Institut für Formale Methoden der Informatik
Abteilung Theoretische Informatik
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D70569 Stuttgart

Diplomarbeit Nr. 2775

Quantorenalternierung und reguläre Sprachen

Thomas Baumann

Studiengang:	Informatik
Prüfer:	Prof. Dr. Volker Diekert
Betreuer:	Dr. Manfred Kufleitner
begonnen am:	17. Juni 2008
beendet am:	17. Dezember 2008
CR-Klassifikation:	F.4.3

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ausgehend von regulären Sprachen gelang in den 1960er Jahren ein besonderer Durchbruch, als Kleene in [Kle56] den Zusammenhang der Theorie endlicher Halbgruppen mit der Klasse der regulären Sprachen herstellte. Insbesondere gilt, dass zu jeder regulären Sprache eine endliche Halbgruppe existiert, die diese Sprache erkennt. Im Laufe weniger Jahre entstand aus dieser Erkenntnis eine reichhaltige Theorie, deren Verzweigungen unter anderem in die formalen Sprachen, die Automatentheorie, Logiken und auch die Algebra reicht. Aufbauend auf Kleenes Entdeckung betrachteten Brzozowski und Cohen [BR71] eine strikte und unendliche Hierarchie regulärer Sprachen, deren Vereinigung die Klasse der sternfreien Sprachen ergibt. Diese als **Dot-Depth** Hierarchie bekannte Klassifizierung ist seit dieser Zeit im Fokus der Forschung.
Neben Halbgruppen traten im Laufe der Jahre äquivalente Charakterisierungen der sternfreien Sprachen auf. In der Automatentheorie entsprechen sie den permutationsfreien Automaten, im Bereich der Logiken erhalten wir die Darstellungen erster Ordnung oder auch als Vereinigung der boolschen Abschlüsse aller Formeln in Pränexform.
Trotz stetiger Forschritte, verschiedenster äquivalenter Charakterisierungen und der Entscheidbarkeit der Sternfreiheit einer Sprache weisen die durch Brzozowski und Cohen eingeführten und inspirierten Hierarchien immer noch viele Fragen auf. Es ist zum Beispiel bis heute keine Methode bekannt, um allgemein die Stufe einer Sprache in den Hierarchien zu bestimmen. Tatsächlich existieren effektive Kriterien nur für Sprachen der Stufen Null, in Form der trivialen Monoide, sowie Stufe Eins, in Form des Logikfragments $\mathbb{B}\Sigma_1$ oder der $\mathcal{J}$-trivialen Monoide. Doch schon bei Stufe Zwei, charakterisiert durch das Logikfragment $\mathbb{B}\Sigma_2$, gibt es lediglich Teilresultate, welche die Entscheidbarkeit für Sprachen mit maximal zwei Erzeugern oder den Sprachen über inversen endlichen Automaten liefern.

In dieser Diplomarbeit werden wir eines dieser Teilresultate, 1988 von Straubing entdeckt, vorstellen. Hierfür werden wir zeigen, dass die zweite Stufe der Hierarchie für Sprachen mit maximal zwei Erzeugern entscheidbar ist. Weiter werden wir die Ergebnisse von Straubing im Licht neuerer Erkenntnisse der algebraischen Sprachentheorie betrachten und eine notwendige Bedingung für das Enthaltensein in einer bestimmten Klasse von Monoiden erarbeiten. Diese erlaubt uns insbesondere einen neuen Beweis vorzustellen, um eine Vermutung aus dem Jahre 2001, über die Struktur der zweiten Stufe von Brzozowskis Hierarchie, zu widerlegen.

2 Grundlagen und Definitionen

In diesem Abschnitt werden wir einen Überblick über die wichtigsten Definitionen geben. Unser Hauptaugenmerk wird dabei auf endlichen Halbgruppen, Monoiden und deren Varietäten liegen. Hiervon ausgehend werden wir ein Akzeptanzmodell regulärer Sprachen durch Monoide betrachten und abschließend die von uns betrachtete Dot-Depth Hierarchie einführen.

Für eine tiefere Einführung in die Theorie von Halbgruppen, Monoiden, Varietäten und endlichen Automaten sowie deren Aktzeptanz regulärer Sprachen empfehlen sich unter anderem die Lehrbücher von Howie [How95] und Eilenberg [Eil74].

2.1 Halbgruppen, Monoide und Morphismen

Definition 2.1.
Sei S eine beliebige Menge, sowie $\circ : S \times S \to S$ eine zweistellige Verknüpfung auf S. Ist $\circ$ zusätzlich assoziativ, es gilt also $\circ(a, \circ(b, c)) = \circ(\circ(a, b), c)$ für alle Elemente $a, b, c \in S$, so nennen wir $(S, \circ)$ eine **Halbgruppe**. *Existiert zusätzlich ein* **neutrales Element** *$1_S \in S$, so dass $1_S \cdot s = s \cdot 1_s = s$ für alle $s \in S$, dann nennen wir S ein* **Monoid**.

Da wir hierbei nur assoziative Strukturen betrachten, werden wir die Verknüpfung im Allgemeinen multiplikativ schreiben. Beispielsweise abc oder $a \cdot b \cdot c$ anstatt $\circ(a, \circ(b, c))$ und a^n ($n \in \mathbb{N}$) für das n-fache Produkt von a. Weiter schreiben wir lediglich S anstatt $(S, \circ)$ solange dabei keine Verwechslungen auftreten. Die folgenden Definitionen und Aussagen gelten, solange nicht explizit ausgenommen, auch für Monoide.
Gilt die Gleichung $e^2 = e$ für ein Element einer Halbgruppe S, so nennen wir dieses **idempotent**. Die Menge aller idempotenten Elemente sei $\boldsymbol{E(S)} = \{e \in S : e^2 = e\}$. Bei einem Monoid M gilt insbesondere $1_M \in E(M)$.

Betrachten wir zwei Teilmengen A, B einer Halbgruppe, so nennen wir

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

das **Produkt von** A **und** B. Dies ist die Teilmenge der Halbgruppe, die entsteht, wenn wir alle Elemente aus A mit den Elementen aus B multiplizieren. Als Grenzfall der Potenz $A^n, n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $A^+ = \cup_{n \geq 1}(A^n)$, die Menge aller Elemente, die sich aus A in der Halbgruppe generieren lässt. Dies ist wieder eine Unterhalbgruppe und wir nennen A eine **Erzeugermenge von** A^+. Betrachten wir statt einer Halbgruppe ein Monoid, so fügen wir zu A^+ noch das neutrale Element hinzu und erhalten damit $A^* := A^0 \cup A^+ = \{1\} \cup A^+$.
Ist U eine Teilmenge von S und zusätzlich U mit der Verknüpfung von S eine Halbgruppe, so nennen wir U eine **Unterhalbgruppe von** S bzw., im Falle eines Monoides M, ein **Untermonoid von** M.

Eine Halbgruppe S heißt kommutativ, falls die zugrundeliegende Verknüpfung **kommutativ** ist. Ebenso nennen wir S **idempotent**, falls alle Elemente idempotent sind. Existiert für alle Elemente $s \in S$ eine natürliche Zahl $k \geq 1$, so dass $s^k = s^{k+1}$ gilt, dann nennen wir S **aperiodisch**. Die letzte Klasse von Halbgruppen besitzt im endlichen Fall eine besondere Eigenschaft.

Lemma 2.2. *Sei S eine endliche, aperiodische Halbgruppe mit n Elementen. Dann gibt es ein $1 \leq \omega \leq n$, so dass s^ω idempotent für alle $s \in S$ ist.*

Beweis. Sei S eine endliche, aperiodische Halbgruppe sowie $n = |S|$ und $s \in S$ ein beliebiges Element. Betrachten wir die Folge $s, s^2, \ldots$ von Elementen in S, so muss mindestens ein Element $s^k = s^\ell$ von S in dieser Folge doppelt vorkommen. Durch die Aperiodizität von S folgt nun, dass man k, ℓ so wählen kann, dass $k = \ell + 1$ gilt. Andernfalls würde eine Schlaufe der Art $s^k, s^{k+1}, \ldots s^\ell$ existieren, die wir beliebig oft durchlaufen könnten ohne stationär zu werden, was einen Widerspruch zur Aperiodizität darstellt.
Da außerdem S genau n Elemente besitzt, muss dieses Paar spätestens bei den Folgengliedern $n, n+1$ auftreten. Also ist insbesondere $(s^n)^2 = s^n$ für alle $s \in S$ und damit s^n idempotent. Das gesuchte ω existiert also und ist insbesondere kleiner gleich n. □

Trennen wir uns von der Forderung der Aperiozität, so finden wir immer noch auf dieselbe Weise idempotente Elemente. Wir erhalten jedoch eine größere obere Schranke für ω, da die Schlaufe aus dem Beweis mehr als ein Element enthalten kann.
Besitzt S dagegen unendlich viele Elemente, so finden wir durch die Aperiozität für jedes Element einen passenden Exponenten. Für diesen muss jedoch keine obere Schranke existieren und damit ist die Existenz des ω nicht mehr gesichert.
Ist die Halbgruppe weder aperiodisch noch endlich, so muss kein idempotentes Element existieren. Ein Beispiel hierfür sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der Addition als Verknüpfung.

Betrachten wir im Folgenden Abbildungen zwischen Halbgruppen, so interessieren wir uns besonders für solche, die die Multiplikation respektieren.

Definition 2.3 (Homomorphismen von Halbgruppen)**.**
Seien S, T Halbgruppen, sowie $\mu : S \to T$ eine Abbildung zwischen diesen. Gilt

$$\mu(a \cdot b) = \mu(a) \cdot \mu(b)$$

für alle Elemente $a, b \in S$, so nennen wir μ einen **(Halbgruppen-) Homomorphismus***. Sind S und T Monoide, so definieren wir auf gleiche Weise einen* **(Monoid-) Homomorphismus***, wobei wir zusätzlich $\mu(1_S) = 1_T$ fordern. Der Monoidhomomorphismus bildet also das neutrale Element in S auf das neutrale Element in T ab.*

Da wir insbesondere mit Wörtern über einem Alphabet arbeiten, werden wir im Folgenden $(ab)\mu = a\mu \cdot b\mu$ anstatt $\mu(ab) = \mu(a) \cdot \mu(b)$ schreiben, falls μ ein Homomorphismus ist.

2.2 Kongruenzen, Teilbarkeit und Varietäten

Sei $\mathbf{P}$ eine Relation auf einer Halbgruppe S, also $\mathbf{P} \subset S \times S$. Wir nennen $\mathbf{P}$ eine **Äquivalenzrelation**, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Formal muss also für alle $x, y, z \in S$

(i) $(x, x) \in \mathbf{P}$

(ii) $(x, y) \in \mathbf{P} \iff (y, x) \in \mathbf{P}$

(iii) $(x, y), (y, z) \in \mathbf{P} \Longrightarrow (x, z) \in \mathbf{P}$

gelten. Ist $(x, y) \in \mathbf{P}$ ein Tupel einer Äquivalenzrelation, so nennen wir x **äquivalent zu** y **modulo** $\mathbf{P}$, in Zeichen $x \sim_{\mathbf{P}} y$ bzw. einfach $x \sim y$, falls klar ist, auf welche Relation sich die Äquivalenz bezieht. Ist eine Äquivalenzrelation **kompatibel** mit der Verknüpfung der Halbgruppe oder des Monoids, gilt also

$$xu \sim yv \text{ für alle } x, y, u, v \in S \text{ mit } x \sim y, u \sim v,$$

so nennen wir $\mathbf{P}$ eine **Kongruenz auf** S und bezeichnen mit $S/\mathbf{P}$ die Menge aller Klassen der Äquivalenz $\mathbf{P}$. Durch die Kompatibilität erhalten wir nun auch eine natürliche Erweiterung der Verknüpfung auf S, wodurch $S/\mathbf{P}$ ebenfalls zu einer Halbgruppe bzw. einem Monoid wird. Wir nennen $S/\mathbf{P}$ den **Quotient von** S **bzgl. der Relation** $\mathbf{P}$. Das neutrale Element von $M/\mathbf{P}$ im Monoid-Fall ist gerade die Klasse des neutralen Elements von M.

Bemerkung 2.4.
Es gibt einen natürlichen Zusammenhang zwischen einem Homomorphismus $\mu : S \to T$ und einer Kongruenz $\mathbf{P}$ auf S. Wir identifizieren hierzu alle Elemente von S, die durch μ auf das gleiche Element in T abgebildet werden. Diese Relation erfüllt die Bedingungen einer Äquivalenzrelation und ist eine Kongruenz aufgrund der Eigenschaften von μ.
Ebenso konstruieren wir uns einen Homomorphismus $\mu_{\mathbf{P}} : S \to S/\mathbf{P}$, indem wir jedes Element von S auf seine Klasse bzgl. $\mathbf{P}$ abbilden. Durch die Kompatibilität der Kongruenz erhalten wir einen Homomorphismus, der im Falle eines Monoids das neutrale Element auf dessen Klasse abbildet.

Die Definition des Quotienten einer Halbgruppe S erlaubt uns nun über Teilbarkeit zu sprechen. Ist T isomorph zu dem Quotient einer Untergruppe von S, so schreiben wir $T \prec S$, in Worten T **teilt** S. Insbesondere teilt jede Unterhalbgruppe von S die Halbgruppe S.
Eine Klasse $\boldsymbol{V}$ von Halbgruppen bzw. Monoiden bezeichnen wir als S**-Varietät** bzw. M**-Varietät**, falls diese unter endlichem direkten Produkt sowie Teilbarkeit abgeschlossen ist. Besteht keine Verwechslungsgefahr, so bezeichnen wir $\boldsymbol{V}$ auch einfach als Varietät.

2.3 Greens Relationen und Beispiele für Varietäten

An späterer Stelle werden wir bestimmte Varietäten endlicher Monoide betrachten. Hierbei werden insbesondere solche von Interesse sein, die aus den Äquivalenzen von Green hervorgehen. Hierbei betrachten wir links-, rechts- und beidseitige Ideale von Elementen eines Monoids und verwenden die natürliche Ordnung, die auf Teilmengen definiert ist, um eine Äquivalenzrelation auf den Monoidelementen zu erhalten.

Definition 2.5. *Sei M ein Monoid sowie $m, n \in M$ Monoidelemente. Wir definieren Ordnungen $\leq_{\mathcal{L}}, \leq_{\mathcal{R}}, \leq_{\mathcal{J}}$ auf M durch*

- $m \leq_{\mathcal{L}} n :\Leftrightarrow Mm \subseteq Mn.$
- $m \leq_{\mathcal{R}} n :\Leftrightarrow mM \subseteq nM.$
- $m \leq_{\mathcal{J}} n :\Leftrightarrow MmM \subseteq MnM.$

Sowie die damit verknüpften Äquivalenzrelationen $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$

- $m\mathcal{L}n :\Leftrightarrow Mm = Mn.$
- $m\mathcal{R}n :\Leftrightarrow mM = nM.$
- $m\mathcal{J}n :\Leftrightarrow MmM = MnM.$

Die Klasse eines Elements m sei $[m]_{\mathcal{L}}, [m]_{\mathcal{R}}$ bzw. $[m]_{\mathcal{J}}$.

