

**Studiengang:** Informatik

**Prüfer:** Prof. Volker Diekert

**Betreuer:** Dr. Markus Lohrey

**begonnen am:** 1. April 2001

**beendet am:** 25. Juli 2001

**CR-Klassifikation:** F.2.2, F.4.1, F.4.2, F.4.3, G.2.1, G.2.2

Diplomarbeit Nr. 1922

# Wortgleichungen in hyperbolischen Gruppen

Manfred Kufleitner

Institut für Informatik  
Universität Stuttgart  
Breitwiesenstraße 20–22  
D–70565 Stuttgart





# Vorwort

Meine Diplomarbeit beschreibt kanonische Repräsentationen von Elementen einer torsionsfreien hyperbolischen Gruppe, welche dann dazu verwendet werden um Gleichungssysteme in dieser Gruppe auf Gleichungssysteme in einer freien Gruppe zu reduzieren. Als Ergebnis erhält man ein Verfahren in PSPACE, mit dem man entscheiden kann, ob ein Gleichungssystem in einer torsionsfreien hyperbolischen Gruppe eine Lösung besitzt.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Volker Diekert bedanken, der mir dieses Thema für meine Diplomarbeit vorgeschlagen hat. Dank schulde ich auch meinem Betreuer Markus Lohrey, der mich bei der Durchführung unterstützt hat und mich auf den einen oder anderen kleinen Fehler aufmerksam gemacht hat.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1 Endliche Darstellungen . . . . .	3
2.2 Der Cayley-Graph . . . . .	3
2.3 Geodätische und Pfade . . . . .	4
2.4 Hyperbolische Gruppen . . . . .	5
2.5 Gleichungssysteme . . . . .	6
<b>3 Das Wortproblem</b>	<b>9</b>
3.1 Automatische Gruppen . . . . .	9
3.2 Hyperbolische Gruppen sind automatisch . . . . .	10
3.3 Das Wortproblem ist entscheidbar . . . . .	12
<b>4 Verallgemeinerungen von Geodätischen</b>	<b>15</b>
4.1 Ketten . . . . .	15
4.2 Lokalquasigeodätische . . . . .	16
<b>5 Die Kanonische Repräsentation</b>	<b>23</b>

5.1	Fastlokalgeodätische . . . . .	23
5.2	Der Zylinder . . . . .	26
5.3	Die Differenz . . . . .	27
5.4	Die Scheiben eines Zylinders . . . . .	28
5.5	Konstruktion der Kanonischen Repräsentation . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Wortgleichungen</b>	<b>37</b>
6.1	Die mut-Zerlegung . . . . .	37
6.2	Anwendung der kanonischen Repräsentation . . . . .	38
6.3	Lösen von Gleichungssystemen . . . . .	43
6.4	Komplexität . . . . .	45
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>47</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Cayley-Graph von $F(a, b)$ . . . . .	4
3.1	Skizze zum Beweis von Lemma 3.2.1 . . . . .	10
4.1	Skizze zum Beweis von Lemma 4.1.1 . . . . .	16
4.2	Skizze zum Beweis von Lemma 4.2.2 . . . . .	18
4.3	Erste Skizze zum Beweis von Lemma 4.2.3 . . . . .	19
4.4	Zweite Skizze zum Beweis von Lemma 4.2.3 . . . . .	19
5.1	Fastlokalgeodätische . . . . .	24
5.2	Skizze zum Beweis von Lemma 5.1.2 . . . . .	24
5.3	Skizze zum Beweis von Lemma 5.1.3 . . . . .	25
5.4	Skizze zum Beweis von Lemma 5.2.2 . . . . .	27
5.5	Skizze zum Beweis von Lemma 5.4.2 . . . . .	29
5.6	Skizze zum Beweis von Lemma 5.4.3 . . . . .	30
5.7	Skizze zum Beweis von Satz 5.4.6 . . . . .	31
5.8	Kanonische Repräsentation von $w$ . . . . .	33
5.9	Die Wirkung von $\theta_\kappa$ . . . . .	34
6.1	mut-Zerlegung . . . . .	38
6.2	Aufteilung von $\tau_1$ . . . . .	40



6.3	Verbiegen von $\beta_{n_1}$ falls $\ddot{u}_1 \geq \kappa_{n_1}$ . . . . .	41
6.4	Verbiegen von $\beta_{n_1}$ falls $\ddot{u}_2 \geq \ddot{u}_1$ . . . . .	41
6.5	Verbiegen von $\beta_{n_2}$ falls $\ddot{u}_2 \leq \ddot{u}_1 - (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta)$ . . . . .	42

# Kapitel 1

## Einleitung

Rips und Sela haben in [RS95] den Begriff der kanonischen Repräsentation entwickelt. Mithilfe dieser kanonischen Repräsentationen lässt ein Gleichungssystem über einer torsionsfreien hyperbolischen Gruppe auf ein System in einer freien Gruppe reduzieren. Makanin [Mak83] zeigte, dass sich für Gleichungssysteme in freien Gruppen entscheiden lässt, ob sie lösbar sind. Zusammen ergibt sich ein Verfahren mit dem man entscheiden kann, ob ein Gleichungssystem in einer torsionsfreien hyperbolischen Gruppe eine Lösung besitzt.

Diese Diplomarbeit stellt im Wesentlichen eine Ausarbeitung von [RS95] dar. Rips und Sela greifen in ihrer Arbeit darauf zurück, dass sich das Wortproblem in hyperbolischen Gruppen entscheiden lässt. Ich zeige deshalb ähnlich wie in [Cai92, CDP90], dass hyperbolische Gruppen automatisch sind und dass so das Wortproblem lösbar ist. Cai hat in [Cai92] gezeigt, dass sich das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren noch deutlich verbessern lässt. In [CDP90] wird gezeigt, dass Lokalquasigeodätische unter bestimmten Voraussetzungen immer in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von jeder Geodätischen zwischen den Endpunkten verlaufen. Dies führe ich hier auch näher aus. Lokalquasigeodätische spielen eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von kanonischen Repräsentationen.

Eines der wichtigsten Resultate dieser Diplomarbeit ist, dass das Problem für ein Gleichungssystem in einer torsionsfreien hyperbolischen Gruppen zu entscheiden, ob es lösbar ist, in PSPACE liegt.



# Kapitel 2

## Grundlagen

### 2.1 Endliche Darstellungen

**Definition 2.1.1** Eine endliche Darstellung einer Gruppe  $G$  ist ein Paar  $\langle \Gamma, R \rangle$ , wobei  $\Gamma = \{g_1, \dots, g_n, g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}\}$  die Menge der Erzeuger und  $R$  die Menge Relationen genannt werden. Die Menge  $R$  besteht aus Wörtern über dem Alphabet  $\Gamma$ . Die Gruppe  $G$  sei dann isomorph zu  $F(g_1, \dots, g_n)/N(R)$ , wobei  $F(g_1, \dots, g_n)$  die freie Gruppe mit Rang  $n$  ist, die von  $\{g_1, \dots, g_n\}$  erzeugt wird und  $N(R)$  ist die von  $R$  erzeugte normale Untergruppe in  $F(g_1, \dots, g_n)$ . Da  $\langle \Gamma, R \rangle$  somit stets eine endliche Darstellung von  $F(g_1, \dots, g_n)/N(R)$  ist, definiert man  $G(\Gamma, R) := F(g_1, \dots, g_n)/N(R)$ .

Es existieren kanonische Monoidhomomorphismen zwischen  $\Gamma^*$ ,  $F(g_1, \dots, g_n)$  und  $G(\Gamma, R)$  (gleiche Buchstaben werden aufeinander abgebildet). Außerdem existiert noch der kanonische Gruppenhomomorphismus

$$F(g_1, \dots, g_n) \rightarrow G(\Gamma, R) = F(g_1, \dots, g_n)/N(R).$$

### 2.2 Der Cayley-Graph

**Definition 2.2.1** Der Cayley-Graph  $X(\Gamma, R)$  einer Gruppe  $G = G(\Gamma, R)$  ist ein gerichteter Graph, dessen Knotenmenge die Elemente von  $G$  sind. Eine Kante  $(g, g')$  existiert genau dann, wenn es ein  $a \in \Gamma$  gibt mit  $ga = g'$ . Diese Kante wird dann mit  $a$  beschriftet. Zu jeder solchen Kante existiert auch eine von  $g'$  zu  $g$ , die mit  $a^{-1}$  beschriftet ist.

Abbildung 2.1 zeigt die ersten Elemente des Cayley-Graphen  $X(\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}, \emptyset)$  der freien Gruppe  $F(a, b)$ . Da die Menge der Relationen hier leer ist, ist der Cayley-Graph von  $F(a, b)$  ein (unendlicher) Baum. Wenn die Menge der Relationen nicht leer ist, bedeutet dies dass gewisse Knoten im Cayley-Graph zusammenfallen; die von den Erzeugern  $R$  erzeugte normale Untergruppe  $N(R)$  enthält alle Punkte, welche mit dem Ursprung des Cayley-Graph (der 1 in  $G$ ) zusammenfallen.

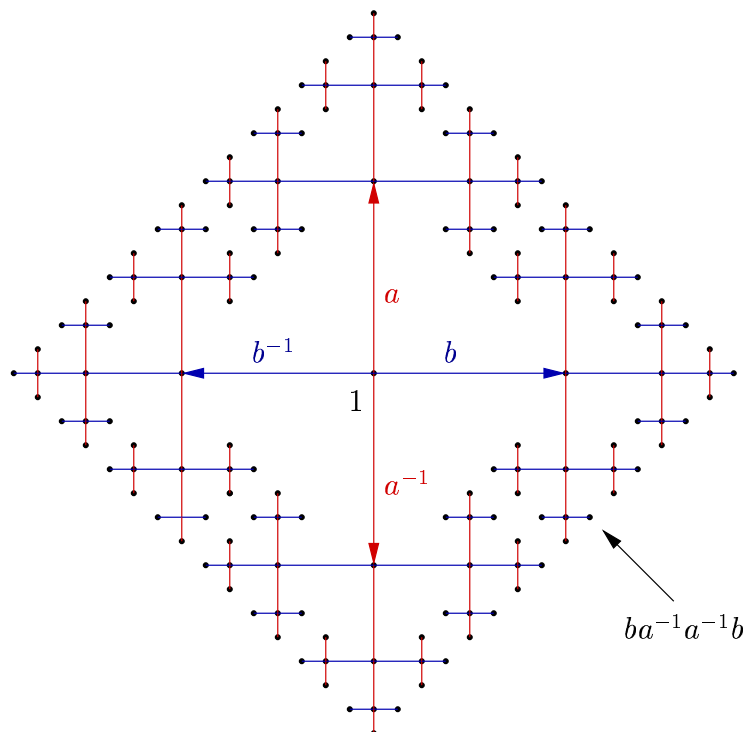


Abbildung 2.1: Cayley-Graph von  $F(a, b)$

## 2.3 Geodätische und Pfade

**Definition 2.3.1** Den Cayley-Graph  $X(\Gamma, R)$  kann man als metrischen Raum auffassen, wobei die Punktmenge die Elemente aus  $G$  sowie die Punkte auf den Kanten sind. Die Elemente aus  $G$  nennt man dabei weiterhin Knoten von  $X(\Gamma, R)$ . Die Kante  $(g, g')$ , die mit  $a$  beschriftet ist, und die Kante  $(g', g)$ , die mit  $a^{-1}$  beschriftet ist, werden dabei mit einander identifiziert. Die Länge einer Kante sei 1. Die Entfernung  $|y - x|$  zweier Punkte  $x, y \in X(\Gamma, R)$  sei die Länge einer kürzesten Verbindung zwischen ihnen. Eine solche Verbindung nennt man Geodätische und

schreibt dafür  $[x, y]$ . Der Betrag von  $x \in X(\Gamma, R)$  sei die Entfernung von der 1, also  $|x| = |x - 1|$ .

**Definition 2.3.2** Ein Pfad  $f : [a, b] \rightarrow X(\Gamma, R)$  sei im Folgenden ein stetiger Weg, für den gilt, dass

1.  $f(a)$  und  $f(b)$  sind Knoten in  $X(\Gamma, R)$ ,
2. für jede Kante  $e \subseteq X(\Gamma, R)$  und jede zusammenhängende Teilmenge  $I \subseteq f^{-1}(e)$  ist  $f|_I$  eine Isometrie,
3. für jeden Knoten  $v \in X(\Gamma, R)$  ist  $f^{-1}(v)$  endlich.

Die Länge von  $f$  ist die Länge des Intervalls  $[a, b]$ , d.h.  $\text{Länge}(f) = b - a$ .

Die zweite Bedingung soll bedeuten, dass jede Kante isometrisch zu  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  sein soll. Man kann das auch so interpretieren, dass Pfade den Cayley-Graph mit der Geschwindigkeit 1 durchlaufen.

Alle  $x \in \Gamma^*$  kann man nun unter fünf Gesichtspunkten betrachten: als Wort über dem Alphabet  $\Gamma$ , als Element der freien Gruppe  $F(g_1, \dots, g_n)$ , als Element von  $G$ , als Punkt im Cayley-Graph und auch als einen Pfad im Cayley-Graph (vom Ursprung zu  $x$ ). Je nach Sichtweise kann die Relation „ $=$ “ eine andere Bedeutung haben.

**Definition 2.3.3** Für  $A \subseteq X(\Gamma, R)$  sei  $K_r(A) := \{x \in X(\Gamma, R) \mid \exists a \in A : |a - x| \leq r\}$  die Menge aller Punkte, die von  $A$  höchstens den Abstand  $r$  haben. Analog definiert man  $K_{<r}(A) := \{x \in X(\Gamma, R) \mid \exists a \in A : |a - x| < r\}$  als die Menge aller Punkte, die von  $A$  einen geringeren Abstand als  $r$  haben. Mit  $K_r$  ist im folgenden stets die Kugel mit Radius  $r$  um den Ursprung gemeint, also  $K_r := K_r(1)$ .

**Definition 2.3.4** Den Abstand  $d$  von einem Punkt  $x \in X(\Gamma, R)$  zu einer Menge  $A \subseteq X(\Gamma, R)$  definiert man als  $d(x, A) := \inf_{a \in A} (|x - a|)$ . Wenn  $A$  kompakt ist, existiert ein  $a \in A$  mit  $|x - a| = d(x, A)$ .

## 2.4 Hyperbolische Gruppen

**Definition 2.4.1** Ein Dreieck in  $X(\Gamma, R)$  mit den Ecken  $x_1, x_2, x_3$  und den geodätischen Seiten  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ ,  $[x_3, x_1]$  nennt man  $\delta$ -dünn für eine ganze

Zahl  $\delta$ , wenn jede Seite in einer  $\delta$ -Umgebung der beiden anderen liegt, wenn also gilt:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &\subseteq K_\delta([x_2, x_3] \cup [x_3, x_1]) \\ [x_2, x_3] &\subseteq K_\delta([x_1, x_2] \cup [x_3, x_1]) \\ [x_3, x_1] &\subseteq K_\delta([x_1, x_2] \cup [x_2, x_3]) \end{aligned}$$

**Definition 2.4.2** Eine Gruppe  $G = G(\Gamma, R)$  heisst hyperbolisch, wenn eine ganze Zahl  $\delta \geq 0$  existiert, so dass jedes Dreieck aus  $X(\Gamma, R)$ , dessen Seiten geodätisch sind,  $\delta$ -dünn ist. Den Cayley-Graphen  $X(\Gamma, R)$  nennt man dann  $\delta$ -hyperbolisch. Der Parameter  $\delta$  kann von der Darstellung von  $G$  abhängen.

Klar ist, dass für  $\delta = 0$  die Gruppe  $G$  frei ist.

**Definition 2.4.3** Eine Gruppe  $G$  heisst torsionsfrei, wenn für alle  $g \in G \setminus \{1\}$  und für alle  $n \geq 1$  gilt, dass  $g^n \neq 1$ .

Im folgenden sei  $G = G(\Gamma, R)$  eine feste torsionsfreie, hyperbolische Gruppe mit der Erzeugermenge  $\Gamma$  und den Relationen  $R$ . Den Cayley-Graph von  $G$  bezeichnen wir mit  $X$ , wobei nach Definition 2.2.1 die Knoten in  $X$  gerade die Elemente aus  $G$  sind;  $X$  sei  $\delta$ -hyperbolisch für ein  $\delta > 0$ .

Die Torsionsfreiheit von  $G$  wird bei der Konstruktion der kanonischen Repräsentation gebraucht.

Eine guten Überblick über die kombinatorische Gruppentheorie gibt [LS77].

## 2.5 Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem  $\Phi$  in den Unbekannten  $\{x_1, \dots, x_k\}$  mit den Koeffizienten  $\{a_1, \dots, a_l\}$  ist eine (endliche) Menge von Gleichungen der Form

$$\phi_j(x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_l) = 1 \quad \text{für } 1 \leq j \leq q.$$

Dabei ist  $q$  die Anzahl der Gleichungen. Die  $\phi_j$  sind Wörter über  $\{x_1, \dots, x_k\} \cup \{x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1}\} \cup \{a_1, \dots, a_l\}$  und die  $a_i$  wiederum sind Elemente aus  $\Gamma^*$ .  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_{n+k}) \in (\Gamma^*)^{n+k}$  ist eine Lösung von  $\Phi$ , wenn

$$(w_{n+1}, \dots, w_{n+k}) = (a_1, \dots, a_l)$$

und für alle  $j$  zwischen 1 und  $q$  gilt

$$\phi_j(w_1, \dots, w_{n+k}) = 1$$

in  $G$ .  $\Phi$  ist ein *trianguliertes* Gleichungssystem, wenn alle Gleichungen die Form

$$w_1 w_2 w_3 = 1$$

haben, wobei  $w_1, w_2, w_3 \in \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1}\} \cup \{a_1, \dots, a_l\}$ . Jedes Gleichungssystem lässt sich durch Hinzunahme von neuen Unbekannten und mit mehr Gleichungen in ein trianguliertes Gleichungssystem umformen. Dies geschieht, indem man zuerst jede Gleichung mit zwei oder mehr als drei Termen durch Hinzunahme von weiteren Unbekannten in Gleichungen mit genau drei Termen umformt, z.B. lässt sich  $x_1 a_1 a_2 x_2 = 1$  umformen zu  $x_1 a_1 y = 1$ ,  $y^{-1} a_2 x_2 = 1$  und  $x_1 x_2 = 1$  ist äquivalent zu  $x_1 x_2 y_1 = 1$ ,  $y_1^{-1} y_2 y_2^{-1} = 1$ .





