственным вхождением в x и, следовательно, соответствующий префикс $v = gz_1 \cdots gz_{m-1}g$ слова w также обладает единственным вхождением в w, так как фактор g является маркером. Также $v \in gA^* \cap A^*g$.

Опять по лемме 2 слово $t = \overline{z}_m\overline{g} \cdots \overline{z}_{k-1}\overline{g}\,\overline{z}_k$ обладает единственным вхождением в w, но отсюда не следует, что позиция $u = z_mg \cdots z_{k-1}gz_k$ единственна в w. Фактор z_m, соответствующий максимуму, является маркером и, следовательно, в w существует циклический фактор $u' = z_mg \cdots z_{k-1}gz_\ell$, где $z_k \leq_{\mathrm{p}} z_\ell$. Но тогда $t \trianglelefteq \overline{z}_m\overline{g} \cdots \overline{z}_{k-1}\overline{g}\,\overline{z}_\ell$. Согласно лемме 2 это влечет $\overline{z}_k = \overline{z}_\ell$ и, таким образом, $u = u'$ и $x = s\overline{z}_m\overline{g} \cdots \overline{z}_{k-1}\overline{g}\,\overline{z}_\ell$. Это означает, что $w = vu$ и u обладает единственным вхождением в w. Наконец, из $z_m, z_k \in fA^* \cap A^*f$ получаем, что также $u \in fA^* \cap A^*f$. □

Исходная теорема 1 Вейнбаума — это частный случай теоремы 2.

6. Итеративная конструкция

В этом разделе мы рассмотрим W-разложение с другой точки зрения. Здесь мы не будем требовать, чтобы алфавит был упорядочен. Основной результат этого раздела — теорема 3, которая показывает, что W-разложение слова w находится итерацией отношения R за не более чем $\frac{3}{2}\log_2(n)$ шагов, где $n = |w|$.

Лемма 3. *Пусть f — фактор Вейнбаума для слова w и $g \in R(f)$. Справедливы следующие утверждения:*

1) *маркер g — это фактор Вейнбаума в w, т. е. $R(g) \neq \emptyset$;*
2) *каждый фактор $h \in R(g)$ принадлежит $fA^* \cap A^*f$;*
3) *если f — маркер, то либо $R(g) = \{f\}$, либо $R(g) \subseteq fA^*f$.*

Доказательство. Из леммы 1 известно, что g — маркер. Из предположения максимальности получаем, что $g \in R(f)$ не является собственным фактором никакого фактора $h \in G(f)$, поэтому каждое циклическое вхождение g в w^2 должно предшествовать и следовать за f.

Мы можем считать, что $w = gz_1gz_2 \cdots gz_k$, где $k \geq 1$ такое, что $z_i \in fA^* \cap A^*f$, и g не является фактором ни одного из z_i. Теперь пусть слово h — это одно из слов z_i максимальной длины, тогда $h \in \max(G(g))$ и слова g и h не пересекаются. Следовательно, $h \in R(g)$ и $R(g) \neq \emptyset$. Фактически, каждое слово $h \in R(g)$ — одно из z_i, значит, $h \in fA^* \cap A^*f$. Но если f — маркер, то

$$\{h \mid h \text{ — фактор слова } w\} \cap fA^* \cap A^*f \subseteq \{f\} \cup fA^*f.$$

Из условия максимальности следует, что если $f \in R(g)$, то обязательно $R(g) \cap fA^*f = \emptyset$. □

Основная идея следующего доказательства состоит в том, что для каждого фактора Вейнбаума f слова w и $g \in R(f)$ существует такой индекс i, что $R^i(g) = R^{i+2}(g)$. (Здесь и далее R^i обозначает i-ю итерацию отношения R, поэтому $R^i(g)$ — множество.) Согласно лемме 3 либо $R^i(g) = R^{i+2}(g)$, либо $R^{i+2}(g)$ содержит слово с длиной не меньше удвоенной длины некоторого слова из $R^i(g)$. Следовательно, мы получим ситуацию, когда $R^i(g) = R^{i+2}(g)$ за $i \leq 2\log_2(n)$. Однако возможно уточнить это число, что потребует некоторых усилий. Найдем верхнюю границу для числа итераций в терминах чисел Фибоначчи и, как увидим в следующем разделе, она будет и нижней границей.