Betrachten wir eine Halbgruppe S anstatt eines Monoids, so gelten nahezu die gleichen Definitionen. Da jedoch kein neutrales Element in S, aber trotzdem jedes Element in seiner Klasse enthalten sein muss, ersetzen wir jedes Vorkommen von M in der Definition durch $S^1 := \{1\} \cup S$, wobei 1 ein neues Einselement ist. Da stets Ideale betrachtet werden, liegen die so entstehenden Teilmengen mS^1, S^1m, S^1mS^1 immer noch in S.
Betrachten wir die Äquivalenzen genauer, stellen wir fest, dass $\mathcal{L}$ eine Links- und $\mathcal{R}$ eine Rechtskongruenz darstellt. Dies folgt aus der Tatsache, dass $M(mu) = (Mm)u = (Mn)u = Mnu$, falls $m\mathcal{L}n$. Weiter erhalten wir, wegen $m_1\mathcal{J}m_2$ und $1m_11 = m_1 \in Mm_1M$, dass $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ existieren müssen mit

$$m_1 = x_1m_2y_1 \text{ sowie } x_2m_1y_2 = m_2.$$

Ebenso erhalten wir aus den Gleichungen $m_1\mathcal{L}m_2$ und $n_3\mathcal{R}n_4$ die Existenz von $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ mit

$$m_1 = x_1m_2,\ n_1 = n_2y_1 \text{ sowie } n_1y_2 = n_2,\ x_2m_1 = m_2.$$

Die Elemente der Äquivalenzklassen $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}$ lassen sich also durch Multiplikation von Monoid- bzw. Halbgruppenelementen ineinander überführen.
Wir werden eine Halbgruppe oder ein Monoid **$\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$- bzw. $\mathcal{J}$-trival** nennen, falls jedes Element eine eigene $\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$- bzw. $\mathcal{J}$-Klasse besitzt. Aus $m\mathcal{J}n$ folgt für ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid also bereits $m = n$.

Nun ist es uns möglich, einige der für uns wichtigsten Varietäten endlicher Monoide vorzustellen. Die Pfeile in der Abbildung entsprechen dabei einer "ist enthalten in" Beziehung.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \boldsymbol{\mathcal{L}} \arrow[dr] & & & \\
\mathbf{1} \arrow[r] & \boldsymbol{J_1} \arrow[r] & \boldsymbol{\mathcal{J}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boldsymbol{\mathcal{L}} \vee \boldsymbol{\mathcal{R}} \arrow[r] & \mathbf{DA} \arrow[r] & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}} \\
 & & & \boldsymbol{\mathcal{R}} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Die hier benannten Varietäten sind jeweils die minimalen Varietäten, die

$\mathbf{1}$:	das triviale Monoid enthalten.
$\boldsymbol{J_1}$:	alle idempotenten und kommutativen Monoide enthalten.
$\boldsymbol{\mathcal{J}}$:	alle $\mathcal{J}$-trivialen Monoide enthalten.
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$:	alle $\mathcal{L}$-trivialen Monoide enthalten.
$\boldsymbol{\mathcal{R}}$:	alle $\mathcal{R}$-trivialen Monoide enthalten.
$\boldsymbol{\mathcal{L}} \vee \boldsymbol{\mathcal{R}}$:	alle Monoide enthalten, die entweder $\mathcal{L}$- oder $\mathcal{R}$-trivial sind.
$\mathbf{DA}$:	alle Monoide enthalten, in denen $(uvw)^\omega v(uvw)^\omega = (uvw)^\omega$ für alle Elemente gilt.
$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$:	alle Monoide enthalten, für die $eM_ee \in \boldsymbol{\mathcal{J}}$ für alle $e^2 = e \in M$ gilt.

Da sich die genannten Eigenschaften auf Bilder bzw. Urbilder von Homomorphismen übertragen, erfüllen alle Monoide der Varietäten die zugehörigen Eigenschaften. Die erwähnte Menge M_e ist das Untermonoid von M, das von den Elementen $m \in M$ mit $e \leq_{\mathcal{J}} m$ erzeugt wird. Solch ein m liegt also in der $\mathcal{J}$-Hierarchie über e und ist damit ein möglicher Faktor von e in M.

Eine Varietät von Halbgruppen, die wir in Abschnitt 5 benötigen werden, ist $\boldsymbol{B_1}$. Knast wies in [Kna83b] nach, dass sie der ersten Stufe der Brzozowski-Hierarchie entspricht. Weiter zeigte er, dass $\boldsymbol{B_1}$ gerade die Halbgruppen S enthält, welche die Gleichung

$$(exfye)^\omega exfve(eufve)^\omega = (exfye)^\omega(eufve)^\omega$$

für alle $e^2 = e, f^2 = f, x, y, u, v \in S$ erfüllen.

2.4 Reguläre und sternfreie Sprachen

An dieser Stelle wollen wir nun die Verbindung zur Theorie regulärer Sprachen und Ausdrücke ziehen. Im Folgenden sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein endliches Alphabet sowie $\boldsymbol{\Sigma^*}$ das **freie Monoid über $\boldsymbol{\Sigma}$**. Mengentheoretisch betrachtet entspricht dies der Menge aller endlichen Zeichenketten bzw. **Wörter über $\boldsymbol{\Sigma}$**. Die Verknüpfung ist die einfache Konkatenation, $w = w_1 \ldots w_k \cdot v = v_1 \ldots v_\ell$ ist also $wv = w_1 \ldots w_k v_1 \ldots v_\ell$ für

$w_i, v_j \in \Sigma, w, v \in \Sigma^*$. Das neutrale Element ist das **leere Wort $\boldsymbol{\varepsilon}$**.
Eine **Sprache über $\boldsymbol{\Sigma}$** ist definiert als eine beliebige Teilmenge der Wörter von Σ^*. Weiter ist eine **reguläre Sprache über $\boldsymbol{\Sigma}$** eine Sprache, die sich durch Konkatenation (bzw. Produktbildung), Vereinigung und der $*$-Operation aus den einelementigen Teilmengen von Σ gewinnen lässt. Einen bekannten Formalismus hierfür liefern die **regulären Ausdrücke**.

Die Überlegung, dass gerade die $*$-Operation eine besondere Stellung in dieser Definition einnimmt, führte schließlich zur Definition der **sternfreien regulären Sprachen**. Diese erhalten wir, indem wir, wieder ausgehend von den einelementigen Teilmengen von Σ, die Operationen Konkatenation sowie die boolschen Operationen Schnitt $\cap$, Vereinigung $\cup$ sowie die Komplementbildung $\Sigma^* \setminus (\cdot)$ bzw. $\bar{\cdot}$, falls das Alphabet eindeutig ist, zulassen. Da die regulären Sprachen unter Komplementbildung und Durchschnitt abgeschlossen sind (siehe zum Beispiel [HMU02]), sich die Sternoperation jedoch nicht durch die boolschen Operationen nachbilden lässt, sind die auf diese Weise erzeugten Sprachen eine echte Teilmenge der regulären Sprachen.

2.5 Akzeptanzmodelle

Neben regulären Grammatiken bzw. Ausdrücken ist die Theorie der endlichen Automaten das bekannteste Akzeptanzmodell für reguläre Sprachen. Hierbei haben wir eine Menge von Terminalen, in unserem Fall die Buchstaben des Alphabets Σ, eine Menge von Zuständen Q, eine Menge von Regeln $\delta \subseteq (Q \times \Sigma) \times Q$ sowie zwei Teilmengen S, E von Q. Ein solcher Automat $A = (Q, \Sigma, \delta, S, E)$ heißt **deterministisch**, falls $\delta_a = ((q_1, a), q_2) \in \delta$ eine Funktion von $V \times \Sigma$ nach Q ist und $|S| = 1$ gilt, **nichtdeterministisch** sonst. S und E bezeichen wir als **Startzustände** bzw. **Endzustände von** A. Ist $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$, so sagen wir A **akzeptiert** w, falls $s\delta_{w_1} \dots \delta_{w_n} = e \in E$ für einen beliebigen Startzustand $s \in S$. Ein Automat A akzeptiert eine reguläre Sprache L, falls er alle $w \in L$ akzeptiert und es ist allgemein bekannt ([HMU02]), dass endliche Automaten genau die Klasse der regulären Sprachen erkennen. Weiter ist bekannt, dass zu jedem Automaten A ein eindeutiger, minimaler und deterministischer Automat existert.

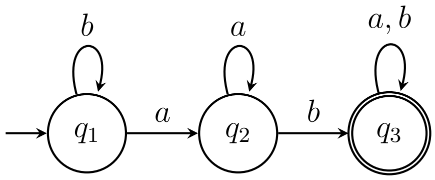
Die Arbeiten von Myhill, Nerode und Kleene ziehen eine Verbindung zwischen den Theorien endlicher Monoide und der regulärer Sprachen bzw. endlicher Automaten. Sei wieder L eine Sprache über einem endlichen Alphabet Σ und M ein Monoid. Gibt es einen Monoidhomomorphismus $\mu : \Sigma^* \to M$ mit $L = L\mu\mu^{-1}$, so sagen wir L **wird von M erkannt**. Wird L von einem endlichen Monoid erkannt, so nennen wir M **erkennbar**. Es gilt, dass die Klasse der erkennbaren Sprachen gerade der Klasse der regulären Sprachen entspricht. Schützenberger zeigte in [Sch65], dass die Klasse der durch ein aperiodisches Monoid erkannten Sprachen, den sternfreien Sprachen entspricht.
Wollen wir über eindeutige und minimale Monoide sprechen, die L erkennen, so müssen wir die **syntaktische Kongruenz** $\equiv_L$ betrachten. Diese ist für Wörter $v, w \in \Sigma^*$ defi-

niert als

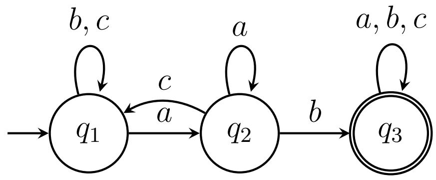
$$v \equiv_L w \Leftrightarrow (\forall p, q \in \Sigma^* : pvq \in L \Leftrightarrow pwq \in L)$$

Damit erhalten wir das **syntaktische Monoid** $M(L) := \Sigma^* / \equiv_L$ dessen Elemente die Klassen $[w]_{\equiv_L}$ der Wörter $w \in \Sigma^*$ modulo $\equiv_L$ sind. Den durch $\equiv_L$ induzierten Homomorphismus, der jedem w die Klasse $[w]_{\equiv_L}$ zuweist, nennen wir **syntaktischen Homomorphismus**. Erkennt ein Monoid N eine Sprache L, so muss $M(L) \prec N$ gelten. Insbesondere ist eine Sprache genau dann erkennbar, wenn ihr syntaktisches Monoid endlich ist.
Weiter ist $M(L)$ isomorph zu dem Transitionsmonoid von $A(L)$, also dem Monoid, dessen Elemente von den Transformationen $\delta_{a_i} \in \delta$ erzeugt werden. Diese Tatsache erlaubt uns das syntaktische Monoid für jede reguläre Sprache zu berechnen.

Weitere Akzeptanzmodelle wie **Darstellungen erster Ordnung** oder **Polynome** über bestimmten Sprachklassen seien hier nur am Rande erwähnt. Wir werden nun die verschiedenen Modelle anhand eines Beispiels aus [DGK08] kurz vorstellen.
Sei $\Sigma_1 = \{a, b\}$ sowie $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$ sowie die beiden Sprachen $L_1 = \Sigma_1^* ab \Sigma_1^*$ und $L_2 = \Sigma_2^* ab \Sigma_2^*$. Die minimalen Automaten, in ihrer graphischen Darstellung, haben folgende Form



Minimaler Automat für L_1.



Minimaler Automat für L_2.

und entsprechend werden die Transitionsmonoide von den Transformationen

$$a := \delta_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b := \delta_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, c := \delta_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

erzeugt, wobei die Transformation c lediglich bei L_2 Verwendung findet. Die zugehörigen (syntaktischen) Monoide besitzen die Multiplikationstabellen

	1	a	b	ba	0
1	1	a	b	ba	0
a	a	a	0	0	0
b	b	ba	b	ba	0
ba	ba	ba	0	0	0
0	0	0	0	0	0

	1	a	b	c	ba	0
1	1	a	b	c	ba	0
a	a	a	0	c	0	0
b	b	ba	b	b	ba	0
c	c	a	c	c	a	0
ba	ba	ba	0	b	0	0
0	0	0	0	0	0	0

und somit sind beide Sprachen sternfrei, da die syntaktischen Monoide aperiodisch sind. Weiter gilt $M(L_1) \in \boldsymbol{\mathcal{J}}$ und $M(L_2) \notin \boldsymbol{\mathcal{J}}$ und $M(L_1), M(L_2) \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$. Die zugehörigen regulären Ausdrücke sind $(a|b)^* ab (a|b)^*$ bzw. $(a|b|c)^* ab (a|b|c)^*$. Eine sternfreie Darstellung erhält man aus der ursprünglichen Definition von L_1, L_2 durch die Beobachtungen

$$\Sigma^* = \Sigma^* \setminus (\{a\} \cap \{aa\}), \quad \{\varepsilon\} = \Sigma^* \setminus \left(\bigcup_{a \in \Sigma} (\Sigma^* a \Sigma^*) \right).$$

Eine mögliche Darstellung erster Ordnung wäre zum Beispiel

$$\exists x, y \forall z : x = a \wedge y = b \wedge ((x \lneq z \wedge z \lneq y) \Longrightarrow z = a)$$

2.6 Die Dot-Depth Hierarchie von Straubing

Zuletzt benötigen wir noch eine Hierarchie innerhalb der sternfreien Sprachen, die auf der Arbeit von Cohen und Brzozowski ([BR71] und auch [Eil74]) beruht. Während dort Sprachen über der freien Halbgruppe Σ^+ und damit insbesondere Varietäten von Halbgruppen betrachtet wurden, werden wir eine ähnliche Definition über Σ^* von Straubing verwenden. Diese ist auf Sprachebene etwas komplizierter, bietet uns aber eine etwas einfachere Charakterisierung auf Varietätenebene. Insbesondere betrachten wir Varietäten von Monoiden.

Sei Σ^* ein beliebiges endliches Alphabet sowie $\Sigma^* V_0 := \{\emptyset, \Sigma^*\}$. Wir definieren nun für $k \geq 1$ die k-te Stufe $\Sigma^* V_k$ unserer Sprachhierarchie als den boolschen Abschluß aller Sprachen der Form $L_0 a_1 L_1 \dots a_r L_r$, $r \geq 0$, mit $L_i \in A^* V_{k-1}$ für alle $i \in \{0, \dots, r\}$ sowie $a_i \in \Sigma$ für $i \in \{1, \dots, r\}$.
Straubing [Str85] und Thérien [The81] haben gezeigt, dass diese Hierarchie von Sprachen in engem Zusammenhang mit einer Hierarchie von Varietäten endlicher, aperiodischer Monoide steht. Genauer gibt es zu jeder Stufe $\Sigma^* V_k$ eine zugehörige Varietät $\boldsymbol{V_k}$, so dass für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$

$$L \in \Sigma^* V_k \Leftrightarrow M(L) \in \boldsymbol{V_k}$$

gilt, und die Hierarchie der Varietäten strikt ist. Es gilt also $\boldsymbol{V_{k+1}} \setminus \boldsymbol{V_k} \neq \emptyset$. Die ersten zwei Stufen dieser Hierarchie besitzen eine recht einfache und bekannte Charakterisierung ([Sim75] und [ST85]): $\boldsymbol{V_0}$ ist die triviale Varietät $\mathbf{1}$ und $\boldsymbol{V_1}$ die Varietät aller $\mathcal{J}$-trivialen Monoide $\boldsymbol{\mathcal{J}}$. Ist eine Sprache L über einem Alphabet Σ gegeben mit $L \in \Sigma^* V_{k+1} \setminus \Sigma^* V_k$ bzw. ein Monoid $M \in \boldsymbol{V_{k+1}} \setminus \boldsymbol{V_k}$, so sagen wir L bzw. M besitzt **Dot-Depth $\boldsymbol{k+1}$** bzw. **Punkttiefe $\boldsymbol{k+1}$**.
Für $k \geq 2$ ist, außer in Spezialfällen wie inversen Monoiden [Cow93] oder Alphabeten mit zwei Erzeugern (Abschnitt 4), noch kein Entscheidungsverfahren bekannt. Dies gilt auch für verwandte Hierarchien wie die von Brzozowski, die über der freien Halbgruppe Σ^+ definiert ist und deren zugehörige Varietäten $\boldsymbol{B_k}$ Halbgruppen anstatt nur Monoide enthalten. Es gilt jedoch, dass ein Entscheidungsverfahren für Straubings Hierarchie auch ein entsprechendes für die von Brzozowski und umgekehrt liefern würde ([Str85]).