# Kapitel 3

## Das Wortproblem

Das *Wortproblem* wird folgendermaßen charakterisiert: gegeben sei ein Wort  $w \in \Gamma^*$ , die Aufgabe ist nun zu entscheiden, ob  $w = 1$  in  $G$ .

Bei dem in dieser Arbeit verfolgten Ansatz um Gleichungssysteme zu lösen, ist es notwendig, dass man das Wortproblem entscheiden kann.

Das Ziel dieses Kapitels ist es deshalb, zu zeigen, dass das Wortproblem für hyperbolische Gruppen entscheidbar ist. Dazu wird zuerst gezeigt, dass hyperbolische Gruppen automatisch sind (siehe Definition 3.1.1) und dann, dass sich das Wortproblem für hyperbolische Gruppen mit Hilfe der automatischen Struktur entscheiden lässt.

### 3.1 Automatische Gruppen

**Definition 3.1.1** *Eine Gruppe  $G$  ist automatisch wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *es existiert eine reguläre Sprache  $L_0 \subseteq \Gamma^*$ , derart dass die kanonische Abbildung von  $L_0$  auf  $G$  surjektiv ist. Das bedeutet, dass jedes Gruppenelement eine Darstellung in  $L_0$  besitzt.*
2. *Für alle  $g \in \Gamma$  existiert ein Automat  $M_g$  über  $(\Gamma \cup \{\$\})^2 \setminus \{(\$, \$)\}$  ( $\$$  ist zum auffüllen, damit die Eingabe auf beiden Bändern die selbe Länge hat), derart dass für  $a_1 \cdots a_n, b_1 \cdots b_m \in \Gamma^*$  (o.B.d.A. sei  $n \leq m$ ) die Eingabe*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \$ \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \$ \\ b_m \end{pmatrix}$$

genau dann akzeptiert wird, wenn  $a_1 \cdots a_n \in L_0$ ,  $b_1 \cdots b_m \in L_0$  und

$$a_1 \cdots a_n \cdot g = b_1 \cdots b_m \quad \text{in } G.$$

Dabei bezeichnet man  $(L_0, (M_g)_{g \in \Gamma})$  als die automatische Struktur von  $G$ .

## 3.2 Hyperbolische Gruppen sind automatisch

**Lemma 3.2.1** *Seien  $x_0, x_1, x_2 \in X$  mit  $|x_1 - x_2| \leq 1$ . Seien  $[x_0, x_1]$  und  $[x_0, x_2]$  Geodätische in  $X$  und seien  $y \in [x_0, x_1]$  und  $z \in [x_0, x_2]$  mit  $|x_0 - y| = |x_0 - z|$ . Dann gilt  $|y - z| \leq 2\delta + 2$ .*

*Beweis:* Da  $X$   $\delta$ -hyperbolisch ist, existiert ein Punkt  $z' \in [x_0, x_2] \cup [x_2, x_1]$  mit  $|y - z'| \leq \delta$ . Aus  $|x_1 - x_2| \leq 1$  folgt, dass ein  $z'' \in [x_0, x_2]$  mit  $|y - z''| \leq \delta + 1$  existiert. Weil  $x_0, z, z''$  auf einer Geodätischen liegen, gilt

$$\begin{aligned} |z'' - z| &= |x_0 - z| - |x_0 - z''| = |x_0 - y| - |x_0 - z''| \leq |z'' - y| \text{ oder} \\ |z'' - z| &= |x_0 - z''| - |x_0 - z| = |x_0 - z''| - |x_0 - y| \leq |y - z''|, \end{aligned}$$

je nachdem ob  $z''$  zwischen  $x_0$  und  $z$  liegt oder nicht. In jedem Fall aber gilt

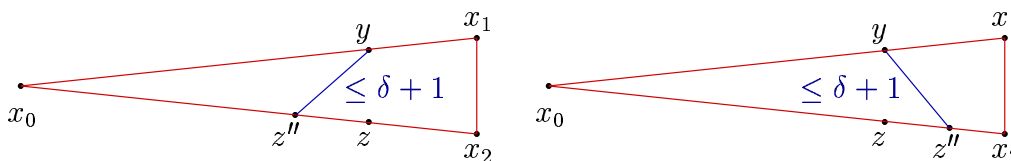


Abbildung 3.1: Skizze zum Beweis von Lemma 3.2.1

$|z'' - z| \leq |y - z''| \leq \delta + 1$ . Mit der Dreiecksungleichung folgt nun  $|y - z| \leq |y - z''| + |z'' - z| \leq 2\delta + 2$ .  $\square$

**Lemma 3.2.2** *Wenn man die Menge  $L_{geo}$  der Geodätischen zwischen 1 und Knoten in  $X$  (aufgrund der Kantenbeschriftung) als Wörter über  $\Gamma$  auffasst, dann ist  $L_{geo}$  eine reguläre Sprache.*

*Beweis:* Der Automat  $M$ , der  $L_{geo}$  erkennen soll, wird folgendermaßen konstruiert: Die Menge der Zustände sei  $A \subseteq K_{2\delta+2} \cap G \cup \{F\}$ . Ein Zustand ist damit eine

Teilmenge von Knoten in  $K_{2\delta+2}$  oder der Fehlerzustand  $F$ . Alle Zustände außer dem Fehlerzustand seien akzeptierend. Der Startzustand ist  $\{1\}$ . Sei  $S$  nicht der Fehlerzustand und sei  $x \in \Gamma$ . Für die Übergangsfunktion  $\tau$  gilt nun  $\tau(S, x) = F$  falls  $x \in S$ . Falls  $x \notin S$  sei

$$\tau(S, x) = \{x^{-1}ga \in G \mid g \in S, a \in \Gamma \cup \{\epsilon\}\} \cap K_{2\delta+2}.$$

Sei  $p = x_1 \dots x_n x \dots$  eine Geodätische. Angenommen  $p$  wird nicht akzeptiert und sei  $\tau(\{1\}, x_1 \dots x_n) = S$  und  $\tau(S, x) = F$  das erste Erreichen des Fehlerzustands, d.h.  $x \in S$ . Demnach müssen  $g_1, \dots, g_n \in \Gamma \cup \{\epsilon\}$  existieren mit  $x = x_k^{-1} \dots x_1^{-1} a_1 \dots a_n$ . Damit ergibt sich für  $x_1 \dots x_n x$  eine Verbindung kürzerer Länge, ein Widerspruch dazu, dass  $p$  eine Geodätische ist, denn jedes Teilstück einer Geodätischen muss auch wieder eine Geodätische sein. Also gilt  $L_{geo} \subseteq L(M)$ .

Nun sei  $p = x_1 \dots x_n x$  eines der kürzesten Wörter, das akzeptiert wird aber keine Geodätische ist. Wegen dieser Minimalität kann man schließen, dass  $x_1 \dots x_n$  eine Geodätische ist, da mit  $p$  auch  $x_1 \dots x_n$  akzeptiert wird. Da  $p$  keine Geodätische ist, existiert ein kürzeres Wort  $p'$  mit  $p = p'$  in  $G$ . Da  $x_1 \dots x_n$  eine Geodätische ist, kann die Länge von  $p'$  nur  $n$  oder  $n - 1$  sein.

Sei zunächst  $\text{Länge}(p') = n$ , also  $p' = a_1 \dots a_n \in \Gamma^*$ . Da  $|p' - x_1 \dots x_n| \leq 1$  lässt sich Lemma 3.2.1 anwenden und es gilt für alle  $i$  zwischen 1 und  $n$ , dass  $|a_1 \dots a_i - x_1 \dots x_i| \leq 2\delta + 2$ . Daraus folgt, dass  $x = x_k^{-1} \dots x_1^{-1} a_1 \dots a_n \in \tau(\{1\}, x_1 \dots x_n)$  und damit  $\tau(\{1\}, p) = F$ .

Falls  $\text{Länge}(p') = n - 1$  kann man  $p'$  schreiben als  $p' = a_1, \dots, a_{n-1} \in \Gamma^*$ . Nun kann man wieder mit Lemma 3.2.1 folgern, dass für alle  $i$  zwischen 1 und  $n - 1$  gilt, dass  $|a_1 \dots a_i - x_1 \dots x_i| \leq 2\delta + 2$  und dass  $x = x_k^{-1} \dots x_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} \epsilon \in \tau(\{1\}, x_1 \dots x_n)$ . Damit ergibt sich in beiden Fällen, dass  $p$  nicht akzeptiert wird. Also gilt  $L_{geo} \supseteq L(M)$  und mit obigem Teil folgt  $L_{geo} = L(M)$ .  $\square$

**Satz 3.2.3** *Für alle  $g \in \Gamma$  existiert ein Automat  $M_g$ , so dass  $(L_{geo}, (M_g)_{g \in \Gamma})$  eine automatische Struktur von  $G$  ist. Insbesondere ist damit jede hyperbolische Gruppe automatisch.*

*Beweis:* Sei  $\$ \notin \Gamma$ . Nach Lemma 3.2.2 ist  $L_{geo}$  regulär und deshalb ist auch die Sprache  $L' := L_{geo} \cdot \{\$\}^*$  (die Menge der Wörter aus  $L_{geo}$  gefolgt von beliebig aber endlich vielen  $\$$ ) regulär über  $\Gamma \cup \{\$\}$  ist. Also existiert ein Automat  $M'$  mit  $L' = L(M')$ . Sei  $S$  die Menge der Zustände,  $s_0$  der Startzustand,  $V \subseteq S$  die Menge der akzeptierenden Zustände und  $\tau'$  die Übergangsfunktion von  $M'$ .

Zu zeigen ist nun, dass für alle  $g \in \Gamma$  ein Automat  $M_g$  existiert, der die Multiplikation mit  $g$  über Wörtern aus  $L_{geo}$  bzw.  $L'$  erkennt (siehe Definition 3.1.1). Sei

$V = K_{2\delta+2} \cap G$  die Menge der Knoten in  $X$ , die von 1 höchstens den Abstand  $2\delta + 2$  haben und sei  $g \in \Gamma$ . Die Zustandsmenge von  $M_g$  sei  $(S \times S \times V) \cup \{F\}$ , wobei  $F$  ein Fehlerzustand ist. Der Startzustand sei  $(s_0, s_0, 1)$ , die akzeptierenden Zustände seien  $Y \times Y \times \{g\}$  und sei  $\Sigma = (\Gamma \cap \{\$\})^2 \setminus \{(\$, \$)\}$  das Alphabet. Sei  $\pi : \Gamma \cap \{\$\} \rightarrow G$  mit  $\pi(a) = a$  falls  $a \in \Gamma$  und  $\pi(\$) = 1$ . Sei  $(s, s', v) \in S \times S \times V$  und sei  $(a, a') \in \Sigma$ , dann definiert man für die Übergangsfunktion  $\tau$ , dass

$$\tau((s, s', v), (a, a')) = \begin{cases} (\tau'(s, a), \tau'(s', a'), \pi(a)^{-1}v\pi(a')) & \text{für } \pi(a)^{-1}v\pi(a') \in V, \\ F & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu zeigen ist nun, dass  $M_g$  genau die Multiplikation mit  $g$  erkennt. Seien  $a = a_1 \dots a_n \in L_{geo}$ ,  $b = b_1 \dots b_m \in L_{geo}$  mit  $ag = b$  und sei o.B.d.A.  $n \leq m$ . Mit Lemma 3.2.1 folgt nun, dass für alle  $i$  zwischen 1 und  $n$   $|a_1 \dots a_i - b_1 \dots b_i| \leq 2\delta + 2$  gilt. Also landet  $M_g$  bei der Eingabe von  $(a_1, b_1) \dots (a_n, b_n)(\$, b_m)$  nie in  $F$  und wegen  $ag = b$  akzeptiert er.

Umgekehrt seien  $a$  und  $b$  (ohne die aufgefüllten  $\$$ ) zwei Wörter, die erkannt werden. Aus der Wahl der akzeptierenden Zustände folgt sofort, dass  $a, b \in L_{geo}$  und dass  $ag = b$  in  $G$ .  $\square$

### 3.3 Das Wortproblem ist entscheidbar

**Lemma 3.3.1** *Sei  $w \in L_{geo}$  und  $g \in \Gamma$ . Dann lässt sich ein Wort  $w' \in L_{geo}$  mit  $wg = w'$  berechnen.*

*Beweis:* Sei  $\Gamma^i \subseteq \Gamma^*$  die Menge aller Wörter deren Länge genau  $i$  ist. Die Menge  $\Gamma^i$  ist für alle  $i \in \mathbb{N}$  beschränkt durch  $|\Gamma|^i$ . Sei  $|w| = n$  und sei  $M_g$  der Automat, der die Multiplikation mit  $g$  erkennt (existiert nach Satz 3.2.3). Man testet nun mit Hilfe von  $M_g$  für alle  $w' \in \Gamma^{n-1} \cup \Gamma^n \cup \{wg \in \Gamma^*\}$  ob  $wg = w'$  in  $G$ . Da die Länge von  $w'$  entweder  $n - 1$ ,  $n$  oder  $n + 1$  sein muss, findet man auf diese Weise mindestens ein  $w'$  mit den gesuchten Eigenschaften.  $\square$

Der Platzbedarf ist bei diesem Verfahren polynomiell in der Länge von  $w$ . Durch sukzessives Anwenden von Lemma 3.3.1 ergibt sich folgendes Korollar:

**Korollar 3.3.2** *Für jedes Wort  $a_1 \dots a_n \in \Gamma^*$  lässt sich ein Wort  $w \in L_{geo}$  mit  $a_1 \dots a_n = w$  in  $G$  berechnen.*

Damit ist  $a_1 \dots a_n = 1$  in  $G$  genau dann, wenn das mit Korollar 3.3.2 berechnete Wort  $w = \epsilon$  in  $\Gamma^*$  und man erhält damit ein weiteres Korollar:

**Korollar 3.3.3** *Das Wortproblem für hyperbolische Gruppen ist entscheidbar.*



# Kapitel 4

## Verallgemeinerungen von Geodätischen

Das Ziel dieses Kapitel ist die Konstruktion einer Verallgemeinerung von Geodätischen, den *Lokalquasigeodätischen*. Von diesen Lokalquasigeodätischen wird gezeigt, dass sie sich nicht weit von den Geodätischen zwischen den selben Endpunkten entfernen, d.h. es wird ein  $\varepsilon$  konstruiert, derart dass jede Lokalquasigeodätische in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von jeder zugehörigen Geodätischen bleibt.

Dies ist insofern etwas überraschend, weil Lokalquasigeodätische nur durch eine lokale Eigenschaft definiert werden; dass sie in einer  $\varepsilon$ -Umgebung verlaufen, ist aber eine globale Eigenschaft.

### 4.1 Ketten

Eine Kette ist eine endliche Aneinanderreihung von Geodätischen. Diese werden Segmente oder Glieder der Kette genannt. Ketten werden in sehr vielen weiteren Beweisen auftauchen, insbesondere der Sonderfall mit nur drei Gliedern. In diesem Kapitel sind Ketten ein wichtiges Hilfsmittel um zu zeigen, dass Lokalquasigeodätischen sich nicht weit von den zugehörigen Geodätischen entfernen können.

