Institut für Formale Methoden der Informatik
Abteilung Sichere und Zuverlässige Softwaresysteme
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D–70569 Stuttgart

Diplomarbeit Nr. 3095

Wortbegrenzung unter Involution

Bastian Bischoff

Studiengang: Informatik

Prüfer: Priv.-Doz. Dr. habil. Dirk Nowotka

Betreuer: Priv.-Doz. Dr. habil. Dirk Nowotka

begonnen am: 19. Mai 2010

beendet am: 18. November 2010

CR-Klassifikation: F.2.2, F.4.3, G.2.1

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 5

2 Definitionen und grundlegende Eigenschaften 9

3 Der Satz von Fine und Wilf 21

4 Kritische Faktorisierungen 33

5 Das Ehrenfeucht–Silberger Problem 39

6 Gleichung von Lyndon & Schützenberger 53

7 Ordnungen unter Involution 57

8 Unvermeidbare Muster 63

9 Zusammenfassung 73

A Quellcode 79

Kapitel 1

Einleitung

Wörter sind in vielen Bereichen eine grundlegende Struktur. Am offensichtlichsten ist dies bei natürlichen Sprachen wie Deutsch und Englisch. Aber auch der Ablauf von Prozessen, jegliche Daten sowie die DNA lassen sich als Wörter darstellen. DNA–Stränge sind beispielsweise Wörter über dem vier–elementigen Alphabet $\{ A, C, G, T \}$. Die Kombinatorik auf Wörtern findet daher in vielen Gebieten Anwendung, darunter Datenkompression, Suchalgorithmen und algorithmische Biologie. Eine zentrale Eigenschaft von Wörtern ist Begrenztheit und, direkt damit verbunden, die Periode eines Wortes. So sagen wir ein Wort w ist begrenzt, wenn ein Präfix von w gleichzeitig auch Suffix ist, w sich also als $w = ux = yu$ darstellen lässt. Ist w Präfix der unendlich often Wiederholung eines Wortes u, so bezeichnen wir die Länge von u als Periode von w. Obwohl die Kombinatorik auf Wörtern ein eher junges Gebiet der Mathematik ist, gibt es in diesem Gebiet inzwischen zahlreiche Resultate. Wir wollen in der vorliegenden Arbeit einige dieser Resultate betrachten und auf Involutionen erweitern. Eine Involution θ ist eine Abbildung so, dass θ^2 die Identität ist. Eine Involution heißt morph, falls $\theta(uv) = \theta(u)\theta(v)$ für alle Wörter u, v gilt; die Involution θ heißt antimorph, wenn $\theta(uv) = \theta(v)\theta(u)$ gilt. Wir bezeichnen ein Wort w als θ–begrenzt, wenn es sich als $w = ux = y\theta(u)$ darstellen lässt. Eine Motivation für die Betrachtung von Wörtern unter Involution, ist die Molekular–Biologie. Wie bereits erwähnt, ist die DNA aus den vier Nukleotiden Adenin, Guanin, Thymin und Cytosin aufgebaut. Verbindungen zwischen den Nukleotiden können bei Adenin mit Thymin und Cytosin mit Guanin entstehen. Eine in der DNA und RNA auftretende Struktur sind sogenannte Haarnadeln. Dargestellt ist eine solche Haarnadel in Abbildung 1. Das Wort $u = AGTCC$ ist θ–Grenze von $w = AGTCC.GATGCA.GGACT$, es gilt $w = ux = y\theta(u)$ für Wörter x und y. Dies ist eine anschauliche Anwendung von Wortgrenzen unter Involution. Wir wollen uns in der vorliegenden Arbeit aber vornehmlich mit den theoretischen Grundlagen beschäftigen. Hierzu werden wir den Begriff der Periode in verschiedenen Varianten auf Involutionen erweitern.