3 Werkzeuge aus der algebraischen Sprachentheorie

3.1 Kongruenzverfeinerungen und der Satz von Simon

Sei Σ ein endliches Alphabet und β eine Kongruenz auf dem freien Monoid Σ^*. Ist eine weitere Kongruenz η mit $\eta \subseteq \beta$ gegeben, so sagen wir $\boldsymbol{\eta}$ **verfeinert** $\boldsymbol{\beta}$. Wir wollen nun eine Operation vorstellen, die eine gegebene Kongruenz verfeinert und eng mit Straubings Beweis verknüpft ist.
Hierfür definieren wir für alle $k \geq 0$ eine Äquivalenzrelation $[\beta, k]$ wie folgt:

Definition 3.1. *Sei Σ ein endliches Alphabet, β eine Kongruenz auf Σ^* und $k \geq 0$. Für $v, w \in \Sigma^*$ definieren wir $v \subset_{[\beta,k]} w$, falls für jede Faktorisierung*

$$v = v_0 a_1 v_1 \dots a_r v_r$$

mit $r \leq k$, $w_i \in \Sigma^*$ und $a_i \in \Sigma$ eine Faktorisierung

$$w = w_0 a_1 w_1 \dots a_r w_r$$

existiert, mit $v_i \mathrel{\beta} w_i$ für alle $i \in \{0, \dots r\}$. Weiter definieren wir $v[\beta, k]w$ genau dann, wenn $v \subset_{[\beta,k]} w$ und $w \subset_{[\beta,k]} v$.

In [The81] zeigte Thérien, dass $[\beta, k]$ eine Kongruenz ist, und aus der Definition erhalten wir direkt, dass $[\beta, k]$ nur endlich viele Klassen erzeugt, wenn bereits β dies tut. Weiter erkennen wir, dass $[\beta, 0] = \beta$ und $[\beta, k + 1]$ eine Verfeinerung von $[\beta, k]$ ist.

Sei ω die universelle Kongruenz über Σ^*. Es gilt also $v \mathrel{\omega} w$ für alle $v, w \in \Sigma^*$. Simons Theorem über $\mathcal{J}$-triviale Monoide liefert uns nun, dass ein Monoid M genau dann $\mathcal{J}$-trivial ist, wenn ein Homomorphismus $\varphi : \Sigma^* \to M$ und ein $k \geq 0$ existieren, so dass φ von $[\omega, k]$ verfeinert wird. Ist $\mathbf{1}$ die Varietät, die nur aus dem trivialen Monoid besteht, so erhalten wir zusammen mit Lemma 3.10 und der dortigen Notation:

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \Diamond \mathbf{1}$$

3.2 Kategorientheorie

Verallgemeinern wir die Definition eines Monoids zu der einer Kategorie, so eröffnet sich uns eine weite Theorie, welche besonders zur Betrachtung der Zusammensetzung eines Monoids wertvolle Hilfe leistet. Wir werden an dieser Stelle lediglich eine kurze Einführung in diese Theorie geben und verweisen für eine ausführliche Betrachtung auf den Artikel von Tilson [Til87].

Definition 3.2. *Sei C ein Graph mit Objektmenge* $\mathrm{Obj}(C)$ *und einer Menge Pfeilen* $\mathrm{Hom}_C(c, c')$ *für alle Kombinationen von Objekten $c, c' \in \mathrm{Obj}(C)$. Um Pfeile eindeutig ihren Objekten zuordnen zu können, schreiben wir für $s \in \mathrm{Hom}_C(c_1, c_2)$ auch $s : c_1 \to c_2$ und nennen den Pfeil $s : c_1 \to c_2$* **kompatibel zu** *$r : c_3 \to c_4$, falls $c_2 = c_3$ gilt. Wir nennen C eine* **Kategorie**, *falls* *(i) Eine Verknüpfung existiert, die jedem kompatiblen Pfeilpaar $s : c_1 \to c_2, t : c_2 \to c_3$ einen Pfeil $(st) : c_1 \to c_3$ zuweist und außerdem assoziativ ist. Für Pfeile $r : c_1 \to c_2, s : c_2 \to c_3, t : c_3 \to c_4$ soll also $(rs)t = r(st)$ gelten.*

(ii) Für jedes Objekt $c \in \mathrm{Obj}(C)$ ein Identitätspfeil $1_C : c \to c$ existiert, der für alle Pfeile $s : c' \to c$ sowie $t : c \to c'$ die Gleichungen $s1_C = s$ sowie $1_C t = t$ erfüllt.

Ist $\mathrm{Obj}(C)$ sowie $\mathrm{Hom}_C(c_1, c_2)$ für alle $c_1.c_2 \in \mathrm{Obj}(C)$ endlich, so heißt C **endlich**. *Sind $s, t : c_1 \to c_2$ Pfeile zwischen den gleichen Objektpaaren, so nennen wir s, t* **koterminal**.

Da eine Kategorie ein Graph mit weiteren Bedingungen ist, können wir insbesondere von Zusammenhangskomponenten sprechen. Wie in der Graphentheorie ist eine **Zusammenhangskomponente** eine maximale Teilmenge von $\mathrm{Obj}(C)$, für die zwischen allen Paaren von Elementen mindestens ein Pfeil existiert. C heißt **zusammenhängend**, falls ganz C eine Zusammenhangskomponente ist.
Besitzt eine Kategorie C lediglich ein Objekt c, so entspricht diese Definition gerade der Definition eines Monoids. Die Elemente in $\mathrm{Hom}_C(c, c)$ sind die Monoidelemente und die Verknüpfung der Pfeile in C liefert uns die assoziative Verknüpfung des Monoids. Das neutrale Element ist gerade der Identitätspfeil 1_C.

Im Folgenden definieren wir nun eine Divisionsoperation auf Kategorien. Diese ist eine Verallgemeinerung der Division von Monoiden, und da ein Monoid ein Spezialfall einer Kategorie ist, werden wir dabei auch sehen wie eine Kategorie ein Monoid teilen kann. Kategorien sind also tatsächlich eine Verallgemeinerung der Theorie der Monoide und in Abschnitt 4 ein wichtiges Werkzeug um den Satz von Straubing zu beweisen.

Definition 3.3. *Seien C, D Kategorien. Wir sagen C* **teilt** *D, in Zeichen $C \prec D$, falls eine Funktion $\psi : \mathrm{Obj}(C) \to \mathrm{Obj}(D)$ existiert, so dass für jeden Pfeil $s : c_1 \to c_2$ in C eine* **Überdeckung** *$M_s \subset \mathrm{Hom}_D(c_1\psi, c_2\psi)$ existiert, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) $M_s \neq \emptyset$.

(ii) Sind $s_1 : c_1 \to c_2, s_2 : c_2 \to c_3$ aufeinander folgende Pfeile in C und $t_1 \in M_{s_1}, t_2 \in M_{s_2}$, so gilt $t_1 t_2 \in M_{s_1 s_2}$.

(iii) Sind $s_1 \neq s_2$ verschiedene Pfeile in C, so folgt $M_{s_1} \cap M_{s_2} = \emptyset$.

(iv) $1_{c\psi} \in M_{1_c}$. Die Identität an Objekten c wird also von der Identität an $c\psi$ überdeckt.

Sind C und D beides Monoide, so erhalten wir gerade die Division von Monoiden. C ist also isomorph zu einem Quotienten D/β von D und die Mengen M_s liefern uns geeignete Kandidaten für die Äquivalenzklassen von β. Ist nur D ein Monoid, so erhalten wir den gewünschten Zusammenhang zwischen der Kategorientheorie und der Theorie von Monoiden. Ein wichtiges Werkzeug hierfür liefert uns der Satz über starke Zusammenhangskomponenten [Til87] von Tilson.

Satz 3.4. *[Til87] Sei $\boldsymbol{V}$ eine nicht-triviale Varietät von Kategorien. Dann gilt $S \in \boldsymbol{V}$ genau dann, wenn jede starke Zusammenhangskompente von S bereits in $\boldsymbol{V}$ liegt.*

Varietäten von Kategorien entsprechend dabei nahezu den Monoid-Varietäten. Wir fordern jedoch zusätzlich, dass das direkte Produkt zweier Kategorien wieder in der Varietät enthalten ist. An späterer Stelle wird uns dieser Satz erlauben zu entscheiden, ob eine bestimmte Kategorie ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid teilt.

Betrachten wir eine endliche Kategorie C und existiert eine Menge G von Pfeilen in C, so dass sich jeder Pfeil der Kategorie durch Multiplikation aus Pfeilen in G erzeugen lässt, so sagen wir G **erzeugt** C. Ist t ein Pfeil in C und w ein Wort in dem freien Monoid G^* mit $t = w$ in C, so sagen wir w **erzeugt** t. Weiter legen wir fest, dass die Identitätspfeile an jedem Objekt durch das leere Wort $\varepsilon \in G^*$ erzeugt werden..
Das folgende Lemma liefert uns eine Methode, um die Äquivalenz von Pfeilen einer Kategorie, die ein Monoid einer Varietät teilen, nachzuweisen. Die Umkehrung dieses Lemmas gilt ebenfalls ([Str88]), wir werden jedoch nur die von uns benötigte Richtung beweisen.

Lemma 3.5. *Sei $\boldsymbol{V}$ eine Varietät endlicher Monoide, C eine Kategorie sowie G eine Menge von Pfeilen, die C erzeugt. Sei weiter $M \in \boldsymbol{V}$ ein endliches Monoid mit $C \prec M$. Dann gibt es eine Kongruenz β auf G^* mit $G^*/\beta \in \boldsymbol{V}$. Weiter gilt für Pfade $u, v \in G^*$, die koterminale Pfeile $x, y \in C$ beschreiben, dass aus $u \,\beta\, v$ bereits $x = y$ folgt.*

Beweis. Wir definieren uns einen Morphismus $\beta : G^* \to M$, mit $G^*/\beta \in \boldsymbol{V}$. Hierzu weisen wir jedem Element $g \in G$ die Menge aller Elemente $m \in M$ zu, welche g gemäß der Teilbarkeit von Kategorien überdecken. Sind nun x, y koterminale Pfeile in C, die von $u \in G^*$ bzw. $v \in G^*$ erzeugt werden, so folgt aus den Bedingungen der Kategoriendivision, dass x von $u\beta$ und y von $v\beta$ überdeckt werden. Gilt also $u\beta = v\beta$, so folgt damit $x = y$, da die Überdeckungen verschiedener Pfeile disjunkt sein müssen. ☐

Sei nun M ein Monoid und $\varphi : \Sigma^* \to M$ ein surjektiver Homomorphismus. Wir definieren die Kategorie $\boldsymbol{C_\varphi(M)}$, indem wir als Objekte alle Tupel $(e, X) \subset E(M) \times 2^\Sigma$ verwenden, für die ein $w \in \Sigma^*$ existiert, so dass $w\varphi = e$ und $w\alpha = X$ gilt. $\alpha : \Sigma^* \to 2^\Sigma$ ist dabei die Funktion, die jedem Wort w die Menge aller Buchstaben von Σ zuordnet, die in w vorkommen.
Als Pfeile zwischen zwei Objekten (e, X),(f, Y) definieren wir Klassen von Tripeln $[(e, X), w, (f, y)]$ mit $w \in \Sigma^*$ und $Y = X \cup (w\alpha)$. Zwei Pfeile $((e, X), w_1, (f, Y))$, $((e, X), w_2, (f, Y))$ gelten dabei als äquivalent, falls

$$e \cdot w_1\varphi \cdot f = e \cdot w_2\varphi \cdot f$$

erfüllt ist, und wir definieren die Multiplikation zweier Pfeile als

$$((e, X), v, (f, Y)) \cdot ((f, Y), w, (g, Z)) := ((e, X), vuw, (g, Z)),$$

wobei $u \in \Sigma^*$ ein beliebiges Wort mit $u\varphi = f$ und $u\alpha = Y$ ist. Der Identitätspfeil an dem Objekt (e, X) ist $((e, X), \varepsilon, (e, X))$ und wir erhalten damit eine Multiplikation gemäß der Definition einer Kategorie.

Definition 3.6. *Wir definieren* **CJ** *als die Menge aller endlichen Monoide M, für die ein Homomorphismus $\varphi : \Sigma^* \to M$ von einem freien Monoid nach M existiert, so dass $C_\varphi(M)$ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid teilt.*

In Abschnitt 4 werden wir zeigen, dass die Kategorie $C_\varphi(M)$ eng mit der Varietät $\boldsymbol{V_2}$ der Straubing-Hierarchie verbunden ist. Während für den Beweis nur in einer Richtung von Bedeutung, liefert uns Lemma 3.7 eine Möglichkeit, die Bedingung $M \in \mathbf{CJ}$ effektiv nachzuprüfen. Der nicht triviale Beweis der Aussage findet sich, mit anderem Hintergrund, in Knasts Beweis [Kna83a] der Entscheidbarkeit der Sprachen der Stufe Eins in der Brzozowski Hierarchie. Ein einfacherer Beweis im Rahmen der Kategorientheorie findet sich in [The88].

Lemma 3.7. *Sei C eine endliche Kategorie. Es gibt ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid M mit $C \prec M$ genau dann, wenn ein $n > 0$ existiert, so dass für alle $a, b \in \mathrm{Obj}(C), q, s \in \mathrm{Hom}(a, b), r, t \in \mathrm{Hom}(b, a)$ folgende Gleichung erfüllt ist:*

$$(qr)^n qt(st)^n = (qr)^n(st)^n.$$

Die Pfeile uv, xy beginnen und enden jeweils an dem gleichen Knoten in $\mathrm{Obj}(C)$. Da C ein $\mathcal{J}$-triviales und damit insbesondere ein aperiodisches Monoid teilt, bilden die Pfeile $Hom(c, c)$ für alle $c \in \mathrm{Obj}(C)$ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid. Es gelten also für $n := |\mathrm{Hom}(C)|$ die Gleichheiten $(xy)^n = (xy)^{n+1}$ und $(uv)^n = (uv)^{n+1}$. Ist also C wie gefordert endlich, so muss, durch die berechenbare obere Schranke an n, lediglich eine endliche Anzahl von Gleichungen überprüft werden. Insbesondere ist also entscheidbar, ob eine Kategorie ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid teilt.