**Lemma 4.1.1** *Sei  $Y = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$  eine Kette mit geodätischen Gliedern, wobei  $n \leq 2^k$  mit  $k \geq 1$ . Dann gilt  $[x_0, x_n] \subseteq K_{k\delta}(Y)$  für jede Geodätische  $[x_0, x_n]$  zwischen den Endpunkten von  $Y$ , d.h. für alle  $x \in [x_0, x_n]$  existiert ein  $y \in Y$  mit  $|x - y| \leq k\delta$ .*



*Beweis:* mit Induktion über  $k$ . O.B.d.A. sei  $n = 2^k$  (man kann beliebig viele Kettenglieder der Form  $[x_i, x_i]$  zwischen  $[x_{i-1}, x_i]$  und  $[x_i, x_{i+1}]$  einfügen). Bei  $k = 1$  gilt die Behauptung, weil  $X$   $\delta$ -hyperbolisch ist, d.h. dass jedes Dreieck mit geodätischen Seiten  $\delta$ -dünn ist (Definition 2.4.1). Angenommen die Behaup-

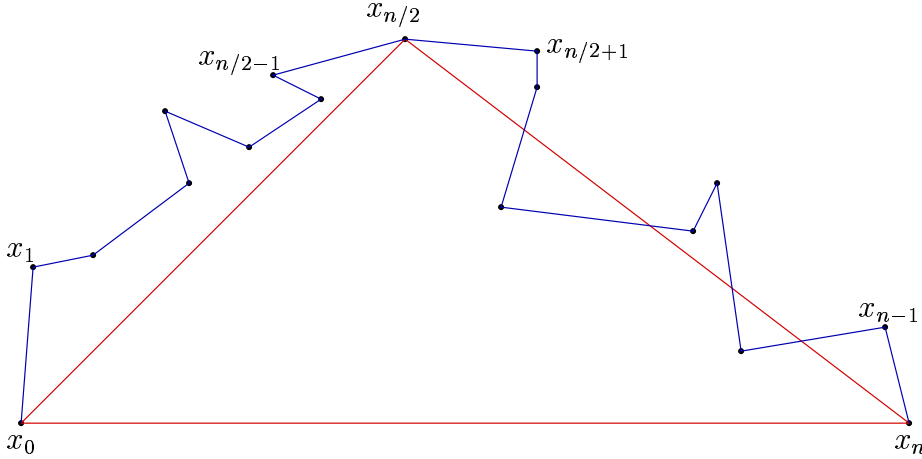


Abbildung 4.1: Skizze zum Beweis von Lemma 4.1.1

tung ist wahr für  $n = 2^k$ . Zu zeigen ist, dass sie auch für  $n = 2^{k+1}$  stimmt. Seien  $[x_0, x_{n/2}]$  und  $[x_{n/2}, x_n]$  Geodätische (siehe Abbildung 4.1). Aus der Induktionsvoraussetzung folgt  $[x_0, x_{n/2}] \subseteq K_{k\delta}([x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{n/2-1}, x_{n/2}])$  und  $[x_{n/2}, x_n] \subseteq K_{k\delta}([x_{n/2}, x_{n/2+1}] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n])$ . Daraus ergibt sich

$$([x_0, x_{n/2}] \cup [x_{n/2}, x_n]) \subseteq K_{k\delta}(Y). \quad (4.1)$$

Da  $X$   $\delta$ -hyperbolisch ist, gilt

$$[x_0, x_n] \subseteq K_\delta([x_0, x_{n/2}] \cup [x_{n/2}, x_n]). \quad (4.2)$$

Aus den Teilmengenbeziehungen (4.1) und (4.2) folgt  $[x_0, x_n] \subseteq K_{(k+1)\delta}(Y)$ .  $\square$

## 4.2 Lokalquasigeodätische

**Definition 4.2.1** Eine  $(\lambda, \mu)$ -Lokalquasigeodätische  $f : [a, b] \rightarrow X$  ist ein Pfad, bei dem für alle Teilintervalle  $[a_0, b_0] \subseteq [a, b]$  gilt:

$$b_0 - a_0 \leq \mu \Rightarrow b_0 - a_0 \leq \lambda |f(b_0) - f(a_0)|$$

**Lemma 4.2.2** *Sei  $r \geq 0$  und seien  $x_0, x, y \in X$  mit  $x, y \notin K_{<r}(x_0)$  und sei  $x_0$  ein Punkt auf einer Geodätischen  $[x, y]$ . Wenn  $f : [a, b] \rightarrow X$  ein Pfad mit  $f(a) = x$ ,  $f(b) = y$  und  $f([a, b]) \cap K_{<r}(x_0) = \emptyset$ , dann gilt*

$$b - a > \delta(2^{r/\delta-1} - 2).$$

*Beweis:* Wir unterteilen den Pfad  $f([a, b])$  in  $n$  Teilstücke mit den Endpunkten  $\{y_0, y_1\}, \{y_1, y_2\}, \dots, \{y_{n-1}, y_n\}$  (mit  $y_0 = x$  und  $y_n = y$ ), so dass jedes der Teilstücke die Länge  $2\delta$  besitzt, außer dem letzten, das kürzer sein kann (aber nicht 0). Damit gilt

$$b - a > 2\delta(n - 1). \quad (4.3)$$

Falls  $n = 1$ , dann ist  $b - a \leq 2\delta$  und da  $2r \leq b - a$  folgt in diesem Fall  $r \leq \delta$ . Damit ist obige Ungleichung erfüllt, da die rechte Seite negativ wird. Sei also  $n \geq 2$ . Es existiert ein eindeutiges  $k \geq 1$  mit

$$2^{k-1} + 1 \leq n \leq 2^k. \quad (4.4)$$

Für alle  $i = 1, \dots, n - 1$  seien die Punkte  $y_i$  und  $y_{i+1}$  durch eine Geodätische  $[y_i, y_{i+1}]$  verbunden. Es gilt

$$|y_{i+1} - y_i| \leq 2\delta. \quad (4.5)$$

Sei  $Y$  die Kette  $[y_0, y_1] \cup \dots \cup [y_{n-1}, y_n]$ . Nach Lemma 4.1.1 existiert  $m \in Y$  mit  $|x_0 - m| \leq k\delta$  und aus (4.5) folgt, dass ein Endpunkt  $y_j$  eines Teigliedes von  $Y$  existiert, für den  $|m - y_j| \leq \delta$  gilt (siehe Abbildung 4.2). Wegen  $y_j \in f([a, b])$  erhält man damit  $r \leq |x_0 - y_j| \leq |x_0 - m| + |m - y_j| \leq k\delta + \delta = (k + 1)\delta$ , bzw.

$$k \geq \frac{r}{\delta} - 1. \quad (4.6)$$

Mit (4.3), (4.4) und (4.6) ergibt sich nun das Lemma:  $b - a > 2\delta \cdot (n - 1) \geq 2\delta(2^{k-1} + 1 - 1) \geq 2\delta 2^{r/\delta-2} > \delta(2^{r/\delta-1} - 2)$ .  $\square$

Das Ziel ist zu zeigen, dass Lokalquasigeodätische nahe bei Geodätischen verlaufen. Das wird hier dadurch erreicht, dass man annimmt, die  $(\lambda, \mu)$ -Lokalquasigeodätische  $f$  würde sich zu weit von einer Geodätischen mit den selben Endpunkten entfernen. Dann kann man die Situation von Lemma 4.2.2 vorfinden und leitet daraus grob gesprochen den Widerspruch

„lineares Wachstum“  $>$  „exponentielles Wachstum“

ab, da die Länge von  $f$  auf kurzen Teilintervallen durch  $\lambda$  linear beschränkt ist.

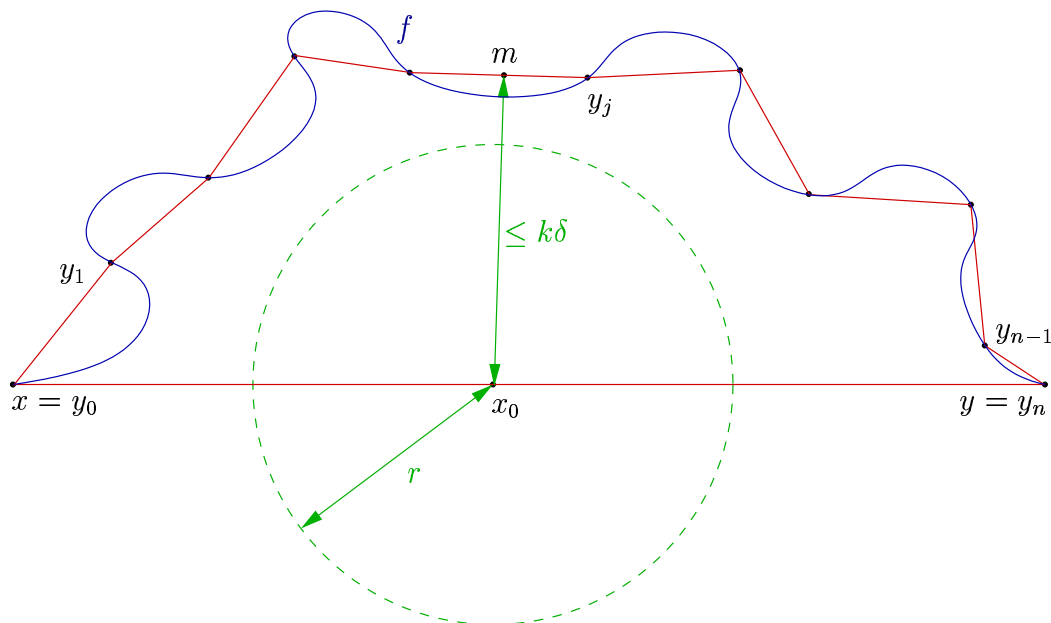


Abbildung 4.2: Skizze zum Beweis von Lemma 4.2.2

**Lemma 4.2.3** Sei  $[x, y]$  eine Geodätische,  $d_0$  eine positive reelle Zahl und  $f : [a, b] \rightarrow X$  ein Pfad mit  $f(a) = x$ ,  $f(b) = y$  und sei  $t_0 \in [a, b]$  mit  $d(f(t_0), [x, y]) \geq d_0$ . Dann existiert für alle  $l \leq d_0$  ein Teilintervall  $[a_0, b_0]$  von  $[a, b]$  mit

$$d(f(a_0), [x, y]) = d(f(b_0), [x, y]) =: d_1 \geq d_0/2 \quad (4.7)$$

$$\forall t \in [a_0, b_0] : d(f(t), [x, y]) \geq d_1 \quad (4.8)$$

$$l \leq b_0 - a_0 \leq 2l. \quad (4.9)$$

*Beweis:* Für  $l = 0$  ist die Behauptung für jedes Teilintervall der Form  $[a_0, a_0]$  erfüllt. Sei also  $l > 0$ . Im folgenden sei  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto d(f(t), [x, y])$ . Seien  $t_1$  und  $t_2$  die Punkte in  $[a, b]$ , die sich am nächsten bei  $t_0$  befinden ( $t_1$  auf der linken und  $t_2$  auf der rechten Seite) mit der Eigenschaft  $h(t_1) = h(t_2) = d_0/2$ . Nun gilt  $\forall t \in [t_1, t_2] : h(t) \geq d_0/2$  und  $l \leq d_0 = d_0/2 + d_0/2 \leq |f(t_2) - f(t_0)| + |f(t_0) - f(t_1)| \leq t_2 - t_1$  (vgl. Abbildung 4.3).

Sei  $\mathcal{E}$  die Menge aller Teilintervalle  $[a_0, b_0]$  von  $[a, b]$ , die die Bedingungen (4.7), (4.8) und die erste Ungleichung von (4.9) des Lemmas erfüllen. Die Menge  $\mathcal{E}$  ist kompakt und nicht leer, denn sie enthält das Intervall  $[t_1, t_2]$ . Die Abbildung  $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} : [c, d] \mapsto d - c$  ist stetig und nimmt auf  $\mathcal{E}$  ihr Infimum an. Sei  $[a_0, b_0]$  ein kürzestes Intervall aus  $\mathcal{E}$ . Zu zeigen ist nun  $b_0 - a_0 \leq 2l$ . Angenommen, es gilt  $b_0 - a_0 > 2l$ .

Falls ein Punkt  $c$  im offenen Intervall  $(a_0, b_0)$  existiert, für den  $h(c) = h(a_0)$  gilt, so ist  $c - a_0 \geq l$  oder  $b_0 - c \geq l$  und damit wäre  $[a_0, c]$  oder  $[c, b_0]$  in  $\mathcal{E}$ , ein Widerspruch zur Minimalität von  $[a_0, b_0]$ . Abbildung 4.3 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

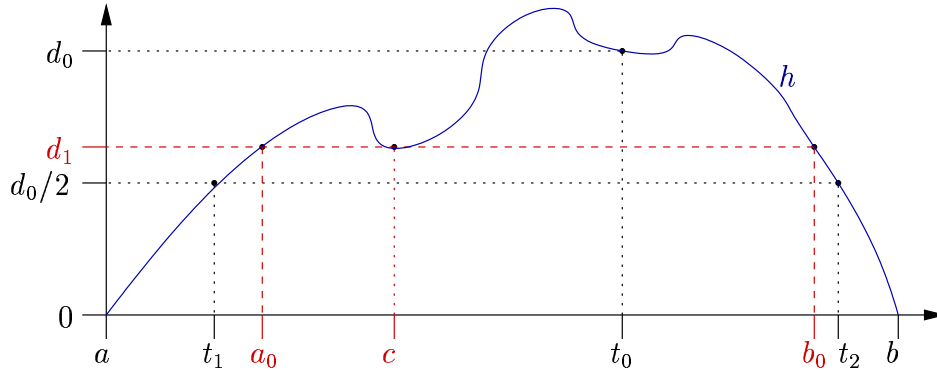


Abbildung 4.3: Erste Skizze zum Beweis von Lemma 4.2.3

Zu betrachten bleibt nun noch der Fall, dass  $h(t) > h(a_0)$  für alle  $t$  im offenen Intervall  $(a_0, b_0)$  gilt. Da das Intervall  $[a_0 + l/2, b_0 - l/2]$  kompakt ist, existiert ein  $\eta > 0$ , so dass  $h(t) \geq d_1 + \eta$  für alle  $t \in [a_0 + l/2, b_0 - l/2]$  gilt (wobei  $d_1 = h(a_0)$ ). Sei  $a_1$  (bzw.  $b_1$ ) der erste Punkt links von  $a_0 + l/2$  (bzw. rechts von  $b_0 - l/2$ ) mit  $h(a_1) = d_1 + \eta$  (bzw.  $h(b_1) = d_1 + \eta$ ). Diese Situation wird in Abbildung 4.4 dargestellt.

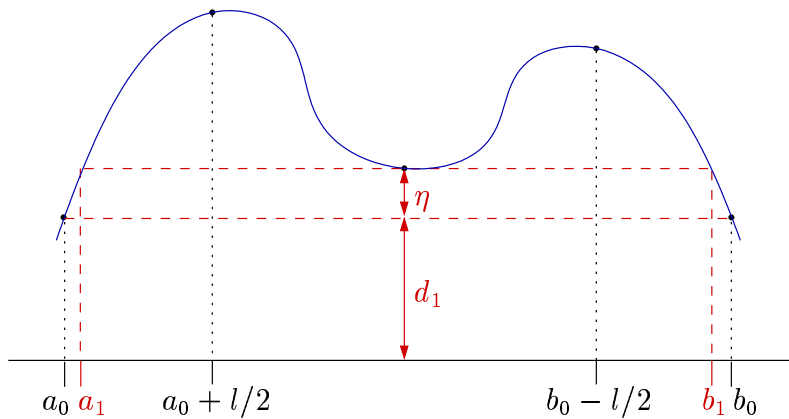


Abbildung 4.4: Zweite Skizze zum Beweis von Lemma 4.2.3

Das Intervall  $[a_1, b_1]$  liegt in  $\mathcal{E}$  und ist kürzer als  $[a_0, b_0]$  im Widerspruch zur Minimalität von  $[a_0, b_0]$ .  $\square$

**Lemma 4.2.4** Sei  $d_0 \geq 20\delta$  und  $l \leq d_0$ . Sei  $[x, y]$  eine Geodätische und  $f : [a_0, b_0] \rightarrow X$  ein Pfad mit

$$d(f(a_0), [x, y]) = d(f(b_0), [x, y]) =: d_1 \geq d_0/2 \quad (4.10)$$

$$\forall t \in [a_0, b_0] : d(f(t), [x, y]) \geq d_1 \quad (4.11)$$

$$l \leq b_0 - a_0 \leq 2l. \quad (4.12)$$

Dann gilt  $b_0 - a_0 > \delta(2^{\rho/\delta-1} - 2)$  mit  $\rho = \frac{1}{2}|f(b_0) - f(a_0)| - 4\delta$ .

*Beweis:* Sei  $x_0 = f(a_0)$ ,  $y_0 = f(b_0)$  und sei  $z_0$  die Mitte einer Geodätischen  $[x_0, y_0]$ . Weiter sei  $x_1$  (bzw.  $y_1$ ) ein Punkt auf  $[x, y]$  mit  $|x_1 - x_0| = d_1$  (bzw.  $|y_1 - y_0| = d_1$ ) und seien  $[x_0, x_1]$ ,  $[y_1, y_0]$  Geodätische und  $[x_1, y_1]$  sei eine Geodätische, die ganz in  $[x, y]$  verläuft. Für die Kette  $Y = [x_0, x_1] \cup [x_1, y_1] \cup [y_1, y_0]$  gilt nach Lemma 4.1.1, dass  $[x_0, y_0] \subseteq K_{2\delta}(Y)$ . Es existiert also ein Punkt  $m$  auf  $Y$  mit

$$|z_0 - m| \leq 2\delta. \quad (4.13)$$

Angenommen  $m \in [x_1, y_1]$ , dann gilt wegen (4.11) für alle  $t \in [a_0, b_0]$ , dass  $|m - z_0| + |z_0 - f(t)| \geq |m - f(t)| \geq d_0/2$  und mit (4.13) ergibt sich

$$\forall t \in [a_0, b_0] : |z_0 - f(t)| \geq d_0/2 - 2\delta.$$

Mit Lemma 4.2.2 folgt  $b_0 - a_0 > \delta(2^{(d_0/2-2\delta)/\delta-1} - 2)$ . Wegen  $2d_0 \geq 2l \geq |b_0 - a_0|$  gilt  $2d_0 > \delta(2^{(d_0/2-2\delta)/\delta-1} - 2)$ . Indem man  $u = d_0/\delta$  setzt, erhält man  $2u > 2^{u/2-3} - 2$ . Nach Voraussetzung gilt  $d_0 \geq 20\delta$  und deshalb auch  $u \geq 20$ . Damit ergibt sich ein Widerspruch, da obige Ungleichung für alle  $u \geq 20$  nicht erfüllt ist. Also gilt  $m \in [x_0, x_1]$  oder  $m \in [y_1, y_0]$ . O.B.d.A sei  $m \in [x_0, x_1]$ . Mit (4.13) folgt

$$|x_0 - m| \geq |z_0 - x_0| - |m - z_0| \geq |x_0 - y_0|/2 - 2\delta. \quad (4.14)$$