Eines der ersten größeren Resultate und bis heute ein zentrales Theorem im Bereich der Kombinatorik auf Wörtern, ist der Satz von Fine und Wilf aus dem Jahr 1965. Der

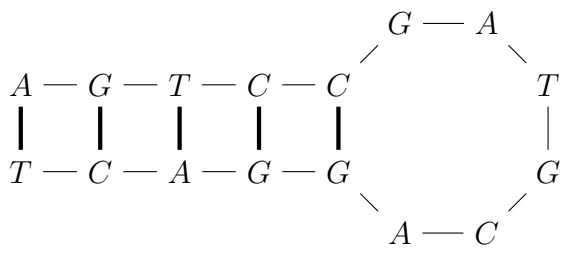

Abbildung 1: DNA Haarnadel–Struktur

Satz besagt, dass falls ein Wort w Perioden p und q besitzt, sowie mindestens die Länge $p + q - ggT\{p, q\}$ hat, dann ist auch $ggT\{p, q\}$ eine Periode von w. Wir werden im 3. Kapitel den Satz von Fine und Wilf in Bezug auf Involutionen untersuchen. Dabei konzentrieren wir uns mehr auf morphe Involutionen, da Czeizler, Kari und Seki in den Arbeiten [21, 6, 16] bereits den antimorphen Fall untersucht haben.

Was wir bisher als Periode eines Wortes bezeichnet haben, wird manchmal auch globale Periode genannt. Andererseits gibt es noch eine lokale Periode. Wir betrachten hierzu Faktorisierungen eines Wortes w, also Wortpaare $w_1, w_2 \in \Sigma^+$ mit $w = w_1 w_2$, geschrieben als (w_1, w_2). Zu einer gegebenen Faktorisierung (w_1, w_2) suchen wir das kürzeste Wort $v \in \Sigma^+$ so, dass v Suffix von w_1 und Präfix von w_2 ist. Die Länge von v heißt lokale Periode der Faktorisierung (w_1, w_2). Das kritische Faktorisierungstheorem stellt einen Zusammenhang zwischen dieser lokalen Periode und der (globalen) Periode her. Wir untersuchen in Kapitel 4, inwiefern diese Aussagen auch in Bezug auf Perioden unter morpher und antimorpher Involution gelten.

Eng verwandt mit dem kritischen Faktorisierungstheorem aus Kapitel 4, ist das Problem von Ehrenfeucht und Silberger. Das Problem wurde im Jahre 1979 formuliert, jedoch erst 2009 durch Holub und Nowotka vollständig gelöst. Es beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen der Wortlänge n, der Periode $\pi(w)$ und der Länge des längsten unbegrenzten Faktors $\tau(w)$ eines Wortes w. So entspricht ab einer gewissen Wortlänge die Periode von w der Länge eines längsten unbegrenzten Faktors, $\tau(w) = \pi(w)$. Die interessante Frage dabei ist, ab welcher Worlänge dies gilt. In [12] wurde schließlich bewiesen, dass $n \geq 7/3 \cdot \tau(w)$ die Aussage $\tau(w) = \pi(w)$ impliziert. In Kapitel 5 diskutieren wir das Problem unter Betrachtung von Wortgrenzen und Perioden, die auf Involutionen erweitert wurden.

Im 6. Kapitel beschäftigen wir uns mit Wortgleichungen. Ein zentrales Resultat in diesem Gebiet stammt von Lyndon und Schützenberger. Es besagt, dass falls $u^\ell = v^m w^n$ für Wörter u, v, w und Zahlen $\ell, m, n \geq 2$ gilt, so sind die Wörter u, v, w Potenzen eines Wortes α. Wir betrachten auch Erweiterungen dieser Aussage und untersuchen sie in Bezug auf Involutionen. Wir konzentrieren uns dabei auf den morphen Fall und verweisen für Aussagen zum antimorphen Fall auf [5, 21].

Um im Bereich Kombinatorik auf Wörtern Aussagen zu beweisen, sind manchmal li-

neare Ordnungen über dem Alphabet hilfreich. Gilt $\Sigma = \{ a_1, a_2, \ldots, a_m \}$, so ist $a_1 \lhd a_2 \lhd \ldots \lhd a_m$ beispielsweise eine lineare Ordnung. Solche Ordnungen sind allerdings für die Betrachtung von Wörtern unter morpher oder antimorpher Involution zunächst als Werkzeug nicht brauchbar. In Kapitel 7 definieren wir daher neue Ordnungen, die wichtige Eigenschaften auch bei Wörtern unter einer Involution erhalten.

Im 8. Kapitel beschäftigen wir uns mit der Vermeidbarkeit bzw. Unvermeidbarkeit von Mustern. Ein Muster ist ein Wort über einem Alphabet von sogenannten Variablen. Ein Beispiel eines solchen Musters ist $\alpha\alpha$. Bei einem gegebenenen Wort w prüfen wir nun, ob wir die Variable α so durch ein Wort aus Σ^+ ersetzen können, dass das Muster $\alpha\alpha$ ein Faktor von w ist. Ist dies nicht der Fall, so vermeidet w das Muster. Wir wollen bei manchen Variablen nach dem Ersetzen durch ein Wort $u \in \Sigma^+$ noch eine morphe oder antimorphe Involution auf u anwenden. Wir werden untersuchen, welchen Einfluss dies auf die Vermeidbarkeit von Mustern hat.