Напомним, что последовательность чисел Фибоначчи $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ задается следующими условиями:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{и} \quad F_{i+1} = F_i + F_{i-1}.$$

Хорошо известно, что последовательность Фибоначчи растет по экспоненте, а именно для всех $k \geq 0$

$$F_k = \left[\frac{\Phi^k}{\sqrt{5}}\right],$$

где $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ — коэффициент золотого сечения и $[x]$ обозначает целую часть от x. (См. любую книгу, в которой написано что-либо нетривиальное о числах Фибоначчи, например, [3].) Таким образом, если $F_k \leq n$, то $k \leq \lceil \log_\Phi(n) \rceil \leq \left\lceil \frac{3}{2}\log_2(n) \right\rceil$.

Следующая теорема дает наш главный результат для W-разложений.

Теорема 3. *Пусть w — примитивное слово, слово f — фактор Вейнбаума и $g \in R(f)$. Пусть также $2\ell \geq \log_\Phi(n)$. Тогда $R^{2\ell-1}(g) \neq \emptyset$, для всех слов $u \in R^{2\ell-1}(g)$ множество $R(u)$ одноэлементно и для $R(u) = \{v\}$ мы получаем $R(v) = \{u\}$ и* W*-разложение слова $w = uv$ для f и g.*

Доказательство. По лемме 1 слово g есть маркер, по лемме 3 мы имеем $R^i(g) \neq \emptyset$ для всех $i \geq 0$.

Рассмотрим последовательность $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_k)$, где $k \geq 2$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $f_0 = \varepsilon$, $f_1 = f$, $f_2 = g$;
2) $f_{i+1} \in R(f_i)$ при $1 \leq i < k$;
3) $f_{i+2} \neq f_i$ при $0 \leq i < k-1$.

Заметим, что такие последовательности существуют, так как $(f_0, f_1, f_2) = (\varepsilon, f, g)$ является соответствующим примером.

Потребуем, чтобы $|f_i| \geq F_i$ для всех i от 0 до k. Это возможно для $i = 0$, 1 и $i = 2$. Пусть $k \geq 3$, рассмотрим сначала $i = 3$. Имеем $f_3 \neq f_1 = f \neq \varepsilon$, но f — префикс слова f_3, являющийся собственным, и получаем $|f_3| \geq 2 = F_3$. Пусть теперь $3 \leq i+1 < k$ и $|f_j| \geq F_j$ для всех $0 \leq j \leq i+1$. Мы должны показать, что $|f_{i+2}| \geq F_{i+2}$.

Каждое циклическое вхождение f_{i+1} следует за $f_{i-1}f_i$ и предшествует $f_i f_{i-1}$. Так как $f_{i+2} \in R(f_{i+1})$, имеем

$$f_i \leq_{\mathrm{p}} f_{i+2} \leq_{\mathrm{p}} f_i f_{i-1} A^* \quad \text{и} \quad f_i \leq_{\mathrm{s}} f_{i+2} \leq_{\mathrm{s}} A^* f_{i-1} f_i.$$

Так как $i \geq 2$, слово f_i не пересекается в w ни со словом f_i (так как оно является маркером), ни с f_{i-1} (так как $f_i \in R(f_{i-1})$). Поскольку $f_{i+2} \neq f_i$, получим