Wegen (4.11) gilt für alle  $t \in [a_0, b_0]$ , dass  $d_1 \leq |f(t) - x_1| \leq |f(t) - z_0| + |z_0 - m| + |m - x_1|$ , bzw.  $|f(t) - z_0| \geq d_1 - |z_0 - m| - |m - x_1|$ . Mit  $d_1 = |x_0 - m| + |m - x_1|$  ergibt sich daraus  $|f(t) - z_0| \geq |x_0 - m| - |z_0 - m|$ . Zusammen mit (4.13) und (4.14) folgt

$$\forall t \in [a_0, b_0] : |f(t) - z_0| \geq |x_0 - y_0|/2 - 4\delta.$$

Mit Lemma 4.2.2 folgt  $b_0 - a_0 > \delta(2^{(|x_0 - y_0|/2-4\delta)/\delta-1} - 2)$  und damit die Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Lemma 4.2.5** *Sei  $f : [a, b] \rightarrow X$  eine  $(\lambda, \mu)$ -Lokalquasigeodätische mit  $f(a) = x$  und  $f(b) = y$ , und sei  $[x, y]$  eine Geodätische. Für jeden Punkt  $z$  auf  $f([a, b])$  mit  $d(z, [x, y]) \geq 20\delta$  und  $2d(z, [x, y]) \leq \mu$  gilt*

$$d(z, [x, y]) < 4\delta\lambda \log \lambda + 20\delta\lambda.$$

*Beweis:* Sei  $z$  ein Punkt auf  $f([a, b])$  mit  $d(z, [x, y]) \geq 20\delta$  und  $2d(z, [x, y]) \leq \mu$ . Mit  $d_0 = l := d(z, [x, y])$  und den Lemmata 4.2.3 und 4.2.4 lässt sich folgern, dass ein Teilintervall  $[a_0, b_0]$  von  $[a, b]$  existiert mit

$$d_0 \leq b_0 - a_0 \leq 2d_0 \leq \mu \quad (4.15)$$

und  $b_0 - a_0 > \delta(2^{\rho/\delta-1} - 2)$  mit  $\rho = \frac{1}{2}|f(b_0) - f(a_0)| - 4\delta$ . Wegen (4.15) und weil  $f$  eine  $(\lambda, \mu)$ -Lokalquasigeodätische ist, gilt auch  $b_0 - a_0 \leq \lambda|f(b_0) - f(a_0)|$ . Mit  $|f(b_0) - f(a_0)| = 2\rho + 8\delta$  erhält man

$$\delta(2^{\rho/\delta-1} - 2) < \lambda(2\rho + 8\delta). \quad (4.16)$$

Daraus folgt, dass  $\rho$  nach oben beschränkt ist (und damit auch  $|f(b_0) - f(a_0)|$  und  $b_0 - a_0$ ), und diese Schranke hängt nur von  $\delta$  und  $\lambda$  ab. Die Ungleichung (4.16) ist nur für  $\rho < 2\delta \log \lambda + 6\delta$  erfüllt; denn sei  $\rho = 2\delta \log \lambda + 6\delta$ , dann folgt aus (4.16), dass

$$\delta(2^{2\log \lambda + 6 - 1} - 2) < \lambda(2 \cdot 2\delta \log \lambda + 12\delta + 8\delta).$$

Teilen durch  $\delta$  liefert  $32 \cdot 2^{\log \lambda^2} - 2 < 4\lambda \log \lambda + 20\lambda$  und weil sowohl  $1 \leq \lambda^2$  als auch  $\lambda \leq \lambda^2$  und  $\lambda \log \lambda \leq \lambda^2$  gilt, erhält man schließlich  $32\lambda^2 < 26\lambda^2$ , ein Widerspruch. Daher ist  $2\delta \log \lambda + 6\delta$  eine echte obere Schranke für  $\rho$ . Damit folgt  $|f(b_0) - f(a_0)| < 4\delta \log \lambda + 20\delta$  und  $b_0 - a_0 < 4\delta\lambda \log \lambda + 20\delta\lambda$ . Mit der ersten Ungleichung von (4.15) ergibt sich  $d_0 < 4\delta\lambda \log \lambda + 20\delta\lambda$ .  $\square$

**Satz 4.2.6** *Sei  $\varepsilon := 4\delta\lambda \log \lambda + 20\delta\lambda$  und  $\mu \geq 2\varepsilon$  und sei  $f : [a, b] \rightarrow X$  eine  $(\lambda, \mu)$ -Lokalquasigeodätische mit  $f(a) = x$  und  $f(b) = y$ . Dann gilt für jede Geodätische  $[x, y]$ , dass*

$$f([a, b]) \subseteq K_{<\varepsilon}([x, y]).$$

*Beweis:* Angenommen es existiert ein Punkt  $z \in f([a, b])$  mit  $d(z, [x, y]) \geq \varepsilon$ . Dann existiert auf dem Pfad zu  $z$  auch ein Punkt  $\bar{z}$  mit  $d(\bar{z}, [x, y]) = \varepsilon$ . Damit gilt auch  $2d(\bar{z}, [x, y]) \leq \mu$  und  $d(\bar{z}, [x, y]) \geq 20\delta$ . Mit Lemma 4.2.5 folgt  $d(\bar{z}, [x, y]) < 4\delta\lambda \log \lambda + 20\delta\lambda$ . Das ist ein Widerspruch zu  $d(\bar{z}, [x, y]) = 4\delta\lambda \log \lambda + 20\delta\lambda$ , also kann weder  $\bar{z}$  noch  $z$  existieren.  $\square$

Man kann sich nach Satz 4.2.6 von dem Parameter  $\mu$  lösen, wenn man fordert, dass er gross genug ist. Dies führt auf natürliche Weise zu folgender Definition:

**Definition 4.2.7** *Eine  $\lambda$ -Lokalquasigeodätische ist eine  $(\lambda, \mu)$ -Lokalquasigeodätische mit  $\mu = 8\delta\lambda \log \lambda + 40\delta\lambda$ .*

Von dem Parameter  $\lambda$  kann man sich dadurch lösen, dass man fordert, dass er 1 ist. Teilstücke der Länge  $\leq \mu$  sollen geodätisch sein. Formal erhält man folgende Definition:

**Definition 4.2.8** *Eine  $\mu$ -Lokalgeodätische ist eine  $(1, \mu)$ -Lokalquasigeodätische.*

# Kapitel 5

## Die Kanonische Repräsentation

### 5.1 Fastlokalgeodätische

Ab hier gelten folgende Konventionen:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &:= 10\delta \\ \varepsilon(\lambda) &:= 4\delta\lambda \log \lambda + 20\delta\lambda \\ \mu(\lambda) &:= 2\varepsilon(\lambda) \\ \mu_0 &:= 3\varepsilon(\lambda_0) + 3\delta.\end{aligned}$$

**Definition 5.1.1** Ein Pfad  $f : [a, b] \rightarrow X$  ist eine  $\kappa$ -Fastlokalgeodätische, wenn  $\kappa \geq \mu_0$ , wenn  $f$  eine  $\lambda_0$ -Lokalquasigeodätische ist und wenn  $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$  existieren mit  $a = c_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq \dots \leq d_n = b$  und für  $i = 1, \dots, n$  ist  $f|_{[c_i, d_i]}$   $\mu_0$ -lokalgeodätisch. Für die Länge der einzelnen Abschnitte muss gelten:

$$\begin{aligned}d_i - c_i &\geq \kappa && \text{für alle } 1 \leq i \leq n - 1 \\ c_{i+1} - d_i &\leq 2\delta && \text{für alle } 1 \leq i \leq n - 1.\end{aligned}$$

Für das letzte Stück  $f|_{[c_n, d_n]}$  gibt es keine Mindestlänge. Abschnitte der Form  $f|_{[c_i, d_i]}$  nennt man Sublokalgeodätische, und Abschnitte der Form  $f|_{[d_i, c_{i+1}]}$  werden Brücken genannt. Abbildung 5.1 veranschaulicht den Begriff einer Fastlokalgeodätischen.

**Lemma 5.1.2** Sei  $[x, y]$  eine Geodätische und  $f : [a, b] \rightarrow X$  eine  $\kappa$ -Fastlokalgeodätische mit  $f(a) = x$  und  $f(b) = y$ . Sei  $g = f|_{[c, d]}$  eine Sublokalgeodätische von  $f$  und sei  $z \in g$  mit  $\min(|z - f(c)|, |z - f(d)|) \geq \varepsilon(\lambda_0) + 3\delta$ . Dann gilt  $d(z, [x, y]) \leq 2\delta$ .



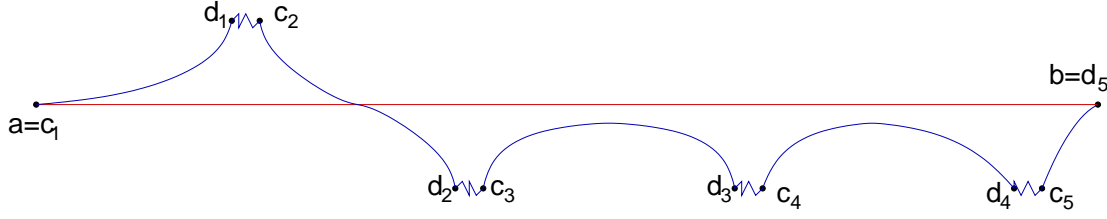


Abbildung 5.1: Fastlokalgeodätische

*Beweis:* Der Pfad  $f$  liegt in der  $\varepsilon(\lambda_0)$ -Umgebung von  $[x, y]$  (Satz 4.2.6). Seien  $z_1, z_2$  die ersten Punkte auf  $g$  ( $z_1$  auf der selben Seite wie  $g(c)$ ,  $z_2$  auf der anderen Seite von  $z$ ) mit  $|z - z_1| = |z - z_2| = \varepsilon(\lambda_0) + 3\delta$ . Da  $g$   $\mu_0$ -lokalgeodätisch ist, muss  $g([g^{-1}(z_1), g^{-1}(z_2)])$  eine Geodätische sein. Seien  $y_1, y_2 \in [x, y]$  mit

$$\max(|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|) < \varepsilon(\lambda_0).$$

Abbildung 5.2 veranschaulicht diese Situation. Nach Lemma 4.1.1 hat  $z$  eine Ent-

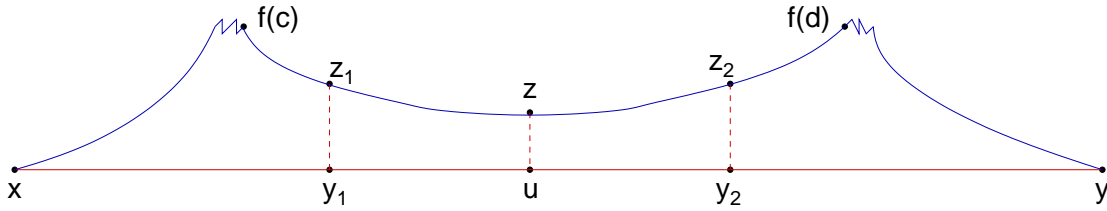


Abbildung 5.2: Skizze zum Beweis von Lemma 5.1.2

fernung von höchstens  $2\delta$  von der Kette  $Y = [z_1, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup [y_2, z_2]$ , wobei  $[y_1, y_2] \subseteq [x, y]$ . Sei  $u \in Y$  mit  $|z - u| \leq 2\delta$ . Der Punkt  $u$  kann weder auf  $[z_1, y_1]$  noch auf  $[y_2, z_2]$  liegen, denn wenn  $u$  auf  $[z_1, y_1]$  liegen würde, dann ergäbe sich wegen  $|y_1 - z_1| \geq |u - z_1|$  folgende Ungleichung im Widerspruch zur Dreiecksungleichung:  $|z - z_1| > |z - u| + |y_1 - z_1| \geq |z - u| + |u - z_1|$ . Analog falls  $u \in [y_2, z_2]$ . Also liegt  $u$  auf  $[y_1, y_2]$  und damit auf  $[x, y]$ .  $\square$

**Lemma 5.1.3** Sei  $f : [a, b] \rightarrow X$  eine  $\kappa$ -Fastlokalgeodätische und sei  $[x, y]$  eine Geodätische. Sei  $g = f|_{[c, d]}$  eine Sublokalgeodätische und sei  $z \in g$  ein Knoten mit:  $|z - f(d)| \geq \varepsilon(\lambda_0) + 3\delta$  und  $f^{-1}(z) - c \geq \kappa + 2\delta \geq \mu_0 + 2\delta$ . Sei  $v \in g$  der Knoten zwischen  $f(c)$  und  $z$  mit  $f^{-1}(z) - f^{-1}(v) = \mu(\lambda_0) + 2\delta < \mu_0 + 2\delta$ . Wenn gilt

$$\forall \text{ Knoten } s \in f([f^{-1}(v), f^{-1}(z)]) \exists \text{ Knoten } s' \in [x, y] : |s - s'| \leq 2\delta \quad (5.1)$$

und wenn  $u \in [x, y]$  ein solcher Knoten ist mit  $|z - u| \leq 2\delta$ , dann existiert ein Knoten  $z' \in g$ ,  $|z - z'| \leq 2\delta$ , derart dass  $\tau = f|_{[a, f^{-1}(z')]} \cup [z', u] \cup [u, y]$  eine

$\kappa$ -Fastlokalgeodätische ist, wobei  $[u, y] \subseteq [x, y]$  für die Geodätische  $[u, y]$  gelten soll.

*Beweis:* Sei  $z'$  der letzte Knoten auf der Geodätischen  $[z, u]$ , der auch auf  $g$  zwischen  $f(c)$  und  $z$  liegt. Die Einschränkung  $f|_{[a, f^{-1}(z')]}$  ist eine  $\kappa$ -Fastlokalgeodätische und die letzte Sublokalgeodätische hat mindestens die Länge  $\kappa$ . Weiter gilt, dass  $|z' - u| \leq |z - u| \leq 2\delta$  und dass  $[u, y]$  eine Geodätische ist. Deshalb kann

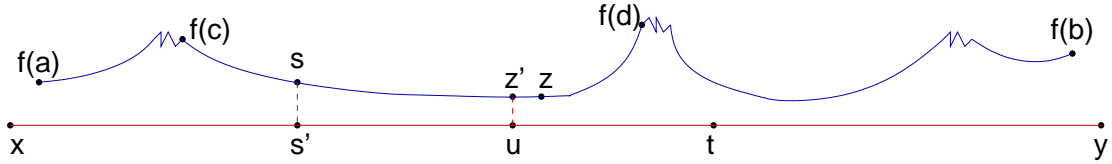


Abbildung 5.3: Skizze zum Beweis von Lemma 5.1.3

man  $[z', u]$  als Brücke von  $\tau$  betrachten. Um das Lemma zu beweisen, muss man also noch zeigen, dass  $\tau$  eine  $\lambda_0$ -Lokalquasigeodätische ist.

Sei  $\nu$  ein Teilstück von  $\tau$  mit  $\text{Länge}(\nu) \leq \mu(\lambda_0)$  und seien  $s$  und  $t$  die Enden von  $\nu$ . Zu zeigen ist  $\text{Länge}(\nu) \leq \lambda_0 \cdot |t - s|$ . Falls  $\text{Länge}(\nu) \leq 10\delta = \lambda_0$  ist die Ungleichung erfüllt, und falls  $s$  oder  $t$  auf  $[z', u]$  liegt, gilt  $\text{Länge}(\nu) \leq |t - s| + 2\delta$ , weil maximal  $\text{Länge}([z', u])$  zu der Länge einer Geodätischen hinzukommt.

Zu untersuchen ist nun noch der Fall, dass  $s \in g$  und  $t \in [u, y]$  (vgl. Abbildung 5.3). Da  $f^{-1}(z) - f^{-1}(s) \leq \mu(\lambda_0) + 2\delta$  existiert wegen der Bedingung 5.1 ein  $s' \in [x, y]$  mit  $|s' - s| \leq 2\delta$ . Es gilt

$$\begin{aligned} |s' - u| &\geq |s - z'| - |s - s'| - |u - z'| \geq |s - z'| - 4\delta \quad \text{und} \\ |t - s| &\geq |t - s'| - |s - s'| \geq |t - u| + |u - s'| - |s - s'| \geq |t - u| + |u - s'| - 2\delta. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt das

$$|t - s| \geq |t - u| + |z' - s| - 6\delta \geq |t - u| + |u - z'| + |z' - s| - 2\delta - 6\delta,$$

also  $|t - s| \geq \text{Länge}(\nu) - 8\delta$  und damit gilt auch  $\text{Länge}(\nu) \leq 10\delta \cdot |t - s|$ .  $\square$

Wenn  $f(a) = x$  und  $f(b) = y$  dann ist die Bedingung (5.1) nach Lemma 5.1.2 erfüllt, da  $f^{-1}(v) - c = (f^{-1}(z) - c) - (f^{-1}(z) - f^{-1}(v)) \geq (\mu_0 + 2\delta) - (\mu(\lambda_0) + 2\delta) \geq \varepsilon(\lambda_0) + 3\delta$  (weil  $g$   $\mu_0$ -lokalgeodätisch ist, gilt damit auch, dass  $|v - f(c)| \geq \varepsilon(\lambda_0) + 3\delta$ ).

## 5.2 Der Zylinder

**Definition 5.2.1** Sei  $w \in G$  gegeben. Ein Knoten  $v \in X$  heisst Mitglied von  $w$  bezüglich des Maßstabs  $\kappa$ , wenn ein Pfad  $f : [a, b] \rightarrow X$  durch  $v$  existiert mit

1.  $f(a) = 1, f(b) = w$
2. Sei  $h : [a, f^{-1}(v)] \rightarrow X$  definiert durch  $h(a+t) := f(f^{-1}(v) - t)$ . Damit ist  $h$  der Pfad, der von  $v$  rückwärts zu 1 entlang von  $f$  verläuft; dann sind  $h$  und  $f|_{[f^{-1}(v), b]}$  beide  $\kappa$ -Fastlokalgeodätische.
3.  $v$  liegt auf einer  $\mu_0$ -Lokalgeodätischen  $e$ , wobei  $e$  die Vereinigung der ersten beiden Sublokalgeodätischen von  $h$  und  $f|_{[f^{-1}(v), b]}$  ist.

Die Menge aller Mitglieder bezüglich des Maßstabs  $\kappa$  wird  $\kappa$ -Zylinder von  $w$  genannt und mit  $Z_\kappa(w)$  bezeichnet.

Der Pfad  $f$  über dem gesamten Intervall  $[a, b]$  ist  $\lambda_0$ -lokalquasigeodätisch, da  $e$  sogar  $\mu_0$ -lokalgeodätisch ist und  $\mu_0 > \mu(\lambda_0)$ . Zu beachten ist, dass alle Knoten, die auf einer Geodätischen zu  $w$  liegen zu  $Z_\kappa(w)$  gehören.