3.3 Das Schützenbergerprodukt

Das Schützenbergerprodukt ist das letzte Werkzeug zu Straubings Beweis. Ursprünglich in [Sch65] von Schützenberger als binäres Produkt zweier endlicher Monoide definiert und von Straubing in [Str81] auf ein n-näres Produkt erweitert, liefert es uns einen neuen Blickwinkel auf bestimmte Varietäten von Sprachen. Insbesondere jedoch die notwendigen Grundlagen, um die Varietät $\boldsymbol{V_2}$ mit gewissen Kongruenzen über einem endlichen Alphabet zu verknüpfen. Der Zusammenhang zwischen dem Schützenbergerprodukt und Straubings Dot-Depth-Hierarchie $\boldsymbol{V_i}$ wurde in [PS81] von Pin und Straubing vorgestellt.

Seien $M_1, \ldots M_n$ endliche Monoide und $\mathcal{P}(M_1 \times \cdots \times M_n)$ die Potenzmenge von $M_1 \times \cdots \times M_n$. Die Multiplikation in den Monoiden überträgt sich auf die Potenzmenge, indem wir XY für zwei Mengen $X, Y \in \mathcal{P}(M_1 \times \cdots \times M_n)$ als $XY := \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}$ definieren. Weiter definieren wir eine Addition durch $X + Y := X \cup Y$, wodurch $\mathcal{P}(M_1 \times \cdots \times M_n)$ zu einem Halbring mit Einselement $\{(1, \ldots, 1)\}$ und Nullelement $\emptyset$ wird. Dies erlaubt uns, das Monoid $\mathcal{M}$ aller $n \times n$ Matrizen über diesem Halbring zu betrachten, und wir definieren das Schützenbergerprodukt von $M_1, \ldots, M_n$ wie folgt.

Definition 3.8. *Das* **Schützenbergerprodukt** $\boldsymbol{\Diamond(M_1,\dots,M_n)}$ **von** $M_1,\dots,M_n$ *ist das Untermonoid von* $\mathcal{M}$ *aller Matrizen* P *mit*

(i) $P_{i,j} = \emptyset$, *falls* $i > j$

(ii) $P_{i,j} = \{(1,\dots,1,s_i,1,\dots,1)\}$ *für ein* $s_i \in M_i$, *falls* $i = j$

(iii) $P_{i,j} \subseteq \{(1,\dots,1,s_i,s_{i+1},\dots s_j,1,\dots 1) : s_k \in M_k\}$ *, sonst*

Weiter bezeichnen wir für eine Varietät $\boldsymbol{V}$ endlicher Monoide mit $\Diamond\boldsymbol{V}$ die kleinste Varietät, die alle Schützenbergerprodukte $\boldsymbol{\Diamond(M_1,\dots,M_n)}$ der Monoide $M_i \in \boldsymbol{V}$ enthält. Es lässt sich zeigen ([PS81]), dass das Schützenbergerprodukt

$$\boldsymbol{\Diamond(M_1,\dots,M_n)} \times \boldsymbol{\Diamond(M'_1,\dots,M'_m)}$$

ein Untermonoid von $\boldsymbol{\Diamond(M_1,\dots,M_n,M'_1,\dots,M'_m)}$ ist. Es gilt also, dass ein Monoid M genau dann in $\Diamond\boldsymbol{V}$ einer Varietät $\boldsymbol{V}$ liegt, wenn M ein Schützenbergerprodukt $\boldsymbol{\Diamond(M_1,\dots,M_n)}$ mit $M_i \in \boldsymbol{V}$ teilt.
Weiter merken wir an, dass das Schützenbergerprodukt weder symmetrisch noch assoziativ ist. $\boldsymbol{\Diamond(M_1,M_2,M_3)}$, $\boldsymbol{\Diamond(\Diamond(M_1,M_2),M3)}$ und $\boldsymbol{\Diamond(M_1,\Diamond(M_2,M_3))}$ können also verschiedene Monoide liefern.

Wie in Abschnitt 2 bereits erwähnt, gilt $\boldsymbol{J_1} \subsetneq \boldsymbol{\mathcal{J}} \subsetneq \boldsymbol{\mathcal{R}} \subsetneq \mathbf{DA}$ sowie $\boldsymbol{J_1} \subsetneq \boldsymbol{\mathcal{J}} \subsetneq \boldsymbol{\mathcal{L}} \subsetneq \mathbf{DA}$. Wir zitieren nun einen Satz aus [PS81] und [Pin86], der uns zeigt, dass diese Varietäten unter dem Schützenbergerprodukt zusammenfallen. Der Beweis dort ist nicht schwierig, würde jedoch zusätzliche Begriffsbildungen erfordern, die für den Satz von Straubing nicht von Bedeutung sind.

Lemma 3.9. *Es gilt* $\boldsymbol{V_2} = \Diamond\boldsymbol{J_1} = \Diamond\boldsymbol{\mathcal{J}} = \Diamond\boldsymbol{\mathcal{L}} = \Diamond\boldsymbol{\mathcal{R}} = \Diamond\mathbf{DA}$.

Wir haben also nun eine gewisse Freiheit, welche Varietäten wir unter dem Schützenbergerprodukt betrachten, um Enthaltensein in $\boldsymbol{V_2}$ nachzuweisen. Dies erlaubt uns, Straubings Charakterisierung von $\boldsymbol{V_2}$ zusammen mit dem folgenden Lemma zu beweisen.

Lemma 3.10. *Sei* $\boldsymbol{V}$ *eine Varietät endlicher Monoide und* M *ein endliches Monoid. Es gilt* $M \in \Diamond\boldsymbol{V}$ *genau dann, wenn für jedes endliche Alphabet* Σ *und jeden Homomorphismus* $\varphi : \Sigma^* \to M$ *eine Kongruenz* β *auf* Σ^* *sowie ein* $k \geq 0$ *existiert, so dass* $\Sigma^*/\beta \in \boldsymbol{V}$ *und* φ *von* $[\beta, k]$ *verfeinert wird.*

Wir werden dieses Lemma im folgenden Abschnitt dazu verwenden mit Hilfe einer speziellen Kongruenz $\cong$ nachzuweisen, dass ein Monoid M in $\Diamond\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{V_2}$ enthalten ist. Da wir auf beiden Seiten mit Varietäten arbeiten, wird es genügen die Bedingung für einen surjektiven Homomorphismus, in unserem Fall einen syntaktischen Morphismus einer Sprache über einem Alphabet Σ, nachzuweisen.

Beweis. Wir werden folgende Eigenschaften des Schützenbergerprodukts benötigen:

(i) Sind $L_0, \ldots, L_k \subseteq \Sigma^*$ und $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$, so gilt

$$M(L_0 a_1 L_1 \ldots a_k L_k) \prec \Diamond(\boldsymbol{M(L_0), \ldots, M(L_k)}).$$

Das syntaktische Monoid der Sprache $L_0 a_1 L_1 \ldots a_k L_k$ teilt also das Schützenbergerprodukt der syntaktischen Monoide der Sprachen L_i. Seien φ_i die syntaktischen Homomorphismen der Sprachen L_i. Wir definieren uns einen Homomorphismus $\eta : \Sigma^* \to \Diamond(\boldsymbol{M(L_0), \ldots, M(L_k)})$, indem wir $(w\eta)_{i,j}$ auf die Menge aller (j-i+1)-Tupel $(w_1\varphi_1, \ldots w_k\varphi_k)$ setzen, für die $w = w_i a_{i+1} w_{i+1} \ldots a_j w_j$ gilt. η ist tatsächlich ein Homomorphismus und wie in [Str81] lässt sich zeigen, dass ein $X \subseteq \Diamond(\boldsymbol{M(L_0), \ldots, M(L_k)})$ existiert, für das $L_0 a_1 L_1 \ldots a_k L_k = X\eta^{-1}$ gilt.

(ii) Ist $\eta : \Sigma^* \to \Diamond(\boldsymbol{M(L_0), \ldots, M(L_k)})$ ein Homomorphismus und m ein Element von $\Diamond(\boldsymbol{M_0, \ldots, M_k})$, so ist $m\eta^{-1}$ eine boolsche Kombination von Mengen der Form $L_0 a_1 L_1 \ldots a_k L_k$ mit $M(L_i) \prec M_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, k\}$ und $a_i \in \Sigma$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$. Der Beweis, für syntaktische Morphismen, findet sich in [PS81].

$\Longrightarrow$: Sei $M \in \Diamond\boldsymbol{V}$ und $\varphi : \Sigma^* \to M$ ein (syntaktischer) Homomorphismus. Da M in einer Varietät von Schützenbergerprodukten liegt, faktorisiert φ durch einen weiteren Morphismus $\psi : \Sigma^* \to \Diamond(\boldsymbol{M_0, \ldots, M_k})$, wobei $M_i \in \boldsymbol{V}$ für alle $i \in \{0, \ldots, k\}$. Nach (ii) ist $m\psi^{-1}$ für alle $m \in M$ eine boolsche Kombination von Sprachen der Form $L_0 a_1 L_1 \ldots a_k L_k$, mit $M(L_i) \prec M_i$. Sei nun β der Schnitt aller syntaktischen Kongruenzen der L_i, die wir auf diese Weise erhalten. Dann gilt $\Sigma^*/\beta \in \boldsymbol{V}$ und weiter folgt aus $w_1[\beta, k]w_2$ und $w_1 \in L_0 b_1 L_1 \ldots b_k L_k$, dass w_2 in L liegt. Also wird ψ und somit auch φ durch $[\beta, k]$ verfeinert.

$\Longleftarrow$: Sei M ein Monoid, das die Bedingungen des Lemmas efüllt. Seien weiter $\varphi : \Sigma^* \to M$ ein surjektiver Homomorphismus und β eine Kongruenz auf Σ mit $\Sigma/\beta \in \boldsymbol{V}$, für die ein k existiert, so dass φ von $[\beta, k]$ verfeinert wird. Nach Definition der Verfeinerung ist jede $[\beta, k]$-Klasse eine boolsche Kombination von Mengen der Form $L_0 a_1 L_1 \ldots a_k L_k$, wobei jedes L_i eine β-Klasse repräsentiert.
Da $[\beta, k]$ eine Verfeinerung von φ und $\boldsymbol{V}$ eine Varietät endlicher Monoide ist, ist $m\varphi^{-1}$ für jedes $m \in M$ eine endliche Vereinigung von $[\beta, k]$-Klassen. Aus [Str81] und der Tatsache, dass alle β-Klassen zu $\boldsymbol{V}$ gehören, wissen wir, dass M das direkte Produkt aller $m\varphi^{-1}$ teilt. (i) liefert uns also $M \in \Diamond\boldsymbol{V}$, da $\Diamond\boldsymbol{V}$ selbst eine Varietät ist. $\square$

4 Die Varietät $\boldsymbol{V_2}$

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Straubings Charakterisierung [Str88] der Varietät $\boldsymbol{V_2}$ für Sprachen über einem zweielementigen Alphabet.

Satz 4.1 (Straubing)**.** *Für ein Monoid M, das von 2 Elementen erzeugt wird, gilt*

$$M \in \boldsymbol{V_2} \iff M \in \mathbf{CJ}$$

Für Monoide mit mehr Erzeugern ist, bis auf einige Spezialfälle, noch immer unbekannt, ob diese Äquivalenz erfüllt ist. Wir werden jedoch, auf eine andere Art als Straubing, zeigen, dass zumindest eine Richtung für Monoide mit beliebig vielen Erzeugern gilt.

Satz 4.2. $\boldsymbol{V_2} \subseteq \mathbf{CJ}$

Hierfür wird insbesondere die Charakterisierung des Schützenbergerprodukts gemäß Lemma 3.10 Verwendung finden.

4.1 $\boldsymbol{V_2} \subseteq \mathbf{CJ}$

Sei L eine Dot-Depth 2 Sprache über einem minimalen Alphabet Σ und $M \in \boldsymbol{V_2}$ das zu L gehörige syntaktische Monoid, sowie φ der syntakische Morphismus $\varphi : \Sigma^* \to M$ von L. Aus Lemma 3.9 wissen wir $\Diamond \boldsymbol{J_1} = \boldsymbol{V_2}$. Also liefert uns Lemma 3.10 eine Kongruenz über Σ^*, mit $\Sigma^*/\alpha \in \boldsymbol{J_1}$, sowie eine natürliche Zahl k, für die $[\alpha, k]$ eine Verfeinerung von φ ist.
Durch die besondere Struktur von $\boldsymbol{J_1}$ können wir annehmen, dass α die Alphabetisierung ist, die jedes Wort auf die Klasse der Wörter mit gleichem Alphabet abbildet. Ist dies nicht gegeben, so ist die Alphabetisierung aufgrund der Kommutativität und Idempotenz aller Monoide in $\boldsymbol{J_1}$ eine Verfeinerung von α. Also gilt insbesondere, dass die k-te Verfeinerung der Alphabetisierung auch eine Verfeinerung von $[\alpha, k]$ und damit von φ sein muss.

Unser Ziel ist nun zu Elementen aus der Pfadbedingung von $\mathbf{CJ}$ Wörter über Σ^* zu konstruieren. Für diese werden wir mit Hilfe der Verfeinerung $[\alpha, k]$ zeigen, dass sie durch φ auf dasselbe Element in M abgebildet werden. Gelingt uns dies für alle Elemente, welche die Pfadbedingung erfüllen müssen, so haben wir $M \in \mathbf{CJ}$ gezeigt.

Nach Lemma 3.7 müssen wir für alle $q, s \in \mathrm{Hom}_{C_\varphi(M)}(a, b)$, $r, t \in \mathrm{Hom}_{C_\varphi(M)}(b, a)$ die Gültigkeit der Gleichung

$$(qr)^n qt(st)^n = (qr)^n(st)^n$$

für $n > 0$ nachweisen. Die Objekte in $C_\varphi(M)$ sind Tupel (e, X), für die ein $w \in \Sigma^*$ mit $w\alpha = X$ existiert. Da nur zusammenhängende Objekte in Lemma 3.7 betrachtet werden und die Äquivalenz von Pfeilen über φ definiert ist müssen wir also zeigen, dass für alle idempotenten $e, f \in M$ mit $f \in M_e$ und alle $x, y, u, v \in M_e$ folgende Formel gilt:

$$(exfye)^\omega exfve(eufve)^\omega$$

Das Enthaltensein in M_e entspricht dabei der Bedingung des gleichen Alphabets über Σ^*, da die Bilder von Σ unter φ eine Erzeugermenge von M darstellen. Wir merken an, dass dies dies der Bedingung für das Enthaltensein in $\boldsymbol{B_1}$, eingeschränkt auf eine Teilmenge von M, entspricht.