$$f_{i+2} \in f_i(f_{i-1}A^* \cap A^* f_{i-1}) f_i.$$

Это значит, что

$$|f_{i+2}| \geq 2|f_i| + |f_{i-1}| \geq 2F_i + F_{i-1} = F_{i+2}.$$

Отсюда следует, что $F_k \leq n$, и, следовательно, $k \leq \lceil \log_\Phi(n) \rceil \leq \left\lceil \frac{3}{2}\log_2(n) \right\rceil$. Таким образом, можно предполагать, что в последовательности $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_k)$ значение k максимально, т.е. $R(f_{k+1}) \subseteq \{f_{k-1}\}$. Поэтому фактически $R(f_{k+1}) = \{f_{k-1}\}$. Это означает, что f_{k-1} — маркер и каждое циклическое вхождение маркера f_{k-1} предшествует вхождению маркера f_k, а каждое циклическое вхождение маркера f_k предшествует маркеру f_{k-1}. Таким образом, $w' \in (f_{k-1}f_k)^+$ для некоторого сопряженного с w слова w'. Но w примитивно, следовательно, $w' = f_{k-1}f_k$. Так как f_{k-1} и f_k — маркеры, то они обладают единственным вхождением. В частности, получаем также $R(f_{k-1}) = \{f_k\}$.

Пусть теперь $2\ell \geq \log_\Phi(n)$, тогда каждое слово $u \in R^{2\ell-1}(g)$ совпадает с некоторым f_{k-1} или f_k в построенной выше последовательности. Следовательно, множество $R(u)$ одноэлементно и для $R(u) = \{v\}$ получаем $R(v) = \{u\}$ и W-разложение слова $w = uv$ для f и g. $\square$

7. Пример, связанный со словами Фибоначчи

Расмотрим пример, дающий последовательность слов с большим числом итераций для нахождения W-разложения, который связан со словами Фибоначчи.

Рассмотрим следующую последовательность $\{f_i\}_{i\geq 0}$ слов над алфавитом $\{a, b\}$:

$$f_0 = \varepsilon, \quad f_1 = a, \quad f_2 = b \quad \text{и} \quad f_{i+1} = f_{i-1}f_{i-2}f_{i-1} \quad (i \geq 2).$$

Например, $f_3 = aa$, $f_4 = bab$, $f_5 = aabaa$ и т. д. Пусть

$$w_n = f_n f_{n-1}.$$

Например, $w_1 = a$, $w_2 = ba$, $w_3 = aab$, $w_4 = babaa$ и т. д. Покажем, что потребуется $\log_\Phi(|w_n|)$ итераций для построения W-разложения слов w_n для a. Очевидно,

$$|f_n| = F_n \quad \text{и} \quad |w_n| = |f_n f_{n-1}| = F_{n+1}.$$

Замечание 4. Все слова f_i являются палиндромами. Это означает, что они одинаково читаются как слева направо, так и справа налево. Это очевидно следует из определения.

Также существует очень тесная связь между последовательностью $\{f_i\}_{i\geq 1}$ и последовательностью слов Фибоначчи $\{h_i\}_{i\geq 1}$, определенной по правилу

$$h_1 = b, \quad h_2 = a \quad \text{и} \quad h_{i+1} = h_i h_{i-1} \quad (i \geq 2).$$

Мы имеем $f_{2i} = bh_{2i}^\bullet$ и $f_{2i-1} = ah_{2i-1}^\bullet$ для всех $i \geq 1$, где $x^\bullet$ обозначает слово x без последней буквы.

Слова f_i известны как сингулярные факторы бесконечной последовательности Фибоначчи [4]. (Заметим, что h_i является префиксом h_{i+1} для $i \geq 1$, следовательно, можем определить бесконечную последовательность Фибоначчи как предел последовательности $\{h_i\}_{i\geq 1}$.) Бесконечная последовательность Фибоначчи является словом Штурма, так как имеет ровно $n+1$ различных факторов длины n. Кроме этих $n+1$ различных факторов длины n, имеется n сопряженных со словом Фибоначчи h_n слов, а одно пропущенное называется сингулярным фактором длины n. Оказывается, что этим фактором является рассмотренное нами слово f_n.

Выскажем еще несколько замечаний о последовательности $\{f_i\}_{i\geq 0}$.