**Lemma 5.2.2** Der Zylinder  $Z_\kappa(w)$  besitzt folgende Eigenschaften:

1. Jedes Mitglied  $v \in Z_\kappa(w)$  hat eine maximale Entfernung von  $2\delta$  zu jeder Geodätischen  $[1, w]$ . Damit gilt  $Z_\kappa(w) \subseteq K_{2\delta}([1, w])$  für jede Geodätische  $[1, w]$ .
2.  $v \in Z_\kappa(w) \iff w^{-1}v \in Z_\kappa(w^{-1})$ .

*Beweis:* Den ersten Teil zeigt man ähnlich wie Lemma 5.1.2. Falls gilt, dass  $\min(|v-1|, |v-w|) \leq 2\delta$ , so ist Teil 1. erfüllt. Sei also  $\min(|v-1|, |v-w|) > 2\delta$ . Sei  $\gamma = [1, w]$  eine Geodätische und sei  $f : [a, b] \rightarrow X$  ein Pfad mit  $v \in f$ , wie in Definition 5.2.1 gefordert. Sei  $z_1 \in f([a, f^{-1}(v)])$  mit  $f^{-1}(v) - f^{-1}(z_1) = \varepsilon(\lambda_0) + 3\delta$  oder falls ein solches  $z_1$  nicht existiert, sei  $z_1 = 1$ . Sei analog  $z_2 \in f([f^{-1}(v), b])$  mit  $f^{-1}(z_2) - f^{-1}(v) = \varepsilon(\lambda_0) + 3\delta$  oder falls ein solches  $z_2$  nicht existiert, sei  $z_2 = w$ . Das Stück  $f([f^{-1}(z_1), f^{-1}(z_2)])$  ist nach Definition 5.2.1 geodätisch. Seien  $z'_1 \in \gamma$  (bzw.  $z'_2 \in \gamma$ ) einer der Knoten mit geringstem Abstand von  $z_1$  (bzw.  $z_2$ ), vgl. Abbildung 5.4. Aus der Konstruktion von  $z'_1$  und  $z'_2$  folgt

$$|v - z_i| \geq |z'_i - z_i| + 2\delta \quad \text{für } i \in \{1, 2\}. \quad (5.2)$$

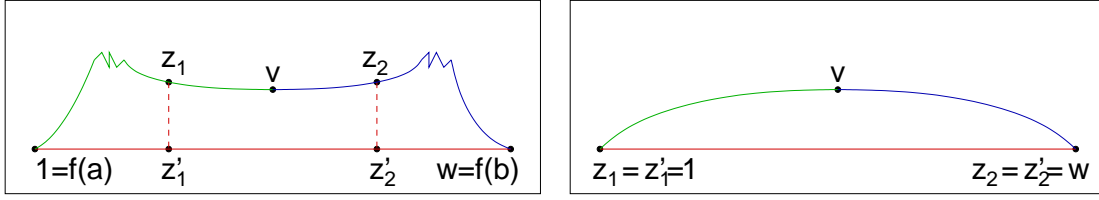


Abbildung 5.4: Skizze zum Beweis von Lemma 5.2.2

Sei  $Y = [z_1, z'_1] \cup [z'_1, z'_2] \cup [z'_2, z_2]$  eine Kette mit  $[z'_1, z'_2] \subseteq \gamma$ . Nach Lemma 4.1.1 existiert ein  $m \in Y$  mit  $|v - m| \leq 2\delta$ . Aus (5.2) folgt, dass  $m \in [z'_1, z'_2]$  (da die anderen beiden Kettenglieder zu weit entfernt sind) und damit  $m \in \gamma$ .

Der zweite Teil ergibt sich daraus, dass die Multiplikation von links mit  $w^{-1}$  eine Isometrie auf  $X$  ist. Wenn  $f : [a, b] \rightarrow X$  ein Pfad nach Definition 5.2.1 ist, dann genügt  $f' : [a, b] \rightarrow X : t \mapsto w^{-1} \cdot f(t)$  (bzw. in der Umkehrrichtung multipliziert man den Pfad  $f$ , der die Mitgliedschaft von  $w^{-1}v$  in  $Z_\kappa(w^{-1})$  bezeugt, mit  $w$  von links) auch wieder den Anforderungen von Definition 5.2.1.  $\square$

## 5.3 Die Differenz

**Definition 5.3.1** Sei  $w$  ein Knoten in  $X$ ,  $\kappa$  ein Maßstab und  $v_0 \in Z_\kappa(w)$ . Dann sei

$$L_\kappa^w(v_0) := \{v \in Z_\kappa(w) \mid |v| \leq |v_0|; 10\delta \leq |v_0 - v|\},$$

$$R_\kappa^w(v_0) := \{v \in Z_\kappa(w) \mid |v| \geq |v_0|; 10\delta \leq |v_0 - v|\}.$$

Damit wird die Differenz zwischen  $u, v \in Z_\kappa(w)$ ,  $\text{diff}_\kappa^w(u, v)$  definiert als:

$$\begin{aligned} \text{diff}_\kappa^w(u, v) := & |L_\kappa^w(u) \setminus L_\kappa^w(v)| - |L_\kappa^w(v) \setminus L_\kappa^w(u)| \\ & + |R_\kappa^w(v) \setminus R_\kappa^w(u)| - |R_\kappa^w(u) \setminus R_\kappa^w(v)|. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die Differenz-Funktion  $\text{diff}_\kappa^w(u, v)$  eine partielle Ordnung auf  $Z_\kappa(w)$  definiert, wird folgendes Lemma benötigt:

**Lemma 5.3.2** Mit obigen Bezeichnungen gilt  $\forall u, v, t \in Z_\kappa(w)$ :

- ①  $\text{diff}_\kappa^w(u, u) = 0$ ,
- ②  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) = -\text{diff}_\kappa^w(v, u)$ ,
- ③  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) + \text{diff}_\kappa^w(v, t) = \text{diff}_\kappa^w(u, t)$ .

*Beweis:* Der Teil ① gilt, weil alle vier Summanden in Definition 5.3.1 verschwinden und der Teil ② ergibt sich nun als Spezialfall von ③. Der Klarheit wegen sei im Rest des Beweises mit  $L_s$  stets  $L_\kappa^w(s)$  (bzw. mit  $R_s$  stets  $R_\kappa^w(s)$ ) gemeint. Um ③ zu beweisen, ist zu beachten, dass gilt:

$$\begin{aligned}
L &:= |L_u \setminus L_v| - |L_v \setminus L_u| + |L_v \setminus L_t| - |L_t \setminus L_v| \\
&= |L_u \setminus (L_v \cup L_t)| + |(L_u \cap L_t) \setminus L_v| - |L_v \setminus (L_u \cup L_t)| - |(L_v \cap L_t) \setminus L_u| \\
&\quad + |L_v \setminus (L_t \cup L_u)| + |(L_v \cap L_u) \setminus L_t| - |L_t \setminus (L_u \cup L_v)| - |(L_t \cap L_u) \setminus L_v| \\
&= |L_u \setminus (L_v \cup L_t)| + |(L_v \cap L_u) \setminus L_t| - |L_t \setminus (L_u \cup L_v)| - |(L_t \cap L_v) \setminus L_u| \\
&= |L_u \setminus L_t| - |L_t \setminus L_u| =: \bar{L}
\end{aligned}$$

und ganz analog zeigt man  $R := |R_v \setminus R_u| - |R_u \setminus R_v| + |R_t \setminus R_v| - |R_v \setminus R_t| = |R_t \setminus R_u| - |R_u \setminus R_t| =: \bar{R}$ . Damit gilt nun  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) + \text{diff}_\kappa^w(v, t) = L + R = \bar{L} + \bar{R} = \text{diff}_\kappa^w(u, t)$ .  $\square$

## 5.4 Die Scheiben eines Zylinders

**Definition 5.4.1** Sei  $v_0$  ein Mitglied von  $Z_\kappa(w)$ . Die Scheibe von  $v_0$  in dem Zylinder  $Z_\kappa(w)$  ist:

$$\text{Scheibe}_\kappa^w(v_0) := \{v \in Z_\kappa(w) \mid \text{diff}_\kappa^w(v, v_0) = 0\}.$$

Die Scheibe  $\text{Scheibe}_\kappa^w(v_1)$  ist nachfolgend auf  $\text{Scheibe}_\kappa^w(v_0)$ , wenn  $\text{diff}_\kappa^w(v_1, v_0) > 0$  und wenn für alle  $u \in Z_\kappa(w)$  entweder  $\text{diff}_\kappa^w(v_0, u) \geq 0$  oder  $\text{diff}_\kappa^w(u, v_1) \geq 0$  gilt.

Nach Lemma 5.3.2 gilt mit

$$u_1 \in \text{Scheibe}_\kappa^w(v_1) \text{ und } u_2 \in \text{Scheibe}_\kappa^w(v_2),$$

dass  $\text{diff}_\kappa^w(u_1, u_2) = \text{diff}_\kappa^w(u_1, v_1) + \text{diff}_\kappa^w(v_1, v_2) + \text{diff}_\kappa^w(v_2, u_2) = \text{diff}_\kappa^w(v_1, v_2)$ . Also ist der Begriff „nachfolgend“ wohldefiniert.

**Lemma 5.4.2** Sei  $\gamma = [1, w]$  eine Geodätische und seien  $u, v \in Z_\kappa(w)$ ,  $u', v' \in \gamma$  mit  $|v| \leq |u|$  und  $|u - v| \geq 10\delta$  und  $\max(|u - u'|, |v - v'|) \leq 2\delta$ . Dann gilt  $|v'| \leq |u'|$ .

*Beweis:* Es gilt  $|u' - v'| \geq |u - v| - |u - u'| - |v - v'| \geq 6\delta$ . Angenommen es gilt  $|v'| > |u'|$ . Dann würde sich mit  $|v' - u'| \geq 6\delta$  ergeben, dass  $|v| > |u|$ , denn  $|v| \geq |v'| - 2\delta$ ,  $|v'| \geq |u'| + 6\delta$  und  $|u'| + 2\delta \geq |u|$ . Abbildung 5.5 veranschaulicht diese Situation.  $\square$

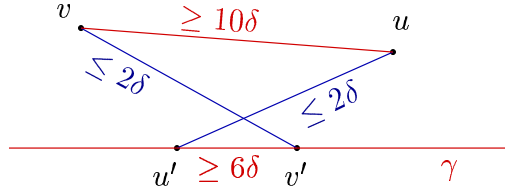


Abbildung 5.5: Skizze zum Beweis von Lemma 5.4.2

**Lemma 5.4.3** Seien  $u, v \in Z_\kappa(w)$  mit  $|v| \leq |u|$  und  $|u - v| \geq 10\delta$ . Dann gilt  $L_\kappa^w(v) \setminus L_\kappa^w(u) = \emptyset$  und  $R_\kappa^w(u) \setminus R_\kappa^w(v) = \emptyset$ .

*Beweis:* Sei  $\gamma = [1, w]$  eine Geodätische. Angenommen  $L_\kappa^w(v) \setminus L_\kappa^w(u) \neq \emptyset$ . Dann existiert ein  $x \in L_\kappa^w(v) \setminus L_\kappa^w(u)$ . Aus  $x \in L_\kappa^w(v)$  folgt  $|x| \leq |v|$  und  $|v - x| \geq 10\delta$ . Wegen  $|v| \leq |u|$  folgt aus  $x \notin L_\kappa^w(u)$ , dass  $|u - x| < 10\delta$ . Da  $x, v, u \in Z_\kappa(w)$  existieren nach Lemma 5.2.2  $x', v', u' \in \gamma$  mit  $\max(|x - x'|, |v - v'|, |u - u'|) \leq 2\delta$ . Für den Abstand zwischen  $x'$  und  $v'$  gilt  $|x' - v'| \geq |x - v| - |x - x'| - |v - v'| \geq 6\delta$  und analog zeigt man  $|v' - u'| \geq 6\delta$ . Für die Anordnung von  $x', v', u'$  auf  $\gamma$  gilt nach Lemma 5.4.2

$$|x'| \leq |v'| \leq |u'|.$$

Es gilt also  $|x' - u'| = |x' - v'| + |v' - u'| \geq 12\delta$ . Sei  $Y := [x', x] \cup [x, u] \cup [u, u']$  eine Kette mit geodätischen Gliedern. Nach Lemma 4.1.1 existiert ein Punkt  $v'' \in Y$  mit  $|v' - v''| \leq 2\delta$ . Wegen  $|x' - v'| \geq 6\delta$  und  $|v' - u'| > 6\delta$  sowie  $|x - x'| \leq 2\delta$  und  $|u' - u| \leq 2\delta$  gilt  $v'' \in [x, u]$ , da die beiden anderen Glieder der Kette zu weit entfernt sind (siehe Abbildung 5.6). Aus  $|x - u| = |x - v''| + |v'' - u| < 10\delta$  folgt nun, dass  $|x - v''| < 5\delta$  oder  $|v'' - u| < 5\delta$ .

1. Fall: Es gilt  $|x - v''| < 5\delta$ . Die Kette  $[x, v''] \cup [v'', v'] \cup [v', v]$  hat Länge  $< 9\delta$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $|x - v| \geq 10\delta$ .

2. Fall: Falls  $|v'' - u| < 5\delta$  gilt, hat die Kette  $[u, v''] \cup [v'', v'] \cup [v', v]$  eine Länge  $< 9\delta$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $|u - v| \geq 10\delta$ .

Also kann so ein  $x$  nicht existieren und es gilt  $L_\kappa^w(v) \setminus L_\kappa^w(u) = \emptyset$ . Analog zeigt man  $R_\kappa^w(u) \setminus R_\kappa^w(v) = \emptyset$ .  $\square$

**Lemma 5.4.4** Seien  $u, v \in Z_\kappa(w)$  mit  $|u - v| \geq 10\delta$ . Dann gilt  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) > 0$  genau dann, wenn  $|v| \leq |u|$ .

*Beweis:* Wenn  $|v| \leq |u|$ , dann  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) > 0$ : Mit der Konvention  $L_t = L_\kappa^w(t)$  und  $R_t = R_\kappa^w(t)$  für  $t = u, v$  gilt  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) = |L_u \setminus L_v| - |L_v \setminus L_u| + |R_v \setminus R_u| - |R_u \setminus R_v|$ .

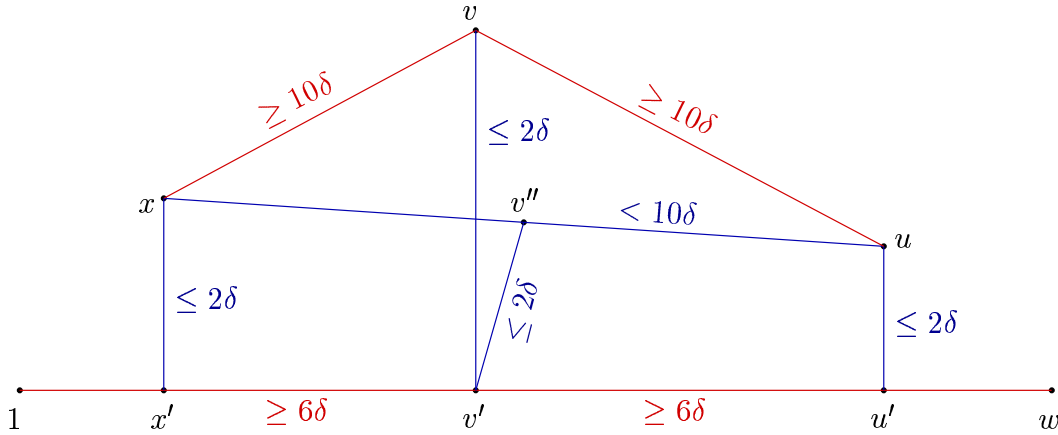


Abbildung 5.6: Skizze zum Beweis von Lemma 5.4.3

Mit Lemma 5.4.3 folgt  $|L_v \setminus L_u| = 0$  und  $|R_u \setminus R_v| = 0$ . Da  $v \in L_u \setminus L_v$  gilt  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) > 0$ .

Wenn  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) > 0$ , dann  $|v| \leq |u|$ : Angenommen es gilt  $|u| < |v|$ . Nun ist  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) > 0$  gleichbedeutend mit

$$|L_u \setminus L_v| + |R_v \setminus R_u| > |L_v \setminus L_u| + |R_u \setminus R_v|.$$

Deshalb gilt  $|L_u \setminus L_v| > 0$  oder  $|R_v \setminus R_u| > 0$ . Mit Lemma 5.4.3 folgt aber  $|L_u \setminus L_v| = 0$  und  $|R_v \setminus R_u| = 0$ , ein Widerspruch. Also gilt  $|v| \leq |u|$ .  $\square$

**Korollar 5.4.5** Wenn  $u \in \text{Scheibe}_\kappa^w(v)$ , dann  $|u - v| \leq 10\delta$ .

*Beweis:* Angenommen  $|u - v| > 10\delta$ . Mit Lemma 5.4.4 folgt dann  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) > 0$  oder  $\text{diff}_\kappa^w(v, u) > 0$ , in jedem Fall aber gilt  $\text{diff}_\kappa^w(u, v) \neq 0$  und damit  $u \notin \text{Scheibe}_\kappa^w(v)$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt  $|u - v| \leq 10\delta$ .  $\square$

**Satz 5.4.6** Wenn  $\text{Scheibe}_\kappa^w(u_1)$  nachfolgend auf  $\text{Scheibe}_\kappa^w(u_0)$  ist, dann gilt  $|u_1 - u_0| \leq 20\delta$ .