Seien also nun $e = e^2, f = f^2, x, y, u, v \in M$ mit $x, y, u, v \in M_e = M_f$. Wir wählen Wörter $w_e, w_f, w_x, w_y, w_u, w_v \in \Sigma^*$, die jeweils durch φ auf das in ihrem Index stehende Element von M abgebildet werden. Zusätzlich fordern wir, dass w_e und w_f maximales Alphabet besitzen, wodurch insbesondere auch $w_e\alpha = w_f\alpha$ sichergestellt ist. Dies ist aufgrund der Idempotenz von e und f, und da wir lediglich Idempotente mit gleicher Erzeugermenge betrachten, stets möglich. Da M das zu L gehörige syntaktische Monoid ist, exisiteren alle diese Wörter. Unser Ziel ist zu zeigen, dass

$$(exfye)^\omega exfve(eufve)^\omega = (exfye)^\omega(eufve)^\omega \tag{1}$$

gilt. Um die Gleichheit in M zu zeigen, definieren wir nun zwei weitere Wörter w_1, w_2 über Σ. Diese werden so gewählt, dass sie, aufgrund der Idempotenz von e und f, unter φ auf die jeweils linke bzw. rechte Seite von Gleichung 1 abgebildet werden. Sei im Folgenden $\ell := max\{\omega, 2k+1\}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} w_1 &:= \underbrace{(w_e^\ell w_x w_f^\ell w_y w_e^\ell)^\ell w_e^\ell}_{(2)} w_x \underbrace{w_f^\ell}_{(4)} w_v \underbrace{w_e^\ell (w_e^\ell w_u w_f^\ell w_v w_e^\ell)^\ell}_{(3)} \\ w_2 &:= (w_e^\ell w_x w_f^\ell w_y w_e^\ell)^\ell \underbrace{w_e^\ell}_{(1)} (w_e^\ell w_u w_f^\ell w_v w_e^\ell)^\ell \end{aligned}$$

und zeigen nun, dass w_1 und w_2 äquivalent modulo $[\alpha, k]$ sind.

$\mathbf{w_2} \preceq_{[\alpha,\mathbf{k}]} \mathbf{w_1}$: Sei eine beliebige Aufteilung gemäß der Definition von $[\alpha, k]$ gegeben. Wir fassen die einzelnen Buchstaben a_i nun als Markierungen in w_2 auf und übertragen diese in geeigneter Weise auf w_1, ohne die zwischen den Markierungen liegenden Klassen modulo der Kongruenz α zu verändern.
Da ℓ groß genug, insbesondere größer als k, gewählt wurde, gibt es mindestens einen Faktor w_e in dem Teilwort (1) von w_1, der keine Markierung enthält. In einer Aufteilung gemäß der Kongruenz $[\alpha, k]$ liegt dieser also in einem Block, der unter α maximal ist und damit alle Erzeuger von e enthält.
Nun nehmen wir alle Markierungen, die links von diesem Faktor liegen, und verteilen sie von links, auf die gleiche Weise, wie sie in w_2 vorkamen, auf den mit (2) markierten Teil in w_1. Ebenso nehmen wir alle Markierungen die rechts von diesem Faktor liegen und verteilen sie, dieses mal von rechts, auf den mit (3) markierten Teil von w_1.
Die Markierungen, die wir auf diese Art erhalten, liefern uns nun eine Aufteilung von w_2 gemäß der Kongruenz $[\alpha, k]$. Die α-Klassen zwischen den Markierungen, die komplett in (2) oder (3) liegen, sind exakt die gleichen wie in der Aufteilung in w_2. Der Teil, der zwischen (2) und (3) liegt, enthält gar keine Markierung und liegt dadurch, da w_e, w_f, w_x

alle aus dem gleichen Alphabet konstruiert wurden und w_e, w_f beide das volle Alphabet enthalten, in der gleichen α-Klasse wie w_e.
Damit liegen also alle Blöcke zwischen den Markierungen in w_1,w_2 in der gleichen α-Klasse und die Buchstaben an den Markierungen stimmen ebenfalls überein. Da dies für jede Aufteilung von w_2 möglich ist, gilt also $w_2 \preceq_{[\alpha,k]} w_1$.

$\mathbf{w_1} \preceq_{[\alpha,\mathbf{k}]} \mathbf{w_2}$: Hier verwenden wir dieselbe Idee, müssen jedoch eine etwas kompliziertere Aufteilung wählen. Als erstes bemerken wir, dass ℓ so groß gewählt wurde, dass unabhängig von der gewählten Markierung in w_1 stets mindestens 2 aufeinander folgende Blöcke $(w_e^\ell w_x w_f^\ell w_y w_e^\ell)^\ell$ in (2) ohne Markierung sein müssen. Ebenso gibt es mindestens 2 aufeinanderfolgende Blöcke in (3) ohne Markierung. Dadurch ist es uns möglich, in (2) und (3) jeweils einen Block zu streichen, ohne die $[\alpha, k]$-Klasse von w_1 zu verändern.
Weiter finden wir wie im ersten Fall einen Faktor w_f von (4), der keine Markierung besitzt, und versuchen nun die Markierungen der linken und rechten Seite in w_2 unterzubringen. Hierzu spalten wir zwei Blöcke ab und erhalten damit das folgende Bild:

$$w_2 = \underbrace{(w_e^\ell w_x w_f^\ell w_y w_e^\ell)^{\ell-1}(w_e^\ell w_x w_f^\ell}_{(5)} w_y w_e^\ell) w_e^\ell (w_e^\ell w_u \underbrace{w_f^\ell w_v w_e^\ell)(w_e^\ell w_u w_f^\ell w_v w_e^\ell)^{\ell-1}}_{(6)}$$

Wir verteilen nun die Markierungen links von (4) auf das linke und die Markierungen rechts von (4) auf das rechte Teilwort von w_2. Dies ist möglich, ohne die α-Klassen zwischen den Blöcken zu verändern, da wir auf beiden Seiten jeweils einen der ℓ Blöcke streichen konnten, ohne diese in w_1 zu verändern. Der Block zwischen (5) und (6) enthält keine Markierungen und besitzt volles Alphabet, da mindestens ein w_e in ihm vorkommt. Er ist also α-äquivalent zu dem Block zwischen den entsprechenden Markierungen in w_1. Damit stimmen die α-Klassen zwischen allen Markierungen in w_1 und w_2 überein und wir erhalten damit das gewünschte Ergebnis.

Da $w_1 \preceq_{[\alpha,k]} w_2$ und $w_2 \preceq_{[\alpha,k]} w_1$, sind w_1, w_2 also äquivalent modulo $[\alpha, k]$ und somit nach Lemma 3.10 auch unter φ. Da e, f beide idempotent waren, können die zugehörigen ℓ Potenzen unter φ ignoriert werden und wir erhalten damit das gewünschte Ergebnis in M:

$$(exfye)^\omega exfve(eufve)^\omega = (exfye)^\omega(eufve)^\omega$$

Und damit $M \in \mathbf{CJ}$. □

4.2 Die Äquivalenz für zwei Erzeuger

Satz 4.2 lieferte uns eine notwendige Bedingung für das Enthaltensein eines Monoids in der Varietät $\boldsymbol{V_2}$. Um zu zeigen, dass diese Bedingung für Monoide mit maximal zwei Erzeugern auch hinreichend ist, werden wir nun Straubings Beweis [Str88] in einer leicht modifizierten Version vorstellen.
Hierfür benötigen wir einige weitere Hilfsmittel. Unter anderem werden wir aus der Kategorie $C_\varphi(M)$ eine weitere Kategorie D_γ ableiten, die uns für das zu φ gehörende Monoid $M \in \mathbf{CJ}$ Aussagen über eine spezielle Kongruenz $\cong$ liefert, die wiederum eng

mit φ verknüpft ist. Diese erlauben uns dann, unter Verwendung von Lemma 3.10, das Enthaltensein von M in $\boldsymbol{V_2} = \Diamond \boldsymbol{J}$ nachzuweisen.

4.2.1 Die Kongruenz $\cong$

Zuerst werden wir die angesprochene Kongruenz einführen, um anschließend die von uns benötigten Eigenschaften nachzuweisen. Sei im Folgenden $A = \{a, b\}$ ein zweielementiges Alphabet sowie $\varphi : A^* \to M$ ein surjektiver Homomorphismus in ein endliches aperiodisches Monoid M.

Zu jedem Wort $w \in A^*$ existiert eine eindeutige Faktorisierung $w = w_k \dots w_1$ in $k \geq 0$ Blöcke, im Folgenden **Blockfaktorisierung** genannt, so dass jeder Block aus einer maximalen, nichtleeren sowie endlichen Folge gleicher Buchstaben besteht. Das Wort $aabaaabba$ besitzt beispielsweise die Faktorisierung $w_5w_4w_3w_2w_1$ mit $w_5 = aa, w_4 = b, w_3 = aaa, w_2 = bb, w_1 = a$. Die Eindeutigkeit erhalten wir aus der Eigenschaft, dass die Folgen von Buchstaben stets maximal gewählt werden müssen.
Sei nun $T = |M|$. Im Folgenden wollen wir Wörter, bzw. einzelne Blöcke unserer Faktorisierung, $w_1, w_2 \in a^* \bigcup b^*$ in Relation zueinander setzen. Wir werden sie als **gleich bezüglich** T, in Zeichen $w_1 \equiv w_2$, ansehen, wenn beide aus demselben Buchstaben bestehen, sowie entweder $|w_1| = |w_2|$ oder $|w_1|, |w_2| \geq T$ gilt. Aufgrund der Wahl von T folgt $w_1\varphi = w_2\varphi$ aus $w_1 \equiv w_2$, da $\omega \leq T = |M|$ in endlichen, aperiodischen Monoiden. Hiervon ausgehend definieren wir nun eine Kongruenz auf den Wörtern von A^*.

Definition 4.3 ($\cong$). *Seien $w, v \in A^*$ sowie $w = w_k \dots w_1, v = v_\ell \dots v_1$ deren Blockfaktorisierungen. Wir definieren $\mathbf{w} \cong \mathbf{v}$ gdw. $w_i \equiv v_i$ für alle $i \in \{1, \dots, \min(k, 2T)\}$ sowie $k = \ell$ oder $k, \ell > 2T$ gilt.*

Wir werden die soeben definierte Relation nun genauer untersuchen sowie einige Eigenschaften nachweisen, die wir an späterer Stelle benötigen werden. Als erstes weisen wir nach, dass $\cong$ tatsächlich eine Kongruenz ist:

Lemma 4.4. *$\cong$ ist eine Kongruenz auf A^* mit endlichem Index.*

Beweis. Als erstes bemerken wir, dass $\cong$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation darstellt. Dies folgt sofort aus der Definition, da bei äquivalenten Wörtern stets die Anzahl der Blöcke in der Faktorisierung gemäß der Definition übereinstimmen müssen, sowie die entsprechenden ersten $2T$ Blöcke gemäß $\equiv$ äquivalent sind.

Weiter stellt $\cong$ sogar eine Kongruenz dar. Hierfür betrachten wir zwei Wörter $w, v \in A^*$ mit $w \cong v$. Da nach Definition die Blöcke, die am weitesten rechts stehen, $\equiv$-äquivalent sein müssen, bestehen sie aus dem gleichen Buchstaben und es gilt entweder $|w_1| = |w_2|$ oder $|w_1|, |w_2| \geq T$. Wird also dieser Buchstabe an beide Blöcke angehängt, so sind diese immer noch $\equiv$-äquivalent. Wird dagegen der zweite Buchstabe des Alphabets angehängt, so entstehen bei beiden Wörtern neue Blöcke, wobei die maximal $2T - 1$ Blöcke, welche links von diesem stehen, nach Voraussetzung äquivalent sind. Es gilt also $wa \cong va$ sowie $wb \cong vb$.

Wird dagegen ein Buchstabe links angehängt, so kommt dieser entweder in einem Block mit Index $> 2T$, der von $\cong$ nicht mehr betrachtet wird, zu liegen oder sorgt mit gleicher Argumentation wie im letzten Fall dafür, dass $aw \cong av$ und $bw \cong bv$ gilt.
Also ist $\cong$ eine Kongruenz über A^*.

Die für die Bestimmung einer Klasse modulo $\cong$ betrachteten Blöcke der Blockfaktorisierung ist durch $2T$ beschränkt. Weiter gibt es, da A genau zwei Buchstaben enthält, maximal $2(T+1)$ Klassen von Blöcken modulo $\equiv$. Die Menge aller Klassen modulo $\cong$, und damit auch der Index von $\cong$, muss also endlich sein. □

Nachdem wir festgestellt haben, dass $\cong$ tatsächlich eine Kongruenz auf A^* darstellt, wollen wir nun die benötigten Eigenschaften nachweisen. Das erste Lemma wird uns, durch die Gleichheit $\Diamond\boldsymbol{L} = \boldsymbol{V_2}$, später erlauben Lemma 3.10 anzuwenden.

Lemma 4.5. $A^*/\cong \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$.

Beweis. Seien $u, v, w \in A^*$ sowie $uvw \cong w$.
Aus der Definition von $\cong$ wissen wir, dass es zwei mögliche Fälle gibt. Zum einen kann die Blockfaktorisierung von w mehr als $2T$ Blöcke besitzen, woraus automatisch $vw \cong w$ folgt, da u (und sogar v) keine Auswirkung auf die Klasse modulo $\cong$ hat. Hat w dagegen weniger Blöcke, so folgt aus $uvw \cong w$, dass uv aus maximal einem Buchtaben besteht, da sonst die Anzahl der Blöcke in uvw und w nicht mehr zusammenpassen. Weiter muss uv entweder das leere Wort sein oder der Block von w, der am weitesten links steht, bereits mindestens Länge T besitzen, da sonst eben dieser in uvw nicht mit dem in w übereinstimmen würde. Damit erhalten wir $vw \cong w$ und können nun die gewünschte Aussage folgern.
$(A^*/\cong)[w_1]_\cong = (A^*/\cong)[w_2]_\cong$ impliziert, dass sich die Klasse von w_2 durch Linksmultiplikation aus der Klasse von w_1 erreichen lässt. Damit folgt mit der vorhergehenden Überlegung $[w_1]_\cong = [w_2]_\cong$. $(A^*/\cong)$ ist also $\mathcal{L}$-trivial und damit insbesondere in $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, da $\cong$ nur endlich viele Klasse erzeugt. □

Einen alternativen Beweis erhält man durch Königs Charakterisierung $\mathcal{L}$-trivialer Monoide [Kö85]. Eine genauere Untersuchung der Kongruenz $\cong$ zeigt, dass diese durch die für $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ charakteristische Kongruenz verfeinert wird. Hieraus ließe sich dann direkt $A^*/\cong \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$ schließen.

Die beiden folgenden Lemmata sind eher technischer Natur und werden an späterer Stelle im Beweis Verwendung finden. Das erste zeigt uns, dass wir in jedem lang genug gewählten Wort $w \in A^*$ einen rechtsseitigen Stabilisator unter der Abbildung φ finden. Insbesondere finden wir sogar ein idempotentes Element von M, das, wieder unter φ, die gleichen stabilisierenden Eigenschaften besitzt.

Lemma 4.6. *Sei $k > 2T$. Sei weiter $w \in A^*$ ein Wort mit Blockfaktorisierung $w = w_k \dots w_1$. Dann gibt es ein idempotentes Element $e \in M$, so dass*

(i) eine Faktorisierung $w = uv$ existiert, mit $v = w_j \dots w_1$ für ein $j < 2T$, sowie $w_{2T} \dots w_{j+1}\varphi e = w_T \dots w_{j+1}\varphi$.

(ii) $M_e = M$ gilt. Die erzeugenden Elemente von e erzeugen also bereits ganz M.