Лемма 4. *Для всех $0 \leq i \leq n$, где $n \geq 2$, имеет место*

1) $f_{n-2}f_{n-3}\cdots f_0 \leq_{\mathrm{p}} f_n$,
2) $f_i \leq_{\mathrm{p}} f_n \iff i \equiv n \pmod 2$,
3) $|f_n| = |f_{n-2}f_{n-1}|$ *и* $f_n \neq f_{n-2}f_{n-1}$.

Доказательство во всех случаях проводится индукцией по n. Очевидно, $\varepsilon \leq_{\mathrm{p}} b$, $a \leq_{\mathrm{p}} aa$ и $b \neq a$. Пусть $n > 2$. Предположим, что утверждение верно для всех $k < n$.

(1) По предположению индукции $f_{n-4}f_{n-5}\cdots f_0 \leq_{\mathrm{p}} f_{n-2}$, следовательно,

$$f_{n-2}f_{n-3}f_{n-4}\cdots f_0 \leq_{\mathrm{p}} f_{n-2}f_{n-3}f_{n-2} = f_n.$$

(2) ($\Rightarrow$) Из определения $\{f_i\}_{i\geq 0}$ немедленно следует $a \leq_{\mathrm{p}} f_i$, если i нечетно, и $b \leq_{\mathrm{p}} f_i$ в противном случае.

($\Leftarrow$) Очевидно, $f_i \leq_{\mathrm{p}} f_n$, если $i = n$. Пусть $i < n$, тогда $i \leq n-2$ и

$$f_i \leq_{\mathrm{p}} f_{n-2}f_{n-3}f_{n-2} = f_n$$

по предположению индукции.

(3) Тот факт, что $|f_n| = |f_{n-2}f_{n-1}|$, можно легко вывести из определений $\{f_i\}_{i\geq 0}$ и $\{F_i\}_{i\geq 0}$. По предположению индукции $f_{n-2} \neq f_{n-4}f_{n-3}$, следовательно,

$$f_n = f_{n-2}f_{n-3}f_{n-2} \neq f_{n-2}f_{n-3}f_{n-4}f_{n-3} = f_{n-2}f_{n-1}. \qquad \square$$

Следующая лемма утверждает, что каждый фактор f_i в w_n, где $i+1<n$, является маркером.

Лемма 5. *Фактор f_i не пересекается сам с собой в f_n для всех i, $0 \leq i \leq n$.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Случаи, когда $n \leq 8$, могут быть легко проверены.

Если $n \geq i+4$, то мы получаем, что f_i не имеет самопересечений в $f_{n-2} = f_{n-4}f_{n-5}f_{n-4}$ по предположению индукции. Из

$$f_n = \underbrace{f_{n-4}f_{n-5}f_{n-4}}_{f_{n-2}}f_{n-3}\underbrace{f_{n-4}f_{n-5}f_{n-4}}_{f_{n-2}}, \quad g = \overbrace{f_{n-4}f_{n-3}f_{n-4}}$$

следует, что возможные пересечения f_i с самим собой могут появляться только в

$$g = f_{n-4}f_{n-3}f_{n-4} = f_{n-4}\underbrace{f_{n-5}f_{n-6}f_{n-5}}_{f_{n-3}}f_{n-4}.$$

По предположению индукции f_i не имеет самопересечений в f_{n-3}, что означает, что нам остается рассмотреть только префикс и суффикс g длины не более $2|f_i|$. Рассмотрим слово

$$h = f_{n-4}f_{n-5}f_{n-6}f_{n-7}f_{n-8} \leq_{\mathrm{p}} f_{n-4}f_{n-5}f_{n-6}f_{n-5} \leq_{\mathrm{p}} g.$$

Согласно п. 1) леммы 4 имеем

$$h = f_{n-4}f_{n-5}f_{n-6}f_{n-7}f_{n-8} \leq_{\mathrm{p}} f_{n-4}f_{n-5}f_{n-4} = f_{n-2}\,.$$

Таким образом, f_i не имеет самопересечений в $h \leq_{\mathrm{p}} g$. Из симметрии получаем, что f_i не имеет самопересечений в

$$f_{n-8}f_{n-7}f_{n-6}f_{n-5}f_{n-4} \leq_{\mathrm{s}} g.$$

Имеем $|h| \geq 2|f_{n-4}| \geq 2|f_i|$, поскольку

$$|f_{n-4}| = 2|f_{n-6}| + |f_{n-7}| < |f_{n-5}f_{n-6}f_{n-7}|,$$

так как $|f_{n-6}| < |f_{n-5}|$. Таким образом, для $n \geq i+4$ лемма доказана.