Kapitel 2

Definitionen und grundlegende Eigenschaften

In diesem Kapitel wollen wir wesentliche Begriffe und Konzepte zur Arbeit mit Wörtern für die restliche Arbeit festlegen. Wir halten uns dabei an in der Fachliteratur bestehende Definitionen. Des weiteren führen wir zur Untersuchung von Wörtern unter Involution zahlreiche neue Bezeichnungen ein. Spezielle Begriffe werden dabei nicht hier, sondern direkt in den entsprechenden Kapiteln definiert.

Ein *Alphabet* Σ ist eine endliche Menge von Zeichen. Das freie Monoid Σ^* über dem Alphabet Σ nennen wir die Menge aller endlichen *Wörter*. Das leere Wort wird als ε bezeichnet. Die Anzahl an Zeichen n eines Wortes $w \in \Sigma^*$ nennen wir *Länge* und schreiben hierfür $|w|$. Das leere Wort hat die Länge 0. Falls nicht anders angegeben bezeichnen wir die Länge eines Wortes $w \in \Sigma^*$ mit n. Wir definieren $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ und Σ^ω als die Menge aller unendlich langen Wörter. Das i-te Zeichen eines Wortes $w \in \Sigma^*$ bezeichnen wir mit $w_{[i]}$. Die Indizierung beginnt bei 1, falls nicht anders vermerkt. Ein Wort $w \in \Sigma^+$ der Länge n lässt sich also darstellen als $w = w_{[1]}w_{[2]} \dots w_{[n]}$. Zur besseren Darstellung eines Wortes $w \in \Sigma^*$ fügen wir manchmal Punkte oder Leerzeichen ein, also beispielsweise $w = aaa.bb$ oder $w = abc\,abc\,abc$. Ein zusammenhängendes Teilwort $w_{[i]}w_{[i+1]} \dots w_{[j]}$ von $w = w_{[1]} \dots w_{[n]}$ für $1 \leq i, j \leq n$ heißt *Faktor* von w.

Das Wort $u \in \Sigma^*$ ist ein *Präfix* des Wortes $w \in \Sigma^*$, falls $w = uv$ für ein $v \in \Sigma^*$ gilt. Wir schreiben dies als $u \leq_{\mathrm{p}} w$. Das Wort u ist ein *echter Präfix* von w, geschrieben als $u <_{\mathrm{p}} w$, falls $w = uv$ für ein nichtleeres Wort $v \in \Sigma^+$ gilt. Analog ist $v \in \Sigma^*$ ein *Suffix* bzw. ein *echter Suffix* von $w \in \Sigma^*$, bezeichnet als $v \leq_{\mathrm{s}} w$ und $v <_{\mathrm{s}} w$, falls ein $u \in \Sigma^*$ bzw. $u \in \Sigma^+$ mit $w = uv$ existiert. Man beachte, dass w und ε sowohl Präfix als auch Suffix von w sind. Ein nichtleeres Wort $u \in \Sigma^+$ heißt *Grenze* von $w \in \Sigma^+$, falls sowohl $u <_{\mathrm{p}} w$ als auch $u <_{\mathrm{s}} w$ gilt. Dies impliziert $|u| < |w|$. Die Definition einer Grenze ist äquivalent zur Aussage, dass w sich als $w = xu = uy$ für zwei nichtleere Wörter $x, y \in \Sigma^+$ darstellen lässt. Wir sagen $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist *eine Periode* eines Wortes $w \in \Sigma^+$, falls $w_{[i]} = w_{[i+p]}$ für alle $1 \leq i \leq n - p$. Dies ist gleichbedeutend zur Aussage, dass $w <_{\mathrm{p}} v^\omega$ für ein

$v \in \Sigma^+$ mit Länge $|v| = p$ gilt. Dabei ist $v^\omega \in \Sigma^\omega$ das unendlich lange Wort, das durch unendlich häufiges Hintereinanderschreiben von $v \in \Sigma^+$ entsteht. Sprechen wir von *der Periode* eines Wortes w, so meinen wir damit das kleinste p, das eine Periode von w ist. Wir schreiben für die Periode $\pi(w)$, für die Menge aller Perioden eines Wortes $\Pi(w)$. Für ein Wort $w = w_1 w_2$ definieren wir noch $w w_2^{-1} := w_1$ und $w_1^{-1} w := w_2$. Mit $ggT\{\}$ bezeichnen wir wie üblich den *größten gemeinsamen Teiler* einer Menge von natürlichen Zahlen.