Beweis. Sei $z_i = w_{2i}w_{wi-1}$ für $i \in 1, \dots, T$ ein Teilwort von w. Wir betrachten nun alle Produkte der Form $z_T\varphi$, $(z_Tz_{T-1})\varphi$, $\dots$ $(z_T \dots z_1)\varphi$. Sind diese alle verschieden, so erhalten wir auf diese Weise insbesondere alle Elemente von M, da $|B| = T$. Also gibt es darunter auch ein idempotentes Element $e = (z_T \dots z_r)\varphi$, mit den in (i) gewünschten Eigenschaften. Hierfür setzen wir $j := 2(r-1)$ sowie

$$u := w_k \dots w_{2T+1}z_T \dots z_r, \quad v := z_{r-1} \dots z_1$$

und erhalten damit die gewünschten Eigenschaften. $M_e = M$ folgt direkt aus der Tatsache, dass jedes der z_i aus zwei nebeneinander liegenden Blöcken der Blockfaktorisierung besteht und damit bereits volles Alphabet besitzt.
Sind dagegen nicht alle oben genannten Produkte verschieden, so gibt es $r > s$ mit $(z_T \dots z_r)\varphi = (s_T \dots z_s)\varphi$. Wir definieren $e := [(z_{r-1} \dots z_s)\varphi]^T$ und erhalten damit, mit der gleichen Argumentation wie oben, das gewünschte Ergebnis. Das Element $e \in M$ ist tatsächlich idempotent, da $T = |M|$. □

Für das zweite Lemma wählen wir eine beliebige lineare Ordnung auf den idempotenten Elementen $E(M)$ von M. Wir betrachten nun Faktorisierungen $w = uv$, welche die Bedingungen von Lemma 4.6 erfüllen. Dabei soll j so groß wie möglich sein und wir wählen das kleinste idempotente Element, das die Bedingungen erfüllt.Wir nennen nun uv die **Standardfaktorisierung von w**, sowie e das **zu w assoziierte idempotente Element**.

Lemma 4.7. *Seien $w \cong w'$ zwei Wörter aus A^* mit mehr als $2T$ Blöcken. Seien weiter $w = uv$, $w' = u'v'$ die Standardfaktorisierungen sowie e, e' die assoziierten idempotenten Elemente. Es gilt*

(i) v und v' besitzen gleich viele Blöcke.

(ii) $v\varphi = v'\varphi$.

(iii) $e = e'$.

(iv) $uv' \cong u'v \cong w \cong w'$.

Beweis. In Lemma 4.6 werden lediglich die letzten $2T$ Blöcke von w bzw. w' betrachtet. Aus der Definition von $\cong$ wissen wir, dass alle diese Blöcke äquivalent unter $\equiv$ und damit auch unter φ sind. Ein idempotentes Element e, das $w_{2T} \dots w_{j+1}\varphi\, e = w_{2T} \dots w_{j+1}\varphi$ erfüllt, erfüllt also auch $w'_{2T} \dots w'_{j+1}\varphi\, e = w'_{2T} \dots w'_{j+1}\varphi$.

(i) Würde v also nun mehr Blöcke als v' besitzen, so wäre $w' = u''v''$, wegen $w \cong w'$, eine Faktorisierung nach Lemma 4.6, wobei v'' aus gleichvielen Blöcken wie v besteht. Ein möglicher Kandidat für e'' wäre e, wie bereits gezeigt. Dies ist aber ein Widerspruch zur Maximalität der Standardfaktorisierung $w' = u'v'$, also müssen v und v' bereits gleich viele Blöcke besitzen.

(ii) $v\varphi = v'\varphi$ folgt direkt aus $w \cong w'$ sowie der Tatsache, dass v, v' gleichviele und weniger als $2T$ Blöcke besitzen.

(iii) Aus der Vorüberlegung wissen wir, dass jeder Kandidat für e auch ein Kandidat für e' ist. Da wir in der Standardfaktorisierung stets das kleinste idempotente Element wählen, folgt sofort die Gleichheit.

(iv) $uv' \cong uv = w$ folgt direkt da, wie bereits gezeigt, alle Blöcke von $v \cong$-äquivalent zu den entsprechenden Blöcken in v' sind. Ebenso gilt $u'v \cong u'v' = w'$ und damit die ganze Aussage.

□

4.2.2 Die abgeleitete Kategorie D_γ.

Als nächsten Schritt in dem Beweis von Satz 4.1 führen wir nun eine weitere Kategorie D_γ ein. Ausgehend von zwei Homomorphismen φ, η betrachten wir hierfür die induzierte Abbildung $\gamma = \varphi^{-1}\eta$. Da hierbei Urbilder betrachtet werden, müssen wir uns von den Homomorphismen auf das Gebiet der relationalen Morphismen zurückziehen. Für eine tiefere Einführung im Rahmen der Kategorientheorie bietet sich zum Beispiel [Til87] an.

$$\begin{tikzcd} & \Sigma^* \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ M \arrow[rr, "\gamma"] & & N \end{tikzcd}$$

Der relationale Morphismus γ.

Seien im Folgenden M, N endliche Monoide, Σ ein endliches Alphabet, $\varphi : \Sigma^* \to M$ ein surjektiver sowie $\eta : \Sigma^* \to N$ ein beliebiger Homomorphismus. Außerdem sei $\gamma = \varphi^{-1}\eta : M \to N$ der erwähnte relationale Homomorphismus. Wir definieren nun die **von γ abgeleitete Kategorie $\mathbf{D}_\gamma$**.
Als Objektmenge dienen uns die Klassen der Wörter $w \in \Sigma^*$ modulo der durch η induzierten Kongruenz. Formal:

$$\mathrm{Obj}(D_\gamma) := \{w\eta : w \in \Sigma^*\}$$

Als Pfeile verwenden wir Äquivalenzklassen von Tripeln $(w\eta, v, (wv)\eta)$, mit $v, w \in \Sigma^*$. Wir werden zwei Tripel $(w\eta, v_1, (wv_1)\eta), (w\eta, v_2, (wv_2)\eta)$ genau dann als äquivalent betrachten, wenn für alle Wörter $w' \in \Sigma^*$ mit $w'\eta = w\eta$ ebenfalls $w'v_1\varphi = w'v_2\varphi$ gilt.

Eine solche Äquivalenzklasse werden wir mit $[w\eta, v, (wv)\eta]$ bezeichnen. Das Produkt zweier Pfeile $[w\eta, v_1, (wv_1)\eta]$, $[(wv_1)\eta, v_2, (wv_1v_2)\eta]$ definieren wir durch

$$[w\eta, v_1, (wv_1)\eta] \cdot [(wv_1)\eta, v_2, (wv_1v_2)\eta] := [w\eta, v_1v_2, (wv_1v_2)\eta].$$

Das auf diese Weise definierte Produkt ist assoziativ, verträglich mit der oben definierten Äquivalenz von Pfeilen und $[w\eta, 1, w\eta]$ ist die Identität an dem Objekt $w\eta$. D_γ ist also tatsächlich eine Kategorie, die von den Pfeilen $\{[w\eta, s, (wb)\eta] : s \in \Sigma, w \in \Sigma^*\}$ erzeugt wird.

Wir werden nun einen Bezug zwischen der Kategorie $C_\varphi(M)$ und der abgeleiteten Kategorie D_γ herstellen. Durch diesen wird es uns schließlich möglich sein, den Beweis von Satz 4.1 abzuschließen.

Lemma 4.8. *Sei $A = \{a, b\}$, M ein endliches Monoid, $\varphi : A^* \to M$ ein surjektiver Homomorphismus und es teile $C_\varphi(M)$ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid. Sei weiter η die von uns definierte Kongruenz$\cong$ und $\gamma = \varphi^{-1}\cong$ die abgeleitete Kategorie. Dann teilt D_γ ebenfalls ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid.*

Beweis. Nach dem Satz über starke Zusammenhangskomponenten (Satz 3.4), müssen wir lediglich die stark zusammenhängenden Teilkategorien von D_γ betrachten um nachzuweisen, dass D_γ ein $\mathcal{J}$-triviales Monid teilt.
Seien nun $w_1, w_2 \in A^*$, sowie $T = |M|$. Besitzt die Blockfaktorisierung von w_1 höchstens und die von w_2 echt mehr als $2T$ Blöcke, so ist es durch Konkatenation nicht möglich, ein Wort aus $w_2\cong$ in ein zu $w_1\cong$-äquivalentes Wort zu transformieren. Dies folgt aus der Definition von$\cong$, da alle zu w_1 äquivalenten Wörter, aufgrund der geringen Blockzahl, eine gleiche Anzahl nichtleerer Blöcke wie w_1 aufweisen müssen. Die Wörter der Klasse $w_2\cong$, also insbesondere auch alle durch Konkatenation daraus ableitbaren, besitzen aber bereits mindestens $2T + 1$ Blöcke.
Besitzen w_1, w_2 beide höchstens $2T$ Blöcke und liegen die$\cong$ Klassen von w_1, w_2 in der gleichen Zusammenhangskomponente, so müssen beide Wörter nach Definition der Kongruenz bereits in der gleichen$\cong$-Klasse liegen. Besitzt der am weitesten rechts liegende Block der Blockfaktorisierung bereits T a's, so enthält die Komponente gerade alle Pfeile der Art $[w_1\cong, a^\ell, w_1\cong], \ell \geq 0$. Besteht der Block aus mindestens T b's, sind es Pfeile der Art $[w_1\cong, b^\ell, w_1\cong], \ell \geq 0$. Sind dagegen weniger als T Zeichen im rechtesten Block enthalten, so enthält die zugehörige Komponente lediglich die Identität $[w_1\cong, \varepsilon, w_1\cong]$. Die Zusammenhangskomponente der w_i ist also eine einelementige Teilkategorie von D_γ. Diese besteht aus dem Objekt $w_1\cong\ \in\ \mathrm{Obj}(D_\gamma)$ und ist, durch die Art der enthaltenen Pfeile, isomorph zu einem aperiodischen und zyklischen Monoid. Sie teilt also insbesondere ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid.
Nun müssen wir also nur noch starke Zusammenhangskomponenten D von D_γ betrachten, deren Objekte aus $\cong$-Klassen mit mehr als $2T$Blöcken bestehen. Wir definieren hierzu eine Abbildung zwischen den Objekten von D_γ und $C_\varphi(M)$ sowie eine geeignete Überdeckung der Pfeile von D_γ. Anschließend rechnen wir nach, dass diese den Bedingungen der Kategoriendivision genügt, und erhalten damit $D_\gamma \prec C_\varphi(M)$.

Sei $w \in A^*$ ein beliebiges Wort mit mehr als $2T$ Blöcken. Wir betrachten nun, wie in Abschnitt 4.2.1, die Standardfaktorisierung $w = uv$ sowie das zu w assoziierte idempotente Element e. Nach Lemma 4.6 gilt $M_e = M$, e besitzt also das volle Alphabet. Weiter liefert uns 4.7 die Eindeutigkeit von e bezüglich der Klasse $w\cong$. Wir definieren die erwähnte Abbildung $\psi : \mathrm{Obj}(D) \to \mathrm{Obj}(C_\varphi(M))$, indem wir jedes Objekt $w\cong$ auf das Objekt (e, A) abbilden, wobei e das zu w assoziierte idempotente Element ist.
Sei nun $t = [w_1\cong, x, w_2\cong]$ ein beliebiger Pfeil in D, sowie $w_1 = u_1v_1$ und $w_2 = u_2v_2$ die Standardfaktorisierungen von w_1, w_2 mit den assoziierten idempotenten Elementen e_1, e_2. Im Folgenden sei M_t die Menge aller Pfeile $[(e_1, A), z, (e_2, A)]$, für die

(i) $z\varphi \in e_1Me_2 (= e_1M_ee_2)$

(ii) $(wx)\varphi = (uzv_2)\varphi$

für alle $w\cong w_1$ mit Standardfaktorisierung $w = uv$ gilt. Der Rest des Beweises orientiert sich nun an der Definition der Kategoriendivision. Wir müssen zeigen, dass

1.) $M_t \neq \emptyset$.

2.) $s_1 \in M_{t_1}, s_2 \in M_{t_2} \implies s_1s_2 \in M_{t_1t_2}$.

3.) $t_1 \neq t_2 \implies M_{t_1} \bigcap M_{t_2} = \emptyset$.

4.) $t = [w\cong, \varepsilon, w\cong] \implies [(e, A), \varepsilon, (e, A)] \in M_t$.

für alle Pfeile t, t_1, t_2 in D_γ gilt. $[w\cong, \varepsilon, w\cong]$ und $[(e, A), \varepsilon, (e, A)]$ sind dabei die Identitäten an den Objekten $w\cong$ bzw. (e, A).

Im Folgenden seien wieder $t = [w_1\cong, x, w_2\cong]$ ein Pfeil in D_γ sowie $w_1 = u_1v_1, w_2 = u_2v_2$ die Standardfaktorisierungen mit assoziierten Idempotenten e_1, e_2.

Zu 1.) Zuerst betrachten wir w_1x, sowie die zugehörgie Standardfaktorisierung $w_1x = u'v'$. Nach Definition der Pfeile in D_γ gilt $w_1x \cong w_2$. Nach Lemma 4.7 dürfen wir also die Teile der Standardfaktorisierung vertauschen und erhalten damit $v_2\varphi e_2 = v_2\varphi$.
Wäre u' striktes Präfix von u_1 (also kürzer als u_1), so wäre $u'v''$ eine Faktorisierung gemäß Lemma 4.6. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zu der Maximalität der Standardfaktorisierung, also muss nach Konstruktion u_1 ein Präfix von u' sein. Es gilt also $w_1x = u_1qv'$ für ein beliebiges $q \in A^*$.
Sei nun $w\cong w_1$ mit Standardfaktorisierung $w = uv$. Nach Lemma 4.7 können wir die Faktoren der Standardfaktorisierung wieder vertauschen. Dadurch erhalten wir aus $u_1v_1 \cong uv_1$ die Gleichheit

$$u'v' = w_1x = u_1v_1x \cong uv_1x = uqv'.$$

Die Standardfaktorisierung fällt stets auf die Grenze zwischen zwei Blöcken. Somit liefert uns Lemma 4.7 $(uq)\cdot v'$ als Standardfaktorisierung von uv_1x und damit $(uq)\varphi e_2 = (uq)\varphi$. Da, wieder nach Lemma 4.7, $v\varphi = v_1\varphi$ gilt, folgern wir nun

$$(wx)\varphi = (uvx)\varphi = (uv_1x)\varphi = (uqv')\varphi = u\varphi \cdot q\varphi \cdot v'\varphi = u\varphi \cdot q\varphi \cdot v_2\varphi$$

Der Pfeil erfüllt also die Bedingungen (i) und (ii), die wir an die Pfeile in M_t gestellt haben und es gilt $[(e_1, A), q, (e_2, A)] \in M_t \neq \emptyset$.

Zu 2.) Seien $t_1 = [w_1 \cong, x_1, w_2 \cong], t_2 = [w_2 \cong, x_2, w_3 \cong]$ sowie $s_1 = [e_1, z_1, e_2] \in M_{t_1}, s_2 = [e_2, z_2, e_3] \in M_{t_2}$. Nach der Multipliaktion in D_γ gilt $t_1 t_2 = [w_1 \cong, x_1 x_2, w_3 \cong]$. Mit den Bezeichnern der anderen Fälle erhalten wir $(wx_1x_2)\varphi = (uz_1v_2x_2)\varphi$ für ein beliebiges $w \cong w_1$. Wir wählen nun wieder ein $q \in A^*$, so dass $(ua)\varphi e_2 = (uq)\varphi, z_1\varphi = e_1 \cdot n_1\varphi \cdot e_2$ und $uqv_2 \cong wx_1$. Wir erhalten

$$(uz_1x_2)\varphi = (uqz_2v_3)\varphi = (uz_1z_2v_3)\varphi$$

und damit gilt $s_1 s_2 \in M_{t_1 t_2}$.