Если $n = i+3$, то f_{n-3} не имеет самопересечений в f_{n-2} по предположению индукции. Следовательно, если фактор f_{n-3} имеет самопересечение в f_n, то он пересекается с центральным вхождением f_{n-3} в $f_n = f_{n-2}f_{n-3}f_{n-2}$. Так как по предположению индукции f_{n-5} не имеет самопересечений в f_{n-4}, имеем, что f_{n-3} может пересекаться только сам с собой. Поэтому f_{n-5} выравнено в $f_n = f_{n-2}f_{n-5}f_{n-6}f_{n-5}f_{n-2}$, т. е. либо $f_{n-3} \leq_{\mathrm{p}} f_{n-5}f_{n-4} \leq_{\mathrm{p}} f_{n-5}f_{n-2}$, либо (из симметрии) $f_{n-3} \leq_{\mathrm{s}} f_{n-4}f_{n-5} \leq_{\mathrm{s}} f_{n-2}f_{n-5}$, что противоречит утверждению 3) леммы 4.

Если $n = i+2$, то $f_{n-2} = f_{n-4}f_{n-5}f_{n-4}$ входит в

$$f_n = f_{n-2}f_{n-3}f_{n-2} = f_{n-4}f_{n-5}f_{n-4}f_{n-3}f_{n-4}f_{n-5}f_{n-4}$$

только при условии, когда f_{n-4} выравнено, в противном случае f_{n-4} имеет самопересечение в f_n, что противоречит уже доказанной части леммы. Следовательно, если f_{n-2} имеет самопересечение в f_n, то мы имеем либо $f_{n-2} \leq_{\mathrm{p}} f_{n-4}f_{n-3}$, либо (из симметрии) $f_{n-2} \leq_{\mathrm{s}} f_{n-3}f_{n-4}$, что противоречит утверждению 3) леммы 4.

Если $n = i+1$, то аналогично предыдущему случаю $f_{n-1} = f_{n-3}f_{n-4}f_{n-3}$ входит в $f_n = f_{n-2}f_{n-3}f_{n-2}$ только при условии, когда f_{n-3} выравнено, в противном случае f_{n-3}

имеет самопересечение в f_n, что противоречит предыдущему случаю. Следовательно, если f_{n-1} имеет самопересечение в f_n, то мы имеем либо $f_{n-1} \leq_{\mathrm{p}} f_{n-3}f_{n-2}$, либо (опять из симметрии) $f_{n-1} \leq_{\mathrm{s}} f_{n-2}f_{n-3}$, что противоречит утверждению 3) леммы 4. □

Следующие две леммы утверждают, что $G(f_i) = \{f_{i-1}, f_{i+1}\}$ для любого $i < n-1$.

Лемма 6. *Фактор f_i не входит в f_{i+1}.*

Доказательство. Согласно лемме 5 имеем, что $f_i = f_{i-2}f_{i-3}f_{i-2}$ может появляться только в $f_{i+1} = f_{i-1}f_{i-2}f_{i-1}$ так, что f_{i-2} не имеет самопересечений в f_{i+1}. Следовательно, либо $f_{i-3}f_{i-2} \leq_{\mathrm{p}} f_{i-1}$, либо $f_{i-2}f_{i-3} \leq_{\mathrm{s}} f_{i-1}$. Оба эти случая противоречат утверждению 3) леммы 4. □

Лемма 7. *Если f_igf_i входит в f_n так, что f_i не является фактором g, то $g \in \{\varepsilon, f_{i-1}, f_{i+1}\}$.*