*Beweis:* Angenommen es gilt  $|u_1 - u_0| > 20\delta$ . Nach Voraussetzung ist  $\text{Scheibe}_\kappa^w(u_1)$  nachfolgend auf  $\text{Scheibe}_\kappa^w(u_0)$ , deshalb gilt  $\text{diff}_\kappa^w(u_1, u_0) > 0$ . Mit Lemma 5.4.4 folgt  $|u_1| \geq |u_0|$ . Zu beachten ist, dass alle Knoten auf einer Geodätischen  $\gamma = [1, w]$  zu  $Z_\kappa(w)$  gehören. Da  $u_0, u_1 \in Z_\kappa(w)$  existieren nach Lemma 5.2.2  $u'_0, u'_1 \in \gamma$  mit  $\max(|u_0 - u'_0|, |u_1 - u'_1|) \leq 2\delta$ . Aus Lemma 5.4.2 folgt nun  $|u'_1| \geq |u'_0|$ . Für den

Abstand zwischen  $u'_0$  und  $u'_1$  gilt  $|u'_1 - u'_0| \geq |u_1 - u_0| - |u_0 - u'_0| - |u_1 - u'_1| > 16\delta$ . Demnach existiert auf  $\gamma$  zwischen  $u'_0$  und  $u'_1$  ein Knoten  $x$  mit  $|u_0 - x| = 10\delta$  (siehe Abbildung 5.7). Da  $|u_0| \leq |u'_0| + |u_0 - u'_0| \leq |u'_0| + 2\delta$  und  $|x| = |u'_0| + |u'_0 - x| \geq$

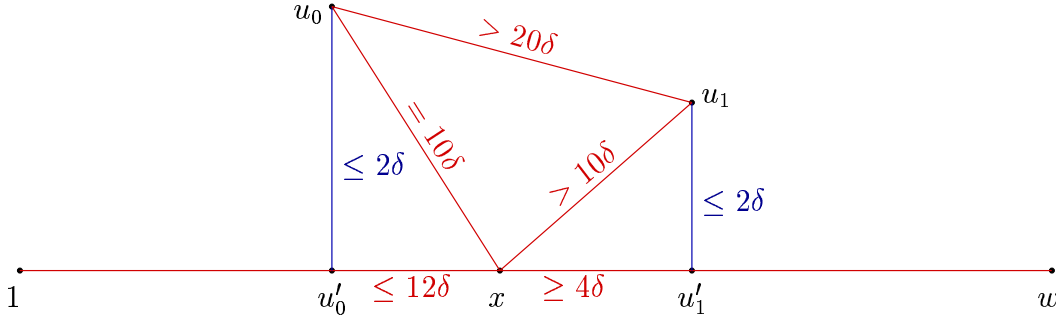


Abbildung 5.7: Skizze zum Beweis von Satz 5.4.6

$|u'_0| + (|u_0 - x| - |u_0 - u'_0|) \geq |u'_0| + 8\delta$  folgt  $|u_0| \leq |x|$ . Mit Lemma 5.4.4 ergibt sich nun  $\text{diff}_\kappa^w(x, u_0) > 0$  bzw. mit Lemma 5.3.2:

$$\text{diff}_\kappa^w(u_0, x) < 0. \quad (5.3)$$

Es gilt  $|u'_0 - x| \leq |u'_0 - u_0| + |u_0 - x| \leq 12\delta$ . Aus  $|x - u'_1| = |u'_0 - u'_1| - |u'_0 - x| \geq 16\delta - 12\delta = 4\delta$  folgt  $|x| \leq |u'_1| - 4\delta$ . Mit  $|u_1| \geq |u'_1| - 2\delta$  folgt  $|u_1| \geq |x|$ . Für den Abstand zwischen  $u_1$  und  $x$  gilt  $|u_1 - x| \geq |u_1 - u_0| - |x - u_0| > 10\delta$ . Mit Lemma 5.4.4 folgt  $\text{diff}_\kappa^w(u_1, x) > 0$  bzw. mit Lemma 5.3.2:

$$\text{diff}_\kappa^w(x, u_1) < 0. \quad (5.4)$$

Aus (5.3) und (5.4) folgt, dass Scheibe $_\kappa^w(u_1)$  nicht nachfolgend auf Scheibe $_\kappa^w(u_0)$  ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt  $|u_1 - u_0| \leq 20\delta$ .  $\square$

## 5.5 Konstruktion der Kanonischen Repräsentation

**Definition 5.5.1** Sei  $K_{10\delta} := \{u \in X \mid |u| \leq 10\delta\}$ . Zu  $A \subseteq X$ ,  $|A|$  endlich, bezeichnet  $G_A$  den vollständigen gerichteten Graphen über den Knoten aus  $A$  und sei jede Kante  $(v_1, v_2)$  mit dem Gruppenelement  $g$  gefärbt, für das  $v_2 = v_1 g$  gilt. Für  $A, B \subseteq X$  sind  $G_A$  und  $G_B$  äquivalent, wenn ein farberhaltender Isomorphismus zwischen beiden Graphen existiert. Jede Äquivalenzklasse solcher Graphen ( $\subseteq K_{10\delta}$ ) wird Atom genannt.



Nach Korollar 5.4.5 ist jede Scheibe in einer Kugel mit Radius  $10\delta$  enthalten. Deshalb existiert zu jeder Scheibe genau ein passendes Atom, welches  $G_{\text{Scheibe}}$  enthält (jede Scheibe  $\overset{w}{\kappa}(v)$  lässt sich durch Multiplikation mit  $v^{-1}$  von links in die Kugel  $K_{10\delta}$  verschieben). Sei  $S = \{v^{-1}x \mid x \in \text{Scheibe}(v)\}$ . Dann ist  $G_S$  äquivalent zu  $G_{\text{Scheibe}(v)}$ .

**Lemma 5.5.2** *Für keinen Repräsentanten eines Atoms existiert ein nicht-trivialer, farberhaltender Automorphismus.*

*Beweis:* Sei  $A$  ein Repräsentant eines Atoms und  $\varphi : A \rightarrow A$  ein nicht-trivialer, farberhaltender Automorphismus. Da  $A$  endlich ist, existiert ein  $n \geq 2$  mit  $\varphi^n = \text{id}$  und ein  $x \in A$  mit  $x \neq \varphi(x)$ . Sei  $g$  die Färbung der Kante  $(x, \varphi(x))$ , d.h.  $\varphi(x) = xg$  und  $\varphi^n(x) = xg^n = x$ . Daraus folgt  $g^n = 1$ . Da  $g \neq 1$  und  $n \geq 2$  hätte die Gruppe damit Torsion im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $G$  torsionsfrei sein soll.  $\square$

**Definition 5.5.3** *Für jeden Repräsentanten eines Atoms wählen wir einen (willkürlichen) Knoten aus, den man Zentrum des Atoms nennt. Sei  $R$  der Repräsentant des Atoms, in dem auch  $G_{\text{Scheibe}}$  liegt und sei  $r$  das Zentrum von  $R$ . Aufgrund von Definition 5.5.1 existiert ein farberhaltender Isomorphismus  $\varphi : R \rightarrow G_{\text{Scheibe}}$ . Das Zentrum von Scheibe wird definiert als  $z(\text{Scheibe}) := \varphi(r)$ .*

Das Zentrum einer Scheibe ist also derjenige Knoten in  $X$ , der in  $G_{\text{Scheibe}}$  dem Zentrum des Atoms entspricht.

Die Abbildung  $z(\text{Scheibe})$  ist nach Lemma 5.5.2 wohldefiniert. Dies ist die einzige Stelle, an der man die Torsionsfreiheit von  $G$  direkt verwendet. Sie ist notwendig, damit man das Zentrum einer Scheibe „wiedererkennen“ kann.

**Definition 5.5.4** *Für jeden Knoten  $x$  des Cayley-Graphen  $X$  mit  $|x| \leq 20\delta$  sei der Schritt von  $x$ ,  $\text{sch}(x)$ , ein Element der freien Gruppe  $F(g_1, \dots, g_n)$  über den Erzeugern von  $G$ , das einer Geodätischen von 1 zu  $x$  entspricht. Die Menge der Schritte wird so gewählt, dass stets gilt:*

$$\begin{aligned} |\text{sch}(x)| &= |x| \\ \text{sch}(x)^{-1} &= \text{sch}(x^{-1}) \end{aligned}$$

**Definition 5.5.5** *Sei  $w \in G$  und sei  $\kappa$  ein Maßstab. Weiter sei*

$$\text{Scheibe}_{\kappa}^w(v_1), \dots, \text{Scheibe}_{\kappa}^w(v_{\nu(w)})$$

die Folge der aufeinander nachfolgenden Scheiben des  $\kappa$ -Zylinders  $Z_\kappa(w)$ , insbesondere gilt  $\text{Scheibe}_\kappa^w(v_1) = \text{Scheibe}_\kappa^w(1)$  und  $\text{Scheibe}_\kappa^w(v_{\nu(w)}) = \text{Scheibe}_\kappa^w(w)$ . Die kanonische Repräsentation  $\theta_\kappa(w)$  von  $w$  mit Maßstab  $\kappa$  in der freien Gruppe  $F(g_1, \dots, g_n)$  wird definiert durch

$$\begin{aligned} \theta_\kappa(w) = & \text{sch}(z(\text{Scheibe}_\kappa^w(v_1))) \\ & \cdot \left( \prod_{i=2}^{\nu(w)} \text{sch}(z(\text{Scheibe}_\kappa^w(v_{i-1}))^{-1} z(\text{Scheibe}_\kappa^w(v_i))) \right) \\ & \cdot \text{sch}(z(\text{Scheibe}_\kappa^w(\nu(w)))^{-1} w). \end{aligned}$$

Abbildung 5.8 veranschaulicht die Konstruktion der kanonischen Repräsentation.

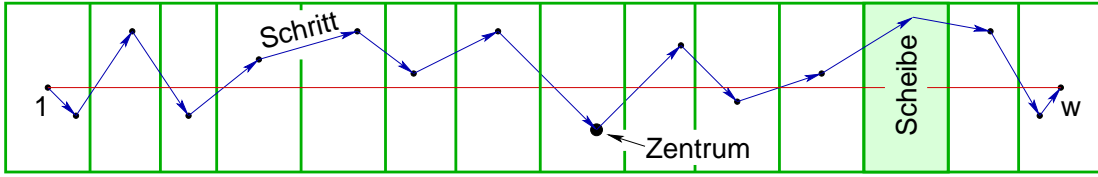


Abbildung 5.8: Kanonische Repräsentation von  $w$

Wegen Satz 5.4.6 ist die Entfernung zwischen den Zentren aufeinander nachfolgender Scheiben nicht länger als  $20\delta$ , deshalb sind bei der Definition von  $\theta_\kappa(w)$  alle „Teilschritte“ definiert. Wegen Lemma 5.2.2 und der zweiten Eigenschaft der Schritte gilt  $\theta_\kappa(w)^{-1} = \theta_\kappa(w^{-1})$ . Klar ist auch, dass der natürliche Homomorphismus  $F(g_1, \dots, g_n) \rightarrow G$  das Element  $\theta_\kappa(w) \in F(g_1, \dots, g_n)$  auf  $w \in G$  abbildet.

**Satz 5.5.6** Seien  $w_1, w_2, w_3 \in G$  mit  $w_1 w_2 w_3 = 1$  und seien  $Z_\kappa(w_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , ihre Zylinder mit Maßstab  $\kappa$ . Seien  $r_1, r_2, r_3$  nicht negative reelle Zahlen mit  $r_1 + r_2 \leq |w_1|$ ,  $r_2 + r_3 \leq |w_2|$  und  $r_1 + r_3 \leq |w_3|$ . Wenn gilt

$$\begin{aligned} Z_\kappa(w_1) \cap K_{r_1} &= Z_\kappa(w_3^{-1}) \cap K_{r_1}, \\ Z_\kappa(w_2) \cap K_{r_2} &= Z_\kappa(w_1^{-1}) \cap K_{r_2}, \\ Z_\kappa(w_3) \cap K_{r_3} &= Z_\kappa(w_2^{-1}) \cap K_{r_3} \end{aligned}$$

dann existieren  $y_1, y_2, y_3, c_1, c_2, c_3 \in F(g_1, \dots, g_n)$  mit

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \theta_\kappa(w_1) &= y_1 c_1 y_2^{-1}, \\ \theta_\kappa(w_2) &= y_2 c_2 y_3^{-1}, \end{aligned}$$

- $\theta_\kappa(w_3) = y_3 c_3 y_1^{-1}$ ,  
 ②  $c_1 c_2 c_3 = 1$  in  $G$ ,  
 ③  $|c_i| \leq (|w_i| - (r_i + r_{i+1}) + 40\delta) \cdot |K_{2\delta}| \cdot 20\delta$   
 für  $1 \leq i \leq 3$  und mit  $r_4 = r_1$ .

Abbildung 5.9 zeigt grob, welchen Effekt die Abbildung  $\theta_\kappa$  hat.

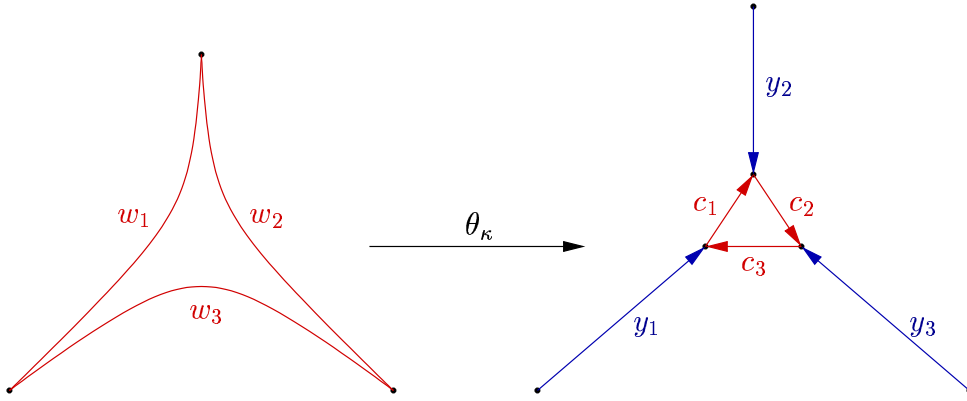


Abbildung 5.9: Die Wirkung von  $\theta_\kappa$

*Beweis:* Betrachten wir zunächst die Mitglieder  $u$  aus  $K_{r_1-20\delta} \cap Z_\kappa(w_1)$  und wegen  $Z_\kappa(w_1) \cap K_{r_1} = Z_\kappa(w_3^{-1}) \cap K_{r_1}$  folgt, dass gilt  $M := \{u' \in Z_\kappa(w_1) \mid |u' - u| \leq 20\delta\} = \{u' \in Z_\kappa(w_3^{-1}) \mid |u' - u| \leq 20\delta\}$ . Wenn  $v \in \text{Scheibe}_\kappa^{w_1}(u)$ , dann gilt nach Korollar 5.4.5  $|v - u| \leq 10\delta$ . Deshalb gelten sowohl für  $s = w_1$  als auch für  $s = w_3^{-1}$  folgende Teilmengenbeziehungen:

$$\begin{aligned}
 L_\kappa^s(u) \setminus L_\kappa^s(v) &\subseteq M, \\
 L_\kappa^s(v) \setminus L_\kappa^s(u) &\subseteq M, \\
 R_\kappa^s(v) \setminus R_\kappa^s(u) &\subseteq M, \\
 R_\kappa^s(u) \setminus R_\kappa^s(v) &\subseteq M,
 \end{aligned}$$

da z.B. alle Knoten in  $Z_\kappa(s)$ , die „rechts“ von  $M$  sind nach der Dreiecksungleichung sowohl zu  $R_\kappa^s(u)$  als auch zu  $R_\kappa^s(v)$  gehören. Deshalb ist sowohl  $\text{diff}_\kappa^{w_1}(u, v)$  als auch  $\text{diff}_\kappa^{w_3^{-1}}(u, v)$  vollständig durch  $M$  bestimmt und es gilt  $\text{diff}_\kappa^{w_1}(u, v) = \text{diff}_\kappa^{w_3^{-1}}(u, v) = 0$ , also ist  $v \in \text{Scheibe}_\kappa^{w_3^{-1}}(u)$  und es ergibt sich  $\text{Scheibe}_\kappa^{w_3^{-1}}(u) = \text{Scheibe}_\kappa^{w_1}(u)$ . Das zeigt, dass die Scheiben von  $Z_\kappa(w_i)$  und  $Z_\kappa(w_{i-1}^{-1})$  innerhalb von  $K_{r_i-20\delta}$  für  $1 \leq i \leq 3$  und  $w_0^{-1} = w_3^{-1}$  übereinstimmen.

Da nach Lemma 5.2.2 alle Mitglieder höchstens  $2\delta$  von jeder Geodätischen  $[1, w_i]$  entfernt sind, werden bei  $Z_\kappa(w_i)$  somit maximal  $(|w_i| - (r_1 + r_{i+1}) + 40\delta) \cdot |K_{2\delta}|$  Mitglieder nicht betrachtet. Jede Scheibe enthält mindestens ein Mitglied und ein Schritt zwischen zwei Scheiben ist beschränkt durch  $20\delta$ . Also gilt  $|c_i| \leq (|w_i| - (r_i + r_{i+1} + 40\delta) \cdot |K_{2\delta}| \cdot 20\delta$ . Damit sind ein Teil ① und ③ bewiesen. ② gilt, weil  $c_1 c_2 c_3$  im Zentrum derselben Scheibe beginnt und endet.  $\square$



# Kapitel 6

## Wortgleichungen

### 6.1 Die mut-Zerlegung

**Konstruktion 6.1.1** Seien  $w_1, w_2, w_3 \in G$  mit  $w_1 w_2 w_3 = 1$  und seien  $\gamma_1 = [id, w_1], \gamma_2 = [w_1, w_1 w_2]$  und  $\gamma_3 = \gamma_3 = [w_1 w_2, w_1 w_2 w_3]$  Geodätische in  $X$ . Auf  $\gamma_1$  existiert ein Knoten  $g_1$  mit  $d(g_1, \gamma_2) \leq \delta$  und  $d(g_1, \gamma_3) \leq \delta + 1$ . (Wenn man alle Knoten auf  $\gamma_1$  von  $id$  zu  $w_1$  betrachtet, ist  $g_1$  der erste mit  $d(g_1, \gamma_2) \leq \delta$ ). Seien  $g_2 \in \gamma_2$  und  $g_3 \in \gamma_3$  mit  $|g_1 - g_2| \leq \delta$  und  $|g_1 - g_3| \leq \delta + 1$ . Es gilt dann

$$|g_2 - g_3| \leq 2\delta + 1 \quad (6.1)$$

Sei  $d_1 := \min(|w_1 - g_1|, |w_1 - g_2|) - 2\delta$ ,  $d_2 := \min(|w_1 w_2 - g_2|, |w_1 w_2 - g_3|) - (3\delta + 1)$  und  $d_3 := \min(|1 - g_1|, |1 - g_3|) - (2\delta + 1)$ . Falls  $d_a$  für  $1 \leq a \leq 3$  negativ ist, setzt man  $d_a := 0$ . Zu beachten ist, dass oben die beiden Argumente von  $\min$  wegen (6.1) maximal  $2\delta + 1$  auseinanderliegen. Seien  $m_1, m_2, m_3, u_1, u_2, u_3, t_1, t_2, t_3 \in G$  mit

- ①  $m_a u_a t_a = w_a$  für  $1 \leq a \leq 3$ ,
- ②  $m_1, m_1 u_1 \in \gamma_1$ ,  
 $w_1 m_2, w_1 m_2 u_2 \in \gamma_2$ ,  
 $w_1 w_2 m_3, w_1 w_2 m_3 u_3 \in \gamma_3$ ,
- ③  $|t_a| = |m_{a+1}| = d_a$  für  $1 \leq a \leq 3$  und mit  $m_4 = m_1$ .