Zu 3.) Seien $t_1 = [w_1 \cong, x_1, w_2 \cong], t_2 = [w_1 \cong, x_2, w_2 \cong]$ Pfeile in D_γ, $s_1 = [(e_1, A), z_1, (e_2, A)] \in M_{t_1}, s_2 = [(e_1, A), z_2, (e_2, A)] \in M_{t_2}$, sowie $s_1 = s_2$. Nach Definition der Äquivalenz von Pfeilen in $C_\varphi(M)$ folgt $e_1 \cdot z_1\varphi \cdot e_2 = e_1 \cdot z_2\varphi \cdot e_2$.
Da $z_1\varphi, z_2\varphi \in e_1 M e_2$ gilt $z_i\varphi = e_1 n_i e_2$ sowie für $n_i \in M$. Da die e_i idempotent sind, folgt

$$z_1\varphi = e_1e_1n_1e_2e_2 = e_1z_1\varphi e_2 = e_1z_2\varphi e_2 = e_1e_1n_2e_2e_2 = z_2\varphi,$$

womit wir für alle $w \cong w_1$,

$$(wx_1)\varphi = (uz_1v_2)\varphi = (uz_2v_2)\varphi = (wx_2)\varphi$$

erhalten. Nach Definition der Äquivalenz von Pfeilen in D_γ folgt somit $t_1 = t_2$.

Zu 4.) Die Identität für ein beliebiges Objekt $w \cong$ in D ist $s = [w \cong, \varepsilon, w \cong]$. Das assoziierte idempotente Element sei wieder e. Dann wird s von der Identität $t = [(e, A), \varepsilon, (e, A)]$ an (e, A) überdeckt.

Unsere Überdeckung erfüllt also alle notwendigen Eigenschaften und somit können wir folgern, dass $D \prec C_\varphi(M)$ und damit insbesondere D_γ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid teilt. $\square$

4.2.3 Beweis von Straubings Theorem

Nun fehlt uns noch ein letztes Tool um aus der Tatsache, dass D_γ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid teilt, die Äquivalenz in Satz 4.1 zu folgern. Wir werden zeigen, dass wir immer dann, wenn D_γ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid teilt, aus der Kongruenz γ auf die bereits bekannte Weise eine Verfeinerung von φ gewinnen können. Gilt dies, so erlaubt uns Lemma 3.10 schließlich, alles zusammenzusetzen.
Im Folgenden sei wieder ω die unviersale Kongruenz über G^*, die alle Elemente miteinander identifiziert. Es gilt also $u \, \beta \, v$ für alle $u, v \in G^*$.

Lemma 4.9. *Sei $\gamma = \varphi^{-1} \cong$ der bekannte relationale Morphismus, $A = \{a, b\}$ das Alphabet sowie D_γ die abgeleitete Kategorie. Teilt D_γ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid, so existert ein $k \in \mathbb{N}$, für das φ von $[\cong, k]$ verfeinert wird.*

Beweis. Sei G eine Erzeugermenge der Pfeile in D_γ sowie $M \in \boldsymbol{\mathcal{J}}$ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid, das von D_γ geteilt wird. Nach Lemma 3.5 wissen wir, dass eine Kongruenz β existiert, für die der Quotient G^*/β des freien Monoids G^* ebenfalls $\mathcal{J}$-trivial ist. Weiter erhalten wir, dass koterminale Pfeile, deren Repräsentanten $u, v \in G^*$ unter β äquivalent sind, auch in D_γ gleich sein müssen.
Der Satz von Simon liefert uns, dass ein $k \geq 0$ existiert, für das β durch $[\omega, k]$ verfeinert wird. Zwei koterminale Pfeile in D_γ sind also gleich, wenn sie als Pfade in G^* kongruent modulo $[\omega, k]$ sind.
Seien nun $w = a_1 \dots a_r, w' = a'_1 \dots a'_s \in A^*$ mit $w[\cong, k]$ sowie $a_i, a'_i \in A$. Wir definieren

$$\begin{aligned} c_i &:= [(b_1 \dots b_{i-1})\cong, b_i, (b_1 \dots b_i)\cong] \\ c'_i &:= [(b'_1 \dots b'_{i-1})\cong, b'_i, (b'_1 \dots b'_i)\cong] \end{aligned}$$

und damit die Pfade bzw. Wörter $X := c_1 \dots c_r$ sowie $Y := c'_1 \dots c'_s$ in G^*. Diese repräsentieren die Pfeile $x = [\varepsilon\cong, w, w\cong]$ sowie $y = [\varepsilon\cong, w', w'\cong]$ und sind in D_γ koterminal, da $w\cong = w'\cong$.
Sei nun $p \leq k$ und $c_{i_1} \dots c_{i_p}$, mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k$, ein nicht notwendigerweise zusammenhängendes Teilwort von X. w besitzt dann eine Faktorisierung $w = w_0 b_{i_1} w_1 \dots b_{i_p} w_p$ mit $w_o b_{i_1} w_1 b_{i_2} w_2 \dots w_{i_t} = b_1 \dots b_{i_{t+1}-1}$. Da $w[\cong, k]w'$ wissen wir, dass w' nun ebenfalls eine Faktorisierung $w' = w'_0 b_{i_1} \dots b_{i_p} w'_p$ besitzt mit $w_j = w'_j$ für alle $j \in \{0, \dots, p\}$. Also besitzt Y ein nicht notwendigerweise zusammenhängendes Teilwort $d_1 \dots d_p$ mit

$$\begin{aligned} d_j &= [(w'_0 b_{i_1} \dots w'_{i_j-1})\cong, b_{i_j}, (w'_0 b_{i_1} \dots w'_{i_j-1} b_{i_j})\cong] \\ &= [(w_0 b_{i_1} \dots w_{i_j-1})\cong, b_{i_j}, (w_0 b_{i_1} \dots w_{i_j-1} b_{i_j})\cong] = c_{i_j} \end{aligned}$$

und $c_{i_1} \dots c_{i_p}$ ist damit ein Teilwort von Y. Auf dieselbe Weise zeigen wir, dass jedes Teilwort von Y der Länge kleiner gleich k auch ein Teilwort von X ist. Es gilt somit $X[\omega, k]Y$ und damit wie bereits erwähnt auch $x = y$. Hieraus folgt $w\varphi = w'\varphi$ nach Definition der Äquivalenz von Pfeilen in D_γ und wir wissen nun, dass φ von $[\cong, k]$ verfeinert wird. □

Jetzt besitzen wir das notwendige Handwerkszeug um den Beweis von Satz 4.1 zu vervollständigen. Sei $\varphi : A^* \to M$ ein surjektiver Morphismus in ein Monoid M, für das $C_\varphi(M)$ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid teilt.
Ist G eine Untergruppe von M, so enthält G ein neutrales Element $e \in E(M)$ und für alle Elemente $g \in G$ existiert ein inverses Element g^{-1}. Es gilt $eGe = G$ und somit ist G auch eine Untergruppe von eM_ee. Da $C_\varphi(M)$ ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid teilt, gilt dies auch für die Unterkategorie an dem Objekt (e, M_e), welche gerade eM_ee ist. Also sind alle Untergruppen von M $\mathcal{J}$-trivial und damit M aperiodisch.
Nach Lemma 4.8 teilt D_γ ebenfalls ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid und Lemma 4.9 zeigt, dass ein $k \geq 0$ existiert, für das φ von $[\cong, k]$ verfeinert wird. Lemma 4.5 liefert uns $A^*/\cong \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$ und damit erhalten wir schließlich mit Lemma 3.10, dass

$$M = A^*/\varphi \prec A^*/[\cong, k] \in \Diamond\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{V_2}.$$

□

5 $\widetilde{\mathcal{J}}$ und das Mal'cev-Produkt

In diesem Abschnitt werden wir ein weiteres Produkt auf Varietäten von Monoiden bzw. Halbgruppen vorstellen, welche uns eine äquivalente Definition der Varietät **CJ** erlaubt. Weiter verwenden wir Ergebnisse von Pin, Weil [PW01] sowie Knast [Kna83a], um eine ältere Vermutung von Pin und Straubing [PS81] zu widerlegen.

5.1 Das Mal'cev-Produkt

Definition 5.1. *Seien $\boldsymbol{V}$ eine Varietät von Halbgruppen sowie $\boldsymbol{W}$ eine Monoidvarietät. Wir definieren das* **Mal'cev Produkt** $\boldsymbol{V} \textcircled{\scriptsize M} \boldsymbol{W}$ *von $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ als die Klasse aller Quotienten eines Monoids T, so dass ein Homomorphismus $\mu : T \to S$ in ein Monoid $S \in \boldsymbol{W}$ existiert mit $e\mu^{-1} \in \boldsymbol{V}$ für alle idempotenten Elemente $e \in S$.*

Ist $\beta : T \to M$ ein surjektiver Homorphismus, der $M \prec T$ bezeugt, so erhalten wir durch Betrachten von $\tau := \beta^{-1}\mu$ eine äquivalente Definition über den Begriff des relationalen Homomorphismus. $\boldsymbol{V} \textcircled{\scriptsize M} \boldsymbol{W}$ entspricht der Klasse aller Monoide M, für die ein relationaler Homomorphismus $\tau : M \to S$ in ein Monoid $S \in W$ existiert, so dass $\{m \in M : e \in m\tau\} =: e\tau^{-1} \in \boldsymbol{V}$ gilt.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ M \arrow[rr, "\tau = \beta^{-1}\mu"] & & S \end{tikzcd}$$

Situation eines Monoids $M \in \boldsymbol{V} \textcircled{\scriptsize M} \boldsymbol{W}$

In [Wei93] zeigte Weil, dass die in Abschnitt 4 betrachtete Varietät **CJ** der Monoide, für die die Kategorie **CJ** ein $\mathcal{J}$-triviales Monoid teilt, gerade dem Mal'cev-Produkt $\boldsymbol{B_1} \textcircled{\scriptsize M} \boldsymbol{J}_1$ entspricht. Pin und Weil zeigten den ersten Teil der folgenden Ungleichung in [PW96] sowie den zweiten in [PW01]. Es gilt

$$\boldsymbol{B_1} \textcircled{\scriptsize M} \boldsymbol{J}_1 = \boldsymbol{B_1} \textcircled{\scriptsize M} \boldsymbol{J} \subsetneq \boldsymbol{B_1} \textcircled{\scriptsize M} \boldsymbol{R}.$$

Pin und Straubing bewiesen in [PS81] die Inklusion $\boldsymbol{V_2} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$, die unter anderem auch direkt aus der Charakterisierung $\mathbf{CJ} = \boldsymbol{B_1} \textcircled{\scriptsize M} \boldsymbol{J}_1$ in [Wei93] folgt. Weiter stellten sie die Vermutung auf, dass die Varietäten $\boldsymbol{V_2}$ und $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$ gleich sind, wodurch wir ein Entscheidungsverfahren für die Dot-Depth 2 Sprachen hätten. Wie wir im Folgenden anhand eines Beispiels sowie einer schwächeren hinreichenden Bedingung für das Enthaltensein in $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$ sehen werden, ist diese Vermutung jedoch falsch.

Hierfür benötigen wir eine Charakterisierung der Varietät $\boldsymbol{\mathcal{R}} \vee \boldsymbol{\mathcal{L}}$ aus [AA89], welche auf der Arbeit von König [Kö85] beruht. Sei Σ ein endliches Alphabet, $\alpha : \Sigma^* \to 2^\Sigma$ der Homomorphismus, der jedem Wort w dessen Alphabet $\{a \in \Sigma : w = w_1 a w_2 \text{ mit } w_1, w_2 \in \Sigma^*\}$

zuweist. Seien weiter ρ_k und λ_k die von den Relationen

$$
\begin{aligned}
R_k &:= \{(ua, u) : a \in \Sigma, u = u_1 \dots u_k \text{ mit } a \in u_k\alpha \subseteq \dots \subseteq u_1\alpha\} \\
L_k &:= \{(au, u) : (u^r a, u^r) \in R_k\}
\end{aligned}
$$

erzeugten Kongruenzen auf Σ^*. Damit erhalten wir folgende Charakterisierung:

Lemma 5.2. *[AA89] Sei $M = \Sigma^*/\varphi$ ein Monoid. Es gilt*

$$M \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \vee \boldsymbol{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \exists k \geq 1 : \rho_k \wedge \lambda_k \subseteq \varphi$$

5.2 Das Mal'cev Produkt von $\boldsymbol{B_1}$ und $\mathbf{DA}$

Sei nun $M \in \boldsymbol{B}_1 Ⓜ \boldsymbol{\mathcal{R}} \vee \boldsymbol{\mathcal{L}}$ ein Monoid, Σ ein endliches Alphabet, $\varphi : \Sigma^* \to M$ ein surjektiver Homomorphismus sowie $\tau : M \to S \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \vee \boldsymbol{\mathcal{L}}$, T ein Monoid und $\beta : T \to M$ ein surjektiver Homomorphismus, wie in der Definition des Mal'cev-Produkts. Damit erhalten wir folgendes Bild:

$$
\begin{tikzcd}
 & & T \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
\Sigma^* \arrow[r, two heads, "\varphi"] & M \arrow[rr, "\tau = \beta^{-1}\mu"] & & S
\end{tikzcd}
$$

Wir definieren uns nun eine Abbildung $\delta : \Sigma^* \to T$, indem wir jedem Wort $w \in \Sigma^*$ ein Element t_w aus $w\varphi\beta^{-1}$ zuweisen. Dabei erlaubt uns die universelle Eigenschaft des freien Monoids, δ so zu wählen, dass wir einen Homomorphismus erhalten und $\varphi = \delta\beta$ gilt. Dies wiederum liefert uns nun einen Homomorphismus $\nu = \delta\mu$ und aus $S \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \vee \boldsymbol{\mathcal{L}}$ sowie Lemma 5.2 erhalten wir ein $k \geq 1$, so dass $\rho_k \wedge \lambda_k$ eine Verfeinerung von ν ist.

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma^* \arrow[ddl, "\varphi"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[ddr, "\nu"] \arrow[drr, "\eta_k = (\rho_k \wedge \lambda a_k)"] & & \\
 & T \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\mu"] & & \Sigma^*/\eta_k \arrow[dl] \\
M \arrow[rr, "\tau = \beta^{-1}\mu"] & & S &
\end{tikzcd}
$$

Sei nun $e^2 = e \in M$ ein idempotentes Element in M sowie $w_e \in \Sigma^*$ ein beliebiges Wort, das unter φ auf e abgebildet wird. Weiter fordern wir, dass w_e maximales Alphabet besitzt. Es folgt, da β ein Homomorphismus ist, dass $w_e^\ell \delta = (w_e\delta)^\ell$ für alle $\ell \geq 1$ ebenfalls auf e abgebildet wird. Da S in $\boldsymbol{\mathcal{R}} \vee \boldsymbol{\mathcal{L}}$ liegt und damit aperiodisch ist sowie aufgrund der Tatsache, dass μ ein Homomorphismus ist, muss $e_S := w_e^\ell \delta\mu$ für ein bestimmtes ℓ_e stationär und insbesondere idempotent sein. Aus der Eigenschaft des Mal'cev-Produkts erhalten wir schließlich, dass $e_S\tau^{-1}$ in $\boldsymbol{B_1}$ liegt. Dies werden wir nun ausnützen, um folgendes Lemma zu beweisen.

Lemma 5.3. $\boldsymbol{B}_1 \circledM (\boldsymbol{\mathcal{R}} \vee \boldsymbol{\mathcal{L}}) \subseteq \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$.