Доказательство проведем индукцией по n. Снова случаи, когда $n \leq 8$, легко проверяются. По предположению индукции получаем, что утверждение леммы выполняется для всех вхождений f_igf_i в f_{n-2} и f_{n-3}. Следовательно, необходимо нужно рассмотреть случаи, когда f_igf_i пересекается и с f_{n-2}, и с f_{n-3} в $f_n = f_{n-2}f_{n-3}f_{n-2}$. Предположим, что $i \equiv n \pmod 2$. Из утверждения 2) леммы 4 следует $f_i \leq_{\mathrm{p}} f_{n-2}$ и $f_i \not\leq_{\mathrm{p}} f_{n-3}$. И опять из симметрии $f_i \leq_{\mathrm{s}} f_{n-2}$ и $f_i \not\leq_{\mathrm{s}} f_{n-3}$. Рассмотрим второй случай. Из леммы 5 следует $gf_i \leq_{\mathrm{p}} f_{n-3}f_i$. Очевидно, что если $i+4=n$, то $g = f_{n-3} = f_{i+1}$. Пусть $i+4<n$, тогда по утверждению 1) леммы 4 получаем $f_{i+1}f_i \leq_{\mathrm{p}} f_{n-3}$. Утверждение верно, так как f_i не является фактором f_{i+1}, как было показано в лемме 5. □

Рассмотрим w_n для некоторого фиксированного n. Утверждение 1 немедленно следует из леммы 7.

Утверждение 1. $R(f_i) = \{f_{i+1}\}$ *для всех* $1 \leq i < n$ *и* $R(f_n) = \{f_{n-1}\}$.

Мы имеем $w_n = R^{n-1}(a)R^{n-2}(a)$. Из $|w_n| = F_n = \left[\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}\right]$ следует необходимость $\lceil \log_\Phi |w_n| \rceil$ шагов, чтобы получить W-разложение w_n для a.

8. Разложение Вейнбаума для случайных слов

В дальнейшем рассмотрим алфавиты, содержащие не менее двух букв. По определению W-разложение для заданных слов f и g существует только тогда, когда $(fA^* \cap A^*f) \setminus (gA^* \cup A^*g) \neq \emptyset$ и $(gA^* \cap A^*g) \setminus (fA^* \cup A^*f) \neq \emptyset$. В дальнейшем для краткости будем называть пару (f,g), удовлетворяющую этим условиям, *кандидатами Вейнбаума.* Для всех кандидатов Вейнбаума существуют W-разложения. На самом деле это отнюдь не редкая ситуация, такие разложения существуют во всех достаточно длинных случайных словах. Доказательство этого общего свойства суть следующего утверждения.

Утверждение 2. *Пусть $k, m \geq 1$ — числа, а $\mathsf{P}_{k,m}(n)$ — вероятность того, что слово w длины n (в предположении, что такие слова распределены равномерно) примитивно и w имеет по крайней мере k различных* W*-разложений для всех кандидатов Вейнбаума (f,g) таких, что $|fg| \leq m$. Тогда*

$$1 - \mathsf{P}_{k,m}(n) \in 2^{-\Omega(n)}.$$

Доказательство опирается на стандартные рассуждения, подобные тем, которые часто используются в теории сложности по Колмогорову. Поэтому дадим только краткое описание доказательства. Более подробно ознакомиться с теорией сложности по Колмогорову можно по книге [5].

Для того, чтобы доказать утверждение, достаточно рассматривать случайно выбранные слова. Точнее, показать, что почти все слова w, которые либо не являются примитивными, либо имеют менее, чем k различных W-разложений для некоторых кандидатов Вейнбаума

(f, g) таких, что $|fg| \leq m$, могут быть сжаты с некоторым фиксированным линейным коэффициентом. Коэффициент сжатия зависит только от m, k и алфавита A. Таким образом, он не зависит от n, и утверждение будет доказано.