Eine *Involution* θ ist eine Funktion so, dass θ^2 der Identität entspricht. Wir betrachten im folgenden Involutionen $\theta : \Sigma^* \to \Sigma^*$. Eine solche Involution heißt *morph*, falls $\theta(uv) = \theta(u)\theta(v)$ für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt. Die Involution wird dagegen als *antimorph* bezeichnet, falls $\theta(uv) = \theta(v)\theta(u)$ ist für alle $u, v \in \Sigma^*$. Wir bezeichnen ein nichtleeres Wort $u \in \Sigma^+$ für eine morphe oder antimorphe Involution θ als *θ–Grenze* von $w \in \Sigma^+$, falls $u <_\mathrm{p} w$ und $\theta(u) <_\mathrm{s} w$ ist. Auch falls $\theta(u) <_\mathrm{p} w$ und $u <_\mathrm{s} w$ erfüllt sind, sprechen wir von einer θ–Grenze. Das Wort w muss sich also als $w = xu = \theta(u)y$ für nichtleere Wörter $x, y \in \Sigma^+$ darstellen lassen. Das Wort w bezeichnen wir dann als θ–begrenzt. Gilt für ein Wort $w \in \Sigma^*$ die Beziehung $w = \theta(w)$, so bezeichnen wir das Wort w als *Palindrom* bezüglich der Involution θ. Wir definieren nun *θ–Perioden* eines Wortes für morphe und antimorphe Involutionen θ. Wir sagen $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist *eine θ–Periode* von $w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $w <_\mathrm{p} \{u, \theta(u)\}^\omega$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge p gilt. Der Ausdruck $w <_\mathrm{p} \{u, \theta(u)\}^\omega$ bedeutet, dass eine Abfolge der Wörter u und $\theta(u)$ so existiert, dass w Präfix dieser Abfolge ist. Für die Menge aller θ–Perioden schreiben wir $\Pi_\theta(w)$, die kleinste θ–Periode bezeichnen wir mit $\pi_\theta(w)$ und nennen dies *die θ–Periode* von w. Falls gilt $w <_\mathrm{p} (u\theta(u))^\omega$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge p, so sagen wir p ist eine *alternierende θ–Periode* von w. Bei morphen Involutionen θ ist eine alternierende θ–Periode p gleichbedeutend mit der Aussage, dass $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ für alle $1 \le i \le n-p$ gilt. Trivialerweise ist $|w| = n$ für jedes Wort w eine (alternierende) θ–Periode. Wir sagen p ist eine *schwache θ–Periode* eines Wortes w, falls für jedes $i \in \{1, \ldots, n-p\}$ die Gleichung $w_{[i]} = w_{[i+p]}$ oder $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ gilt. Danach ist p genau dann eine schwache, alternierende θ–Periode p, wenn $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ für alle $1 \le i \le n-p$ gilt. Sprechen wir von *der* alternierenden/schwachen θ–Periode statt von *einer* alternierenden/schwachen θ–Periode, so meinen wir die kleinste alternierende/schwache θ–Periode. Die schwache θ–Periode von w schreiben wir als $\pi_\theta^\mathrm{s}(w)$, die alternierende θ–Periode als $\pi_\theta^\mathrm{alt}(w)$. Die Menge aller schwachen θ–Perioden bezeichnen wir mit $\Pi_\theta^\mathrm{s}(w)$, die Menge aller alternierenden θ–Perioden mit $\Pi_\theta^\mathrm{alt}(w)$.