Beweis. Seien die Bezeichner wie oben, $e^2 = e, x, y \in M$ mit $e \leq_{\mathcal{J}} x, y$ (also $x, y \in M_e$), sowie $w_e, w_x, w_y \in \Sigma^*$ bereits so gewählt, dass $w_e\nu = e_S^2 = e_S \in S$ sowie $w_e\varphi = e, w_x\varphi = x$ und $w_y\varphi = y$. Weiter sei $k \geq 1$ so gewählt, dass η_k nach Lemma 5.2 eine Verfeinerung von μ darstellt.
Nach Definition gilt $\eta_k = \rho_k \wedge \lambda_k$ und damit insbesondere $w_e^{k+1}x \ \eta_k \ w_e^k$, da nach Konstruktion $x\alpha \subseteq w_e\alpha$ und somit $w_e^k \ \rho_k \ w_e^k w_e x$ und $w_e^k x \ \lambda_k \ w_e w_e^k w_x$. Nach Konstruktion von ν folgt weiter, dass $w_e^{k+1} w_x\varphi = e^{k+1}x = ex \in e\tau^{-1} \in \boldsymbol{B_1}$. Mit derselben Überlegung erhalten wir auch $ey \in e\tau^{-1}$.
Aus der Allgemeingültigkeit der Gleichung

$$(e'x'f'y'e')^\ell e'x'f'v'e'(e'u'f'v'e')^\ell = (e'x'f'y'e')^\ell (e'u'f'v'e')^\ell)$$

in $\boldsymbol{B_1}$ für ein $\ell \geq 1$ und $e'^2 = e', f'^2 = f'$ erhalten wir nun mit $e' = e, x' = ex, f' = e, y' = ey, u' = e, v' = e$ die Gleichung

$$(exeeye)^\ell exe = (e(ex)e(ey)e)^\ell exeee(e(e)e(e)e)^\ell = (e(ex)e(ey)e)^\ell e^\ell = (exeeye)^\ell,$$

Dies gilt insbesondere für alle $x, y \in M_e$, und da $e\tau^{-1} \in \boldsymbol{B_1}$ aperiodisch sein muss, erhalten wir ein ℓ_0, so dass die Gleichung für alle e, x, y erfüllt ist. Sie gilt somit für alle Elemente von eM_ee, die gerade die Form exe bzw. eye haben, und damit erhalten wir $eM_ee \in \boldsymbol{B_1}$. Da $e \in eM_ee$ ein neutrales Element und damit eM_ee ein Monoid ist gilt insbesondere $eM_ee \in \boldsymbol{\mathcal{J}}$. ☐

Tatsächlich erhalten wir sogar eine stärkere Aussage als Lemma 5.3. Hierfür benötigen wir eine Charakterisierung der Varietät **DA** von Tesson und Thérien ([TT02]).
Die Autoren definieren dort eine Kongruenz $\sim_{n,k}$ über einem endlichen Alphabet Σ mit n Buchstaben und verwenden diese, um eine zu Lemma 5.2 verwandte Charakterisierung zu erhalten. Es sei im Folgenden $\sim_{n,0} = \omega$ die universelle Kongruenz, die alle $v, w \in \Sigma^*$ miteinander identifiziert. Für $k \geq 1$ gelte nun $v \sim_{n,k} w$ genau dann, wenn

(i) $v\alpha = w\alpha$, v und w also das gleiche Alphabet besitzen.

(ii) Für alle $a \in v\alpha$ folgt aus $v = v_0av_1, w = w_0aw_1$ mit $a \notin (v_0\alpha) \cup (w_0\alpha)$, dass $v_0 \sim_{n-1,k} w_0$ und $v_1 \sim_{n,k-1} w_1$ gilt.

(iii) Für alle $a \in v\alpha$ folgt aus $v = v_0av_1, w = w_0aw_1$ mit $a \notin (v_1d\alpha) \cup (w_1\alpha)$, dass $v_0 \sim_{n,k-1} w_0$ und $v_1 \sim_{n-1,k} w_1$ gilt.

Damit erhalten wir

Lemma 5.4. *[TT02]*
Sei $M = \Sigma^*/\varphi$ und $n = |\Sigma|$. Dann gilt

$$M \in \mathbf{DA} \Leftrightarrow \exists k \geq 0 : \sim_{n,k} \subseteq \varphi.$$

Nun ersetzen wir in dem Beweis von Lemma 5.3 das Element x' durch $w_e^{k+1} w_x w_e^{k+1} \varphi = exe$. Nach Lemma 5.4 existiert ein $k \geq 0$, so dass $\sim_{n,k}$ eine Verfeinerung von ν ist. Nach Definition von $\sim_{n,k}$ und aufgrund der Tatsache, dass w_e nach Konstruktion alle Zeichen enthält, die in einer Faktorisierung von e über Σ vorkommen, gilt

$$w_e^{k+1} w_e^{k+1} \sim_{n,k} w_e^{k+1} w_x w_e^{k+1}.$$

Um dies einzusehen, betrachten wir eine beliebige Aufteilung $v_0 a_1 (v_1 w_e^{k+1})(w_e^{k+1} w_1) a_2 w_0$ gemäß der Definition von $\sim_{n,k}$. Da die Zeichen a_1, a_2 stets ganz außen gewählt werden und jedes w_e volles Alphabet von e besitzt, folgt die Behauptung, da wir diese Aufteilung maximal k mal durchführen und jedesmal nicht mehr als einen w_e Block abtrennen.
Es bleiben somit nach maximal k Schritten in der Definition für die beide mittleren Wörter stets mindestens die Blöcke $w_e w_e$ bzw. $w_e w_x w_e$ übrig und diese sind kongruent modulo $\sim_{n,0}$. Damit gilt die Behauptung, da die links und rechts abgespaltenen Blöcke stets identisch und damit insbesondere äquivalent modulo $\sim_{n-1,k_i}, 1 = k_k < \ldots < k_1 = k$ sind.
Wir setzen also $x' = exe$ und $y' = eye$ und erhalten wie im Beweis von Lemma 5.3

$$(exeeye)^{\ell_0} exe = (exeeye)^{\ell_0}$$

und damit wieder $eM_e e \in \boldsymbol{\mathcal{J}}$ für alle $e^2 = e \in M$. Es gilt also

Satz 5.5.

$$\boldsymbol{B_1} ⓜ \mathbf{DA} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}.$$

Und somit folgt, zusammen mit

$$\boldsymbol{V_2} \subseteq \boldsymbol{B_1} ⓜ \boldsymbol{\mathcal{J}} \subsetneq \boldsymbol{B_1} ⓜ \boldsymbol{\mathcal{R}} \subseteq \boldsymbol{B_1} ⓜ \mathbf{DA} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$$

dass die Vermutung von Pin und Straubing aus [PS81] falsch sein muss.

Korollar 5.6.

$$\boldsymbol{V_2} \subsetneq \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch aus dem Gegenbeispiel aus [PW01]. Pin und Weil zeigten dort $\boldsymbol{B_1} ⓜ \boldsymbol{\mathcal{J}} \subsetneq \boldsymbol{B_1} ⓜ \boldsymbol{\mathcal{R}}$, indem sie einen Zeugen für die Ungleichheit $\mathbf{LJ} \subsetneq \boldsymbol{B_1}$ von Knast ([Kna83a]) modifizierten.
Ausgehend von Knasts Sprache $L_0 = (ab^+ \cup ac^+)^* ab^+ d(c^+ d \cup b^+ d)^*$ ersetzten sie jedes Vorkommen von a, b, c, d durch ab, ab^2, ab^3, ab^4. Dies liefert uns die Sprache

$$L = (ab(ab^2)^+ \cup ab(ab^3)^+)^* ab(ab^2)^+ ab^4((ab^3)^+ ab^4 \cup (ab^2)^+ ab^4)^*$$

und es lässt sich wie in [PW01] zeigen, dass $M(L)$ in $\boldsymbol{B_1} \circledM \boldsymbol{\mathcal{R}} \setminus \boldsymbol{B_1} \circledM \boldsymbol{\mathcal{J}}$ liegt. Da das syntaktische Monoid $M(L)$ 445 Elemente besitzt, zeigt eine Untersuchung mit dem Computeralgebra-System [GAP], dass $M(L)$ in $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$ liegt. Dies ist für alle endlichen Monoide entscheid- und berechenbar, indem man für die endlich vielen idempotenten $e \in E(M(L))$ die Untergruppen eM_ee von $M(L)$ auf $\mathcal{J}$-Trivialität überprüft.
Wäre nun die Vermutung $\boldsymbol{V_2} = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$ wahr, so würde $M(L)$, wegen $\boldsymbol{V_2} \subseteq \boldsymbol{B_1} \circledM \boldsymbol{\mathcal{J}}$, auch in $\boldsymbol{B_1} \circledM \boldsymbol{\mathcal{J}}$ liegen. ↯

6 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben Straubings Charakterisierung der Varietät $\boldsymbol{V_2}$ und, anhand von Lemma 3.10, einen neuen Beweis der allgemeinen Inklusion

$$\boldsymbol{V_2} \subseteq \mathbf{CJ},$$

vorgestellt. Dabei haben wir in Straubings Beweis die unsymmetrisch aufgebaute Kongruenz $\cong$ sowie die Äquivalenz $\boldsymbol{V_2} = \Diamond\boldsymbol{\mathcal{L}}$ ausgenutzt. Tatsächlich erlaubt uns Lemma 3.9 aber ein breites Spektrum an Varietäten, von $\boldsymbol{J_1}$ bis $\mathbf{DA}$, zu betrachten, die alle unter dem Schützenbergerprodukt zu $\boldsymbol{V_2}$ zusammenfallen. Es wäre also möglich, dass uns eine passend gewählte Kongruenz $\equiv$ mit

$$\Sigma^*/\equiv\ \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \vee \boldsymbol{\mathcal{L}} \text{ oder } \Sigma^*/\equiv\ \in \mathbf{DA}$$

Straubings Vermutung $\boldsymbol{V_2} = \mathbf{CJ}$ bestätigen könnte. Hierfür wären jedoch weitere Tools notwendig, da der vorliegende Beweis stark auf der einseitigen Definition der Kongruenz $\cong$, der davon abgeleiteten Kategorie und der Tatsache, dass das Alphabet nur zwei Elemente enthält, aufbaut.

Weiter haben wir eine Sprache sowie einen Beweis vorgestellt, welche die Inklusionen

$$\boldsymbol{V_2} \subsetneq \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}} \text{ sowie } \boldsymbol{B_1} \circledM \boldsymbol{\mathcal{R}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$$

bezeugen. Der vorgestellte Beweis lieferte uns dabei sogar eine stärkere Aussage, und die dabei aufgetretene Varietät $\mathbf{DA}$ nimmt eine besondere Position ein. Sie steht an der Spitze der bekannten Varietäten, für die das Schützenbergerprodukt die Varietät $\boldsymbol{V_2}$ liefert. Außerdem entspricht sie nach [TT02] dem Logikfragment $\Sigma_2[<] \cap \Pi_2[<] = \Delta_2$ und steht laut [PW97] damit exakt unterhalb von Σ_2, dem Logikfragment der Dot-Depth 3/2 Sprachen. Dies erlaubt uns folgende Vermutung aufzustellen:

Vermutung 6.1.

$$\boldsymbol{B_1} \circledM \mathbf{DA} = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$$

Diese steht trotz Korollar 5.6 nicht im Widerspruch zu der Tatsache, dass $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$ im Fall inverser Monoide mit $\boldsymbol{V_2}$ zusammenfällt ([SW92]), da in diesem Fall bereits die Varietäten $\widetilde{\boldsymbol{J_1}}$ und $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$ gleich sind.

Literatur

[AA89] J. Almeida, A. Azevedo. The join of the pseudeovarieties of R-trivial and L-trivial monoids. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 60:129–137, 1989.

[BR71] J. Brzozowski, R.Cohen. Dot-depth of star-free events. *Journal of Computer and System Sciences*, 5:1–16, 1971.

[Cow93] D. Cowan. Inverse monoids of dot-depth two. *International Journal of Algebra and Computation*, 3(4):411–424, 1993.

[DGK08] V. Diekert, P. Gastin, M. Kufleitner. A survey on small fragments of first-order logic over finite words. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 19(3):513–548, 2008.

[Eil74] S. Eilenberg. *Automata, Languages and Machines*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, Inc., 1974.

[GAP] GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra. http://www.gap-system.org/.

[HMU02] J. E. Hocroft, R. Motwani, J. D. Ullman. *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie*. Addison-Wesley Longman Verlag, 2002.

[How95] J. Howie. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press, 1995.

[Kle56] S. C. Kleene. Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata. In C. E. Shannon, J. McCarthy, editors, *Automata Studies*, pp. 3–41. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[Kna83a] R. Knast. A semigroup characterization of dot-depth one languages. *RAIRO Informatique théorique*, 17(4):321–330, 1983.

[Kna83b] R. Knast. Some theorems on graph congruences. *RAIRO Informatique théorique*, 17:331–342, 1983.

[Kö85] R. König. Reduction algorithms for some classes of aperiodic monoids. *RAIRO Informatique théorique*, 19(2):233–260, 1985.

[Pin86] J.-E. Pin. *Varieties Of Formal Languages*. Plenum Publishing Co., 1986.

[PS81] J.-E. Pin, H. Straubing. Monoids of upper triangular boolean matrices. *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyal*, pp. 259–272, 1981. (http://www.liafa.jussieu.fr/~jep/publications.html).

[PW96] J.-E. Pin, P. Weil. Profinite Semigroups, Mal'cev products and identities. *Journal of Algebra*, 182:604–626, 1996.

[PW97] J.-E. Pin, P. Weil. Polynomial closure and unambiguous product. *Theory of Computing Systems*, 30:383–422, 1997.

[PW01] J.-E. Pin, P. Weil. A conjecture on the concatenation product. *RAIRO Informatique théorique et applications*, 35(6):597–618, 2001.

[Sch65] M.-P. Schützenberger. On finite monoids having only trivial subgroups. *Information and Control*, 8:190–194, 1965.

[Sim75] I. Simon. Piecewise testable events. *Lecture Notes in Computer Science*, 33:214–222, 1975.

[ST85] H. Straubing, D. Therien. Partially ordered finite monoids and a theorem of I. Simon. *Journal of Algebra*, 119(2):393–399, 1985.

[Str81] H. Straubing. A generalization of the Schützenberger product of finite monoids. *Theoretical Computer Science*, 13(2):137–150, 1981.

[Str85] H. Straubing. Finite semigroup varieties of the Form V*D. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 36:53–94, 1985.

[Str88] H. Straubing. Semigroups and languages of dot-depth two. *Theoretical Computer Science*, 58:361–378, 1988.

[SW92] H. Straubing, P. Weil. On a conjecture concerning dot-depth two languages. *Theoretical Computer Science*, 104(2):161–183, 1992.

[The81] D. Therien. Classification of finite monoids: The language approach. *Theoretical Computer Science*, 14:195–208, 1981.

[The88] D. Therien. Categories et langages de dot-depth un. *RAIRO Informatique théorique et applications*, 22(4):437–445, 1988.

[Til87] B. Tilson. Categories as algebra: An essential ingredient in the theory of monoids. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 48:83–198, 1987.

[TT02] P. Tesson, D. Therien. Diamonds are forever: The variety DA. *Semigroups, Algorithms, Automata and Languages*, pp. 475–500, 2002.

[Wei93] P. Weil. Some results on the dot-depth hierarchy. *Semigroup Forum*, 46(1):352–370, 1993.

Alle URLs wurden zuletzt am 14.12.2008 geprüft.

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen benutzt zu haben.

(Thomas Baumann)