Здесь *сжатие* — это просто инъективная функция $\gamma : A^* \to A^*$. Подмножество $X \subseteq A^*$ можно сжать (используя γ) с коэффициентом сжатия $\varepsilon > 0$, если $|\gamma(w)| < (1 - \varepsilon)|w|$ почти для всех слов w из X. Очевидно, для каждого сжатия γ и $\varepsilon > 0$ вероятность того, что слово w длины n принадлежит X, лежит в классе функций $2^{-\Omega(n)}$. Пусть w — слово длины n, где $n > n(k, m, A)$ — достаточно большое число, и w не сжимается (некоторым фиксированным сжатием γ) с коэффициентом ε, где ε мало, т.е. $0 < \varepsilon < \varepsilon(k, m, A)$. (Описание сжатия γ и возможные значения для $n(k, m, A)$ и $\varepsilon(k, m, A)$ можно вывести из последующих рассмотрений, мы пропустим детали.) Тогда w примитивно, в противном случае w хорошо сжимается. Запишем w в виде $w_1 \cdots w_{k+4}$, где каждый фактор w_i имеет длину не более $\frac{n}{k+4} - 1$. Мы можем предполагать, что это значение все еще достаточно велико, так как k — константа. Вхождение каждого циклического фактора w_i должно быть единственным в w, так как иначе кодирование (такое как, скажем, кодирование Лемпеля–Зива) будет сжатием с линейным коэффициентом. Заметим, из этого следует, что вхождение циклического фактора u в w единственно, как только любой из факторов w_i является фактором u. Потребуем, чтобы все слова v с $|v| = m$, были факторами во всех факторах w_i. Действительно, предположим от противного, что некоторое слово v не встречается в некотором w_i. Тогда в некотором кодовом блоке длины m не все буквы необходимы, чтобы закодировать w_i. Этот факт можно использовать, чтобы сжать w_i и, следовательно, w (так как k — константа) с линейным коэффициентом.

Теперь легко найти по крайней мере k различных W-разложений для всех кандидатов Вейнбаума (f, g), где $|fg| \leq m$. Для каждого кандидата (f, g) выберем фактор fg в w_1, и для каждого $i = 3, \ldots, k + 3$ выберем фактор gf в w_i. Это возможно, так как все слова длины m являются факторами каждого из w_i. Мы получили k различных сопряженных с w слов $u_i v_i$, где $v_i \in gA^* w_2 A^* g$ и $u_i \in fA^* w_{k+4} A^* f$ таких, что вхождение каждого из u_i и v_i единственно. Более того, из

$$(fA^* \cap A^* f) \setminus (gA^* \cup A^* g) \neq \emptyset \quad \text{и} \quad (gA^* \cap A^* g) \setminus (fA^* \cup A^* f) \neq \emptyset$$

(по определению кандидата Вейнбаума) вытекает, что f (соответственно g) не является ни префиксом, ни суффиксом g (соответственно f). Следовательно, $u_i \notin gA^* \cup A^* g$ и $v_i \notin fA^* \cup A^* f$. □

9. Не для всех факторов существует разложение Вейнбаума

Результат Вейнбаума, теорема 1, утверждает, что каждое примитивное слово w имеет W-разложение для всех букв a, встречающихся в w. Более того, мы увидели, что то же самое выполняется для всех факторов вида a^m, где $m \geq 1$. Сейчас покажем, что это самое большее, что можем утверждать. Для этого исследуем несколько классов, для которых фактор f примитивного слова w имеет или не имеет W-разложения.

Утверждение 3. *Пусть $f \in A^+$, $a \in A$. Пусть также m — максимальная экспонента такая, что a^m входит в f. Слово $w = fa^n$ имеет W-разложение для f тогда и только тогда, когда одновременно $f \notin aA^* \cup A^* a$ и $n > m$.*

Доказательство. Очевидно, если $f \notin aA^* \cup A^* a$ и $n > m$, то $w = (f) \cdot (a^n)$ есть W-разложение для f. Обратно, так как w должно быть примитивным словом и f должен быть собственным фактором w, то должна существовать буква $b \neq a$, входящая в f. Но тогда существует только одно циклическое вхождение f в w и $w = (f) \cdot (a^n)$ должно быть W-разложением для f. Так как a^n обладает единственным вхождением, то $f \notin aA^* \cup A^* a$ и $n > m$. □

Хорошо известно [6], что следующее утверждение вытекает из теоремы Файна и Уилфа.