Abbildung 6.1 veranschaulicht diese Konstruktion. Sei  $\tau_1 := [1, m_1] \subseteq \gamma_1$  und  $\tau_3 := [1, t_3^{-1}] \subseteq \gamma_3$ . Wenn man das Dreieck mit den Ecken  $1, g_1, g_3$  betrachtet, sieht man, dass  $\tau_1 \subseteq K_\delta(\gamma_3)$  und  $\tau_3 \subseteq K_\delta(\gamma_1)$ , da alle Punkte auf  $\tau_1$  und  $\tau_3$  mindestens die Entfernung  $\delta$  von der Seite  $[g_1, g_2]$  des Dreiecks haben. Analog kann man für

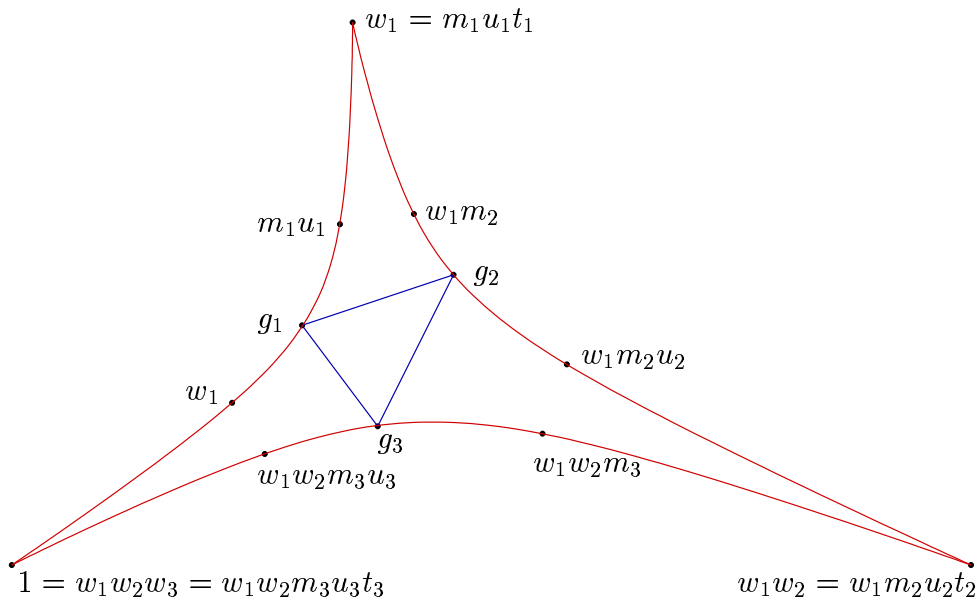


Abbildung 6.1: mut-Zerlegung

die beiden anderen Ecken  $w_1$  und  $w_1w_2$  schließen. Die Anfangsstücke an den Ecken liegen also immer nah bei einander (maximal  $\delta$  entfernt und die Teile dazwischen, auf die das nicht zutrifft, sind in der Länge durch  $8\delta + 4$  beschränkt (siehe die Definition der  $d_a$ 's). Eine solche Zerlegung der  $w_a$  in die Teile  $m_a u_a t_a$  sei eine mut-Zerlegung von  $w_1w_2w_3 = 1$ .

Die mut-Zerlegung von  $w$  hängt damit nicht nur von  $w$  selbst ab, sondern auch von dem Dreieck, in dem man  $w$  gerade betrachtet. Deshalb wendet man die mut-Zerlegung nur auf ganze Dreiecke an.

## 6.2 Anwendung der kanonischen Repräsentation

**Definition 6.2.1** Sei  $\nu$  eine Geodätische im Cayley-Graph  $X$ . Eine Geodätische in der  $2\delta$ -Umgebung von  $\nu$  die nicht kürzer als  $\nu$  ist, wird Kanal von  $\nu$  genannt. Die  $\mu_0$ -Kapazität von  $X$ ,  $\text{Ka}(\mu_0)$ , sei die maximale Anzahl verschiedener Kanäle einer Geodätischen mit Länge  $\mu_0$ . Eine (sehr) grobe obere Schranke für  $\text{Ka}(\mu_0)$  ist  $2^{\lfloor K_{2\delta} \cdot \mu_0 \rfloor}$ , was der maximalen Anzahl von Teilmengen von Knoten aus der  $2\delta$ -Umgebung einer Geodätischen mit Länge  $\mu_0$  entspricht.

**Definition 6.2.2** Sei  $\Phi$  ein trianguliertes Gleichungssystem mit  $q$  Dreiecksgleichungen, dann definiert man

$$\begin{aligned}\sigma(\Phi) &:= 12 \cdot \text{Ka}(\mu_0) \cdot (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta) \cdot q + 1, \\ \kappa_1 &:= 2\mu_0 + 7(\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta), \\ \kappa_n &:= \kappa_{n-1} + \varepsilon(\lambda_0) + 5\delta \quad \text{für } 2 \leq n \leq \sigma(\Phi), \\ \text{damit ist } \kappa_{\sigma(\Phi)} &= 2\mu_0 + (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta)(\sigma(\Phi) + 6) \\ \text{bp} &:= 3\kappa_{\sigma(\Phi)} + 4\delta + 2\mu_0 + 4(\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta).\end{aligned}$$

Sei die  $j$ -te Gleichung von  $\Phi$  gegeben durch  $z_{i(j,1)}z_{i(j,2)}z_{i(j,3)} = 1$  und sei  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_l)$  eine Lösung von  $\Phi$ ; es gilt also insbesondere  $w_{i(j,1)}w_{i(j,2)}w_{i(j,3)} = 1$ . Sei

$$w_{i(j,a)} = m_{i(j,a)}^j u_{i(j,a)}^j t_{i(j,a)}^j$$

für  $1 \leq a \leq 3$  die mut-Zerlegung dieses Dreiecks (siehe 6.1.1).

**Satz 6.2.3** Sei  $j$  der Index einer Gleichung aus  $\Phi$ , sei  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_l)$  eine Lösung von  $\Phi$  und sei  $r_1 := |m_{i(j,1)}^j| - \text{bp}$ . Dann gilt für alle  $n$  ( $1 \leq n \leq \sigma(\Phi)$ ) außer höchstens  $4 \cdot \text{Ka}(\mu_0) \cdot (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta)$ , dass

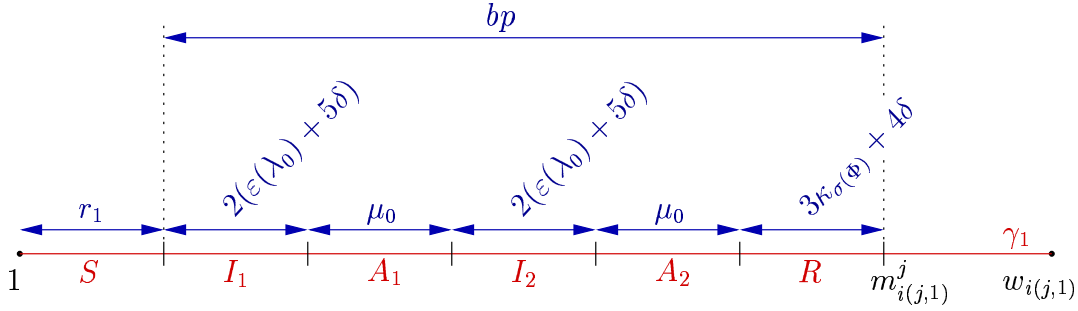
$$Z_{\kappa_n}(w_{i(j,1)}) \cap K_{r_1} = Z_{\kappa_n}(w_{i(j,3)}^{-1}) \cap K_{r_1}. \quad (6.2)$$

*Beweis:* Zunächst einige Definitionen:  $\gamma_1 := [1, w_{i(j,1)}]$  sei eine Geodätische, welche die Punkte  $m_{i(j,1)}^j$  und  $m_{i(j,1)}^j u_{i(j,1)}^j$  enthält und  $\gamma_3 := [1, w_{i(j,3)}^{-1}]$  sei eine Geodätische, die  $(t_{i(j,3)}^j)^{-1}$  und  $(t_{i(j,3)}^j)^{-1}(u_{i(j,3)}^j)^{-1}$  enthält. Weiter sei  $\tau_1 := [1, m_{i(j,1)}^j] \subseteq \gamma_1$ . Da  $K_{r_1} = \emptyset$  für  $|m_{i(j,1)}^j| < \text{bp}$ , sei also o.B.d.A.  $|m_{i(j,1)}^j| \geq \text{bp}$ . Wir teilen  $\tau_1$  in die aufeinanderfolgenden Stücke  $S$  (Schnitt),  $I_1$  (erster Isolator),  $A_1$  (erste Ader),  $I_2$  (zweiter Isolator),  $A_2$  (zweite Ader) und  $R$  (Rest); für die Längen dieser Stücke gilt:

$$\begin{aligned}\text{Länge}(S) &= r_1 \\ \text{Länge}(I_1) &= \text{Länge}(I_2) = 2(\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta) \\ \text{Länge}(A_1) &= \text{Länge}(A_2) = \mu_0 \\ \text{Länge}(R) &= 3\kappa_{\sigma(\Phi)} + 4\delta.\end{aligned}$$

Außerdem wird definiert  $Z_n^1 := Z_{\kappa_n}(w_{i(j,1)}) \cap K_{r_1}$  und  $Z_n^3 := Z_{\kappa_n}(w_{i(j,3)}^{-1}) \cap K_{r_1}$ . Jedes Mitglied  $x_n$  von  $Z_n^1$  wird abhängig von der Existenz zweier  $\kappa_n$ -Fastlokalgeodätischer gewählt. Als Zeugen  $\beta_n : [a, b] \rightarrow X$  von  $x_n$  bezeichnen wir diejenige von



Abbildung 6.2: Aufteilung von  $\tau_1$ 

beiden mit  $\beta_n(a) = x_n$  und  $\beta_n(b) = w_{i(j,1)}$ . Aufgrund der Wahl von  $I_1$ ,  $A_1$ ,  $I_2$  und  $A_2$  und wegen  $\kappa_n \geq 2\mu_0 + 7(\epsilon(\lambda_0) + 5\delta)$  belegt jeder Zeuge einen der Kanäle von  $A_1$  oder einen der Kanäle von  $A_2$  (siehe Definition 6.2.1), denn ein Teilstück  $\beta'$  von  $\beta_n$ , das weiter als  $2\delta$  von  $\gamma_1$  entfernt ist, hat höchstens die Länge  $2\delta(2(\epsilon(\lambda_0) + 3\delta))$ : Länge einer Brücke und an jeder Seite der Brücke folgt der Abstand aus Lemma 5.1.2. Auf den Seiten von  $\beta'$  befinden sich Stücke, die  $\mu_0$ -lokalgeodätisch sind und mindestens die Länge  $2\mu_0 + 5(\epsilon(\lambda_0) + 5\delta)$  besitzen. Seien  $\kappa_{n_1}$  und  $\kappa_{n_2}$  zwei verschiedene Maßstäbe, für welche Knoten  $x_{n_1} \in Z_{n_1}^1 \setminus Z_{n_1}^3$  und  $x_{n_2} \in Z_{n_2}^1 \setminus Z_{n_2}^3$  existieren. Insbesondere gilt (6.2) für diese Maßstäbe nicht. O.B.d.A. sei  $n_1 < n_2$ . Seien  $\beta_{n_1}$  und  $\beta_{n_2}$  die Zeugen von  $x_{n_1}$  und  $x_{n_2}$  und angenommen, sie belegen den selben Kanal  $W$  von  $A_2$ . Seien  $\nu_1$  und  $\nu_2$  die Sublokalgeodätischen von  $\beta_{n_1}$  und  $\beta_{n_2}$ , die durch  $W$  verlaufen und seien  $\ddot{u}_1$  und  $\ddot{u}_2$  (der Überschuss) die Längen der Teilstücke von  $\nu_1$  und  $\nu_2$  nach dem durchlaufen von  $W$ . Dann gilt

- ①  $\ddot{u}_1 < \kappa_{n_1}$  und  $\ddot{u}_2 < \kappa_{n_2}$
- ②  $\ddot{u}_2 < \ddot{u}_1$
- ③  $|\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2| < \epsilon(\lambda_0) + 5\delta$ .

Zu ① : Angenommen  $\ddot{u}_1 \geq \kappa_{n_1}$ , dann ist  $\text{Länge}(\nu_1) \geq \mu_0 + \kappa_{n_1}$ . Man kann nun  $\beta_{n_1}$  verbiegen, indem man auf  $\nu_1$  nur eine Strecke der Länge  $\kappa_{n_1} + 2\delta$  durchläuft und dann eine Brücke zu  $\tau_1$  einfügt und auf diese Weise zu  $m_{i(j,1)}^j$  gelangt. Analog kann man auf  $\tau_1$  nach einer Strecke der Länge  $\kappa_{n_1} + 2\delta$  eine Brücke zu  $\gamma_3$  einfügen; aufgrund der Konstruktion 6.1.1 der mut-Zerlegung ist dies mit einer Brücke möglich, die nicht länger als  $2\delta$  sein muss (siehe Abbildung 6.3). Nach Lemma 5.1.3 sind diese veränderten Pfade alle  $\kappa_{n_1}$ -fastlokalgeodätisch. Daraus folgt  $x_{n_1} \in Z_{n_1}^3$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung; also gilt  $\ddot{u}_1 < \kappa_{n_1}$ . Analog zeigt man  $\ddot{u}_2 < \kappa_{n_2}$ .

Zu ② : Angenommen  $\ddot{u}_2 \geq \ddot{u}_1$ . Wieder lässt sich  $\beta_{n_1}$  verbiegen. Nach dem durchlaufen von  $W$  kann man auf  $\beta_{n_2}$  (insbesondere auf  $\nu_2$ ) fortfahren. Da  $\kappa_{n_1} \leq$

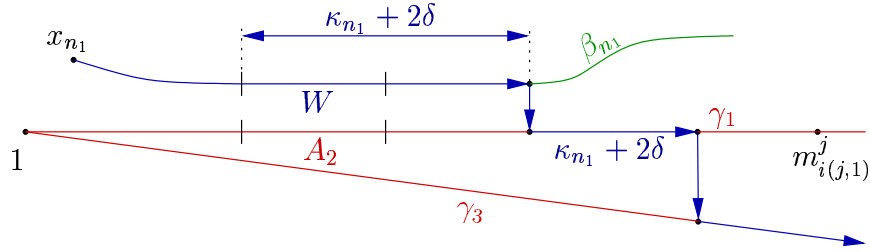


Abbildung 6.3: Verbiegen von  $\beta_{n_1}$  falls  $\ddot{u}_1 \geq \kappa_{n_1}$

$\kappa_{n_2} - (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta)$ , kann man auf  $\beta_{n_2}$  auf der nächsten Sublokalgeodätischen, die  $\nu_2$  folgt (nach der nächsten Brücke) eine Strecke der Länge  $\kappa_{n_1} + 2\delta$  durchlaufen und dann eine Brücke zu  $\tau_1$  anfügen und erhält so eine  $\kappa_{n_1}$ -Fastlokalgeodätische (Lemma 5.1.3) von  $x_{n_1}$  zu  $m_{i(j,1)}^j$ . Analog kann man auf  $\tau_1$  nach einer Strecke der Länge  $\kappa_{n_1} + 2\delta$  wieder eine Brücke zu  $\gamma_3$  einfügen. Abbildung 6.4 veranschaulicht die Situation. Zu beachten ist, dass wegen ① :  $\ddot{u}_2 < \kappa_{n_2}$  die Länge von  $R$  aus-

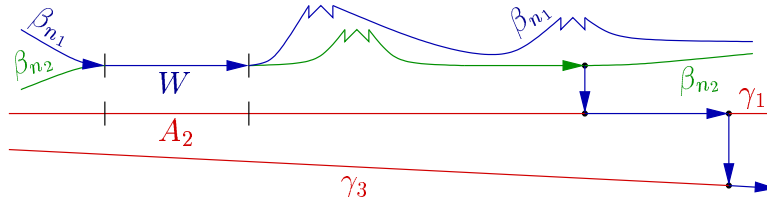


Abbildung 6.4: Verbiegen von  $\beta_{n_1}$  falls  $\ddot{u}_2 \geq \ddot{u}_1$

reicht. Daraus folgt wieder  $x_{n_1} \in Z_{n_1}^3$  im Widerspruch zur Voraussetzung; also gilt  $\ddot{u}_2 < \ddot{u}_1$ .

Zu ③ : Angenommen  $\ddot{u}_2 \leq \ddot{u}_1 - (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta)$ . Diesmal lässt sich  $\beta_{n_2}$  verbiegen. Nach dem Durchlaufen von  $W$  kann man auf  $\nu_1$  mit einer Länge von  $\ddot{u}_2 + 2\delta$  fortfahren und dann eine Brücke zu  $\tau_1$  anfügen; von  $\tau_1$  aus kann man nach einer Strecke der Länge  $\kappa_{n_2} + 2\delta$  wie in Abbildung 6.5 angedeutet eine weitere Brücke zu  $\gamma_3$  einfügen und mit Lemma 5.1.3 folgt  $x_{n_2} \in Z_{n_1}^3$ , ein Widerspruch. Also gilt  $\ddot{u}_2 > \ddot{u}_1 + \varepsilon(\lambda_0) + 5\delta$ .

Aus ② und ③ folgt, dass höchstens  $\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta$  verschiedene Maßstäbe  $\kappa$  existieren, für die es Knoten in  $Z_\kappa^1 \setminus Z_\kappa^3$  mit Zeugen gibt, welche denselben Kanal von  $A_2$  belegen. Da die Anzahl der Kanäle durch  $\text{Ka}(\mu_0)$  beschränkt ist, und weil man für  $A_1$  gleich argumentieren kann, folgt, dass für höchstens  $2 \cdot \text{Ka}(\mu_0) \cdot (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta)$  verschiedene Maßstäbe  $\kappa$  gilt, dass  $Z_\kappa^1 \setminus Z_\kappa^3 \neq \emptyset$ . Analog gilt für höchstens

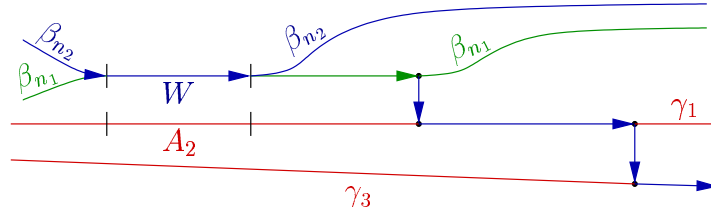


Abbildung 6.5: Verbiegen von  $\beta_{n_2}$  falls  $\ddot{u}_2 \leq \ddot{u}_1 - (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta)$

$2 \cdot \text{Ka}(\mu_0) \cdot (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta)$  verschiedene Maßstäbe  $\kappa$ , dass  $Z_\kappa^3 \setminus Z_\kappa^1 \neq \emptyset$  ist. Insgesamt ergibt sich, dass für höchstens  $2 \cdot 2 \cdot \text{Ka}(\mu_0) \cdot (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta)$  verschiedene Maßstäbe  $\kappa$  gilt, dass  $Z_\kappa^1 \neq Z_\kappa^3$ .  $\square$

**Korollar 6.2.4** Sei  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_l)$  eine Lösung von  $\Phi$  und sei  $r_a^j := |m_{i(j,a)}^j| - \text{bp}$  für  $1 \leq a \leq 3$ . Dann existiert ein Maßstab  $\kappa_{n_0}$  ( $1 \leq n_0 \leq \sigma(\Phi)$ ) mit dem für alle  $j = 1, \dots, q$  gilt:

- ①  $Z_{\kappa_{n_0}}(w_{i(j,1)}) \cap K_{r_1^j} = Z_{\kappa_{n_0}}(w_{i(j,3)}^{-1}) \cap K_{r_1^j}$
- ②  $Z_{\kappa_{n_0}}(w_{i(j,2)}) \cap K_{r_2^j} = Z_{\kappa_{n_0}}(w_{i(j,1)}^{-1}) \cap K_{r_2^j}$
- ③  $Z_{\kappa_{n_0}}(w_{i(j,3)}) \cap K_{r_3^j} = Z_{\kappa_{n_0}}(w_{i(j,2)}^{-1}) \cap K_{r_3^j}$ .

*Beweis:* Wende Satz 6.2.3 für jede der  $q$  Gleichungen und für jede zyklische Vertauschung davon an (z.B.  $w_{i(j,2)}w_{i(j,3)}w_{i(j,1)} = 1$  usw.). Dann gilt für höchstens  $3 \cdot 4 \cdot \text{Ka}(\mu_0) \cdot (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta) \cdot q$  Maßstäbe, dass die Aussage des Korollars nicht erfüllt ist und da  $\sigma(\Phi) > 3 \cdot 4 \cdot \text{Ka}(\mu_0) \cdot (\varepsilon(\lambda_0) + 5\delta) \cdot q$  existiert  $n_0 \in \{1, \dots, \sigma(\Phi)\}$  mit obiger Eigenschaft.  $\square$

**Korollar 6.2.5** Seien die Voraussetzungen von Korollar 6.2.4 erfüllt, dann existieren  $y_a^j, c_a^j \in F(g_1, \dots, g_n)$  für  $1 \leq j \leq q$  und  $1 \leq a \leq 3$  mit

- ①  $\theta_{\kappa_{n_0}}(w_{i(j,1)}) = y_1^j c_1^j (y_2^j)^{-1}$   
 $\theta_{\kappa_{n_0}}(w_{i(j,2)}) = y_2^j c_2^j (y_3^j)^{-1}$   
 $\theta_{\kappa_{n_0}}(w_{i(j,3)}) = y_3^j c_3^j (y_1^j)^{-1}$
- ②  $c_1^j c_2^j c_3^j = 1$  in  $G$
- ③  $|c_a^j| \leq (2\text{bp} + 8\delta + 4 + 40\delta) \cdot |K_{2\delta}| \cdot 20\delta$ .

*Beweis:* Da die Zylinder nach Korollar 6.2.4 übereinstimmen, erhalten wir die Eigenschaften der kanonischen Repräsentation durch Satz 5.5.6. Zu bemerken ist noch, dass der Term  $8\delta + 4$  im Teil ③ die maximale Länge des  $u$ -Teils der mut-Zerlegung ist (Konstruktion 6.1.1).  $\square$

## 6.3 Lösen von Gleichungssystemen

Sei  $\Phi = \{\phi_j = 1\}_{j=1}^q$  ein trianguliertes Gleichungssystem mit  $q$  Gleichungen über  $G$ , d.h.  $\phi_j = z_{i(j,1)}z_{i(j,2)}z_{i(j,3)}$  mit  $\vec{z} = (z_1, \dots, z_l) = (x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_l)$ , wobei  $x_1, \dots, x_k$  die Unbekannten und  $a_1, \dots, a_l$  die Koeffizienten sind. Das Ziel ist nun die Konstruktion eines Gleichungssystems  $\Psi = \{\psi_j^1 = 1, \psi_j^2 = 1, \psi_j^3 = 1\}_{j=1}^q$  über  $F(g_1, \dots, g_n)$ , welches genau dann lösbar sein soll, wenn  $\Phi$  lösbar ist.

Das Gleichungssystem  $\Psi$  entsteht dadurch, dass aus jeder Gleichung in  $\Phi$  drei Gleichungen in  $\Psi$  gebildet werden. Wenn die Gleichung  $\phi_j$  aus  $\Phi$  gegeben ist durch

$$z_{i(j,1)}z_{i(j,2)}z_{i(j,3)} = 1,$$

dann werden daraus die Gleichungen

$$\begin{aligned}\theta_{\kappa_{n_0}}(z_{i(j,1)}) &= y_1^j c_1^j (y_2^j)^{-1} \\ \theta_{\kappa_{n_0}}(z_{i(j,2)}) &= y_2^j c_2^j (y_3^j)^{-1} \\ \theta_{\kappa_{n_0}}(z_{i(j,3)}) &= y_3^j c_3^j (y_1^j)^{-1}\end{aligned}$$

in  $\Psi$  erzeugt, wobei für alle Unbekannten  $x_i$  gelten soll, dass  $\theta_{\kappa_{n_0}}(x_i) = x_i$ . Dabei seien  $y_1^j, y_2^j, y_3^j$  neue Unbekannte und  $c_1^j, c_2^j, c_3^j$  seien neue Koeffizienten für die  $c_1^j c_2^j c_3^j = 1$  in  $G$  gelten soll und deren Länge durch  $(2\text{bp} + 8\delta + 4 + 40\delta) \cdot |K_{2\delta}| \cdot 20\delta$  beschränkt sei. Damit gilt beispielsweise  $\psi_j^1 = \theta_{\kappa_{n_0}}(z_{i(j,1)}^{-1}) y_1^j c_1^j (y_2^j)^{-1}$ , analog für  $\psi_j^2$  und  $\psi_j^3$ .

Zunächst kann man unabhängig von der Eingabe alle Atome (Definition 5.5.1) berechnen, die Zentren der Atome (Definition 5.5.3) und die Schritte (wie in Definition 5.5.4 verlangt) wählen.

Um für die Koeffizienten  $a_i, 1 \leq i \leq m$ , die kanonische Repräsentation  $\theta_{\kappa_{n_0}}(a_i)$  zu berechnen, rät man den Zylinder  $Z_{\kappa_{n_0}}(a_i)$  als Teilmenge von  $K_{2\delta}([1, a_i])$ , welche die Geodätische  $[1, a_i]$  enthält. Die Anzahl der Elemente in  $K_{2\delta}([1, a_i])$  ist beschränkt durch  $|K_{2\delta}| \cdot |a_i|$ . Die Geodätische  $[1, a_i]$  lässt sich aufgrund von Korollar 3.3.2 berechnen. Wenn man nun den Zylinder hat, kann man für je zwei Knoten die Funktion  $\text{diff}$  berechnen, den Zylinder in Scheiben „schneiden“, die Zentren der Scheiben ermitteln und diese mit Schritten verbinden (vgl. Kapitel 5).

Ebenso muss man die Tripel  $(c_1^j, c_2^j, c_3^j)$  mit  $|c_i| \leq (2\text{bp} + 8\delta + 4 + 40\delta) \cdot |K_{2\delta}| \cdot 20\delta, 1 \leq i \leq 3$  geeignet raten. Zu beachten ist, dass die Schranke für die Länge der  $c_i$  linear von der Anzahl der Gleichung in  $\Phi$  abhängt. Mit Korollar 3.3.3 lässt sich für jedes Tripel  $(c_1, c_2, c_3) \in (\Gamma^*)^3$  mit polynomiellem Platz entscheiden, ob  $c_1 c_2 c_3 = 1$  in  $G$ .

*Beispiel:* Sei folgendes Gleichungssystem in  $G$  mit Unbekannten  $x_1, x_2$  und Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$  gegeben:

$$\begin{aligned}x_1 a_2 a_1 x_2 &= 1 \\ x_1^{-1} a_3 &= 1.\end{aligned}$$

Diesem Gleichungssystem entspricht das triangulierte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}(1) \quad & x_1 a_2 x_3 = 1 \\ (2) \quad & x_3^{-1} a_1 x_2 = 1 \\ (3) \quad & x_1^{-1} a_3 x_4 = 1 \\ (4) \quad & x_4^{-1} x_5 x_5^{-1} = 1\end{aligned}$$

in  $G$  mit den Unbekannten  $x_1, \dots, x_5$  und den Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$ . Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem über der freien Gruppe  $F(g_1, \dots, g_n)$ :

$$\begin{aligned}(1) \quad & x_1 = y_1^1 c_1^1 (y_2^1)^{-1} \quad \theta_{\kappa_{n_0}}(a_2) = y_2^1 c_2^1 (y_3^1)^{-1} \quad x_3 = y_3^1 c_3^1 (y_1^1)^{-1} \\ (2) \quad & x_3^{-1} = y_1^2 c_1^2 (y_2^2)^{-1} \quad \theta_{\kappa_{n_0}}(a_1) = y_2^2 c_2^2 (y_3^2)^{-1} \quad x_2 = y_3^2 c_3^2 (y_1^2)^{-1} \\ (3) \quad & x_1^{-1} = y_1^3 c_1^3 (y_2^3)^{-1} \quad \theta_{\kappa_{n_0}}(a_3) = y_2^3 c_2^3 (y_3^3)^{-1} \quad x_4 = y_3^3 c_3^3 (y_1^3)^{-1} \\ (4) \quad & x_4^{-1} = y_1^4 c_1^4 (y_2^4)^{-1} \quad x_5 = y_2^4 c_2^4 (y_3^4)^{-1} \quad x_5^{-1} = y_3^4 c_3^4 (y_1^4)^{-1}\end{aligned}$$

mit den Unbekannten  $x_1, \dots, x_5, y_1^1, \dots, y_3^4$  und den Koeffizienten  $c_1^1, \dots, c_3^4$  sowie  $\theta_{\kappa_{n_0}}(a_1), \theta_{\kappa_{n_0}}(a_2), \theta_{\kappa_{n_0}}(a_3)$ .

**Satz 6.3.1** *Sei  $\Phi$  ein Gleichungssystem in einer torsionsfreien hyperbolischen Gruppe  $G$ . Dann existiert ein effektiver Algorithmus, der entscheidet, ob  $\Phi$  eine Lösung besitzt.*

*Beweis:* Sei  $\Psi$  das Gleichungssystem über der freien Gruppe  $F(g_1, \dots, g_n)$ , welches man wie oben dargestellt effektiv aus  $\Phi$  konstruieren kann. Wenn  $\Psi$  eine Lösung besitzt ergibt sich durch den kanonischen Homomorphismus

$$F(g_1, \dots, g_n) \rightarrow G$$

eine Lösung für  $\Phi$ . Wenn  $\Phi$  eine Lösung besitzt, folgt mit den Korollaren 6.2.4 und 6.2.5, dass Zylinder  $Z_{\kappa_{n_0}}(a_i)$  und Tripel  $(c_1^j, c_2^j, c_3^j)$  existieren, derart dass sich durch die Abbildung  $\theta_{\kappa_{n_0}} : G \rightarrow F(g_1, \dots, g_n)$  (mit einem geeigneten Maßstab  $\kappa_{n_0}$ ) eine Lösung von  $\Psi$  ergibt.

Also genügt es zu zeigen, dass man für das Gleichungssystem  $\Psi$  entscheiden kann, ob eine Lösung existiert, was z.B. mit Makanins Algorithmus für freie Gruppen [Mak83] möglich ist.  $\square$

## 6.4 Komplexität

Da sich der Platzbedarf für ein Gleichungssystem  $\Phi$  nur linear erhöht, wenn man es in ein trianguliertes Gleichungssystem umformt und weil die oben beschriebene Reduktion eines Gleichungssystems in  $G$  auf ein Gleichungssystem in der freien Gruppe  $F(g_1, \dots, g_n)$  mit polynomiellem Platz auskommt, ergibt sich folgendes Korollar:

**Korollar 6.4.1** *Die oben beschriebene Reduktion eines Gleichungssystems in einer torsionsfreien hyperbolischen Gruppe auf ein Gleichungssystem in einer freien Gruppe liegt in PSPACE.*

Diekert, Gutiérrez und Hagenah haben in [DGH01] gezeigt, dass das Problem zu entscheiden, ob ein Gleichungssystem mit rationalen Randbedingungen über einer freien Gruppe eine Lösung besitzt, PSPACE-vollständig ist. Insbesondere liegt damit das Problem, Gleichungssysteme über einer freien Gruppe zu entscheiden, in PSPACE. Mit Korollar 6.4.1 folgt:

**Korollar 6.4.2** *Das Problem, für ein Gleichungssystem über einer torsionsfreien hyperbolischen Gruppe zu entscheiden, ob es eine Lösung besitzt, liegt in PSPACE.*



# Literaturverzeichnis

- [Cai92] Jin-yi Cai. Parallel Computation Over Hyperbolic Groups. *Proceedings of the twenty-fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Mai 1992.
- [CDP90] Michel Coornaert, Thomas Delzant, and Athanase Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes – Les groupes hyperboliques de Gromov*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
- [DGH01] Volker Diekert, Claudio Gutiérrez, and Christian Hagenah. The existential theory of equations with rational constraints in free groups is PSPACE-complete. In Afonso Ferreira and Horst Reichel, editors, *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 01), Dresden (Germany) 2001*, number 2010 in Lecture Notes in Computer Science, pages 170–182. Springer Verlag, 2001.
- [ECH<sup>+</sup>92] David B. A. Epstein, James W. Cannon, Derek F. Holt, Silvio V. F. Levy, Michael S. Paterson, and William P. Thurston. *Word Processing in Groups*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic Groups. In S. Gersten, editor, *Essays in group theory*, pages 75–263. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [Hol00] Derek F. Holt. Word-hyperbolic groups have real-time word problem. *International Journal of Algebra and Computation* 10, pages 221–227, 2000.
- [HSZ96] W. Hackbusch, H. R. Schwarz, and E. Zeidler. *TEUBNER-TASCHENBUCH der Mathematik*. B. G. Teubner, Leipzig, 1996.
- [Kur70] A. G. Kurosch. *Gruppentheorie 1*. Akademie-Verlag, Berlin, zweite edition, 1970.



- [LS77] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial Group Theory*. Springer Verlag, 1977.
- [Mak83] Gennadií Semyonovich Makanin. Equations in a free group. *Izv. Akad. Nauk SSR, Ser. Math.* 46:1199–1273, 1983. English transl. in *Math. USSR Izv.* 21 (1983).
- [Qua94] Erhard Quaisser. *Diskrete Geometrie – Einführung, Probleme, Übungen*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1994.
- [Rin61] Willi Rinow. *Die innere Geometrie der metrischen Räume*. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.
- [Rob96] Derek J. S. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, second edition, 1996.
- [RS95] Eliyahu Rips and Zlil Sela. Canonical representatives and equations in hyperbolic groups. *Inventiones mathematicae*, 120:489–512, 1995.
- [SS94] Günter Scheja and Uwe Storch. *Lehrbuch der Algebra – Unter Ein-schluß der linearen Algebra*, volume 1. B. G. Teubner, Stuttgart, zweite edition, 1994.
- [vL90] Jan van Leeuwen, editor. *Handbook of Theoretical Computer Science – Formal Models and Semantics*, volume B. Elsevier, The MIT Press, 1990.
- [Zie97] Heiner Zieschang. *Lineare Algebra und Geometrie*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1997.