Утверждение 4. *Для любого слова $f \in A^*$ существует не более одной буквы $a \in A$ такой, что слово fa не примитивно.*

Следствие. Пусть $f \in A^*$ — слово, в которое входят попарно различные буквы $a_1, \ldots, a_k$ для $k \geq 2$. Тогда по крайней мере $k-1$ из слов fa_i примитивно, но ни одно из них не имеет W-разложения для f.

10. Заключение

Сначала идея этой статьи состояла в том, чтобы найти более легкое доказательство результата Вейнбаума, теоремы 1. Но, начав исследовать этот результат, мы обнаружили некоторые интересные вещи из комбинаторики слов, которые, по-видимому, до сих пор не были исследованы. Однако мы не знаем, где можно применить результаты наших исследований, выходящие за рамки оригинального утверждения Вейнбаума.

Мы не обсуждали алгоритмические вопросы. Какова сложность вычисления W-разложения w для f, если оно существует? Причина этого проста: у нас нет никакого нетривиального результата в этой области. Для дальнейших исследований кажется возможным, что подходящее использование *стрингологии* может привести к нахождению быстрых алгоритмов.

Мы благодарны Жану Берстелю и Жюльену Кассеню за указание на то, что слова f_i в разделе 7 являются сингулярными факторами бесконечной последовательности Фибоначчи.

Литература

[1] Weinbaum C.M. *Unique subwords in nonperiodic words* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – V. 109. – № 3. – P. 615–619.

[2] Harrison M.A. *Introduction to formal language theory.* – Boston: Addison-Wesley Publishing Co., 1978. – 594 p.

[3] Lotharie M. *Combinations on Words.* Encyclopedia of Mathematics. V. 17. – Boston: Addison-Wesley Publishing Co., 1983. – 238 p.

[4] Wen Zh.X., Wen Zh.Y. *Some properties of the singular words of the Fibonacci word* // Europ. J. Combin. – 1994. – V. 15. – № 6. – P. 587–598.

[5] Li M., Vitányi P. *An introducion to Kolmogorov complexity and its applications.* – New York: Springer-Verlag, 1993. – 637 p.

[6] Harju T., Halava V., Ilie L. *Periods and binary words* // J. Combin. Theory. Ser. A. – 2000. – V. 89. – P. 298–303.

Ф. Дикерт

профессор, кафедра формальных методов в компьютерных науках,
Университет Штуттгарта,
Германия, 70569, Штуттгарт, ул. Университетская, д. 38,

`e-mail:` diekert@fmi.uni-stuttgart.de

Т. Харью

профессор, факультет математики,
Университет Турку,
Финляндия, 20014, Турку,

`e-mail:` harju@utu.fi

Д. Новотка

научный сотрудник, кафедра формальных методов в компьютерных науках,
Университет Штуттгарта,
Германия, 70569, Штуттгарт, ул. Университетская, д. 38,

`e-mail:` dirk.nowotka@informatik.uni-stuttgart.de

V. Diekert

Professor, Institute of Formal Methods in Computer Science,
University of Stuttgart,
Universitätsstr. 38, Stuttgart, 70569 Germany,

`e-mail:` diekert@fmi.uni-stuttgart.de

T. Harju

Professor, Department of Mathematics,
University of Turku
Turku, 20014, Finland,

`e-mail:` harju@utu.fi

D. Nowotka

Research Assistant, Institute of Formal Methods in Computer Science,
University of Stuttgart,
Universitätsstr. 38, Stuttgart, 70569 Germany,

`e-mail:` dirk.nowotka@informatik.uni-stuttgart.de