Beispiele 2.1 Zur Verdeutlichung der Definitionen wollen wir hier noch einige Beispiele angeben. Sei $w = abcab$. Dann ist $u = ab$ eine Grenze von w, das Wort w ist also begrenzt. Für die antimorphe Involution mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$ ist w auch θ–begrenzt: Es gilt $ab <_\mathrm{p} w$ und $\theta(ab) = \theta(b)\theta(a) = ab <_\mathrm{s} w$, das Wort ab ist eine θ–Grenze von w. Betrachten wir nun das Wort $w = abc\,abc\,ba$. Das Wort w besitzt die Periode 7. Sei θ die morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Dann besitzt w die θ–Periode

3, auch die schwache θ–Periode ist 3. Die alternierende θ–Periode ist hingegen 6. Um den Unterschied zwischen der θ–Periode und der schwachen θ–Periode zu verdeutlichen, betrachten wir $w = abc\,aac\,abc$. Es gilt $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w) = 3$ und $\pi_\theta(w) = 6$. Sei nun θ die antimorphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Für $w = abc\,cab$ gilt dann $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w) = 4$ und $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w) = \pi_\theta(w) = 3$.

Zahlreiche grundlegende Eigenschaften von Wortgrenzen unter Involution wurden von Kari und Mahalingam in [13] untersucht. Wir wollen an dieser Stelle einige Erkenntnisse aus [13] wiederholen und vor allem weitere Eigenschaften ergänzen.

Beobachtungen 2.2 *Sei θ eine morphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort.*

(a) Ist θ die Identität, so ist $\Pi(w) = \Pi_\theta^s(w) = \Pi_\theta(w) = \Pi_\theta^{alt}(w)$.

(b) Ist w ein θ–unbegrenztes Wort, so auch $\theta(w)$.

(c) Gilt $p \in \Pi_\theta(w)$, so ist auch $p \in \Pi_\theta^s(w)$.

(d) Es gilt $\pi_\theta^s(w) \leq \pi_\theta(w) \leq \pi_\theta^{alt}(w)$.

(e) Es gilt $\pi(w) = \pi(\theta(w))$, $\pi_\theta^s(w) = \pi_\theta^s(\theta(w))$, $\pi_\theta(w) = \pi_\theta(\theta(w))$ und $\pi_\theta^{alt}(w) = \pi_\theta^{alt}(\theta(w))$.

(f) Ist $p \in \Pi_\theta^{alt}(w)$, so gilt auch $k \cdot p \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ für jedes ungerade $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: (a), (b): klar. (c): Es ist $w <_{\mathrm{p}} \{u, \theta(u)\}^\omega$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge p. Also gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n-p\}$ die Gleichung $w_{[i]} = w_{[i+p]}$ oder $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ und p ist eine schwache θ–Periode von w. (d): Jede alternierende θ–Periode ist offensichtlich auch θ–Periode. Zusammen mit (c) folgt die Aussage. (e): Die Aussage folgt direkt aus den Definitionen der verschiedenen Perioden. (f): Es gilt $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge p. Sei $u' \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge $p \cdot k$ für ungerades $k \in \mathbb{N}$ mit $u' = (u\theta(u))^{(k-1)/2}\,u$. Dann ist $w <_{\mathrm{p}} (u'\theta(u'))^\omega = (u\theta(u))^\omega$. □

Beobachtung 2.3

(a) Die Aussage 2.2 (b) gilt auch für antimorphe Involutionen, siehe [13, Korollar 4].

(b) Für antimorphe Involutionen gilt sogar eine etwas stärkere Aussage als Beobachtung 2.2 (f): Ist $p \in \Pi_\theta^{alt}(w)$, so gilt auch $k \cdot p \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Die Voraussetzung, dass k ungerade ist, wird hier nicht benötigt. Der Beweis verläuft dennoch analog.

(c) Die Umkehrung von Beobachtung 2.2 (c) gilt im Allgemeinen nicht. Sei beispielsweise $\Sigma = \{a, b\}$ und $w = a^i b a^{i+1}$. Für die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$ ist $i+1$ eine schwache θ–Periode von w, jedoch ist $i+1$ keine θ–Periode von w. Es existiert auch keine andere morphe Involution φ so, dass $i+1$ eine φ–Periode von w ist.

(d) *Für antimorphe Involutionen θ gilt aus Beobachtung 2.2 (e) nur $\pi(w) = \pi(\theta(w))$ und $\pi_\theta^s(w) = \pi_\theta^s(\theta(w))$, die restlichen Aussagen gelten hingegen nicht. Gilt $p \in \Pi(w)$, so ist $w <_{\mathrm{p}} u^\omega$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge p. Daher gilt $w = u^i u_1$ für ein $i \geq 1$ und ein $u_1 \in \Sigma^*$ so, dass ein $u_2 \in \Sigma^+$ mit $u_1 u_2 = u$ existiert. Dann ist $\theta(w) = \theta(u_1)\theta(u_1 u_2)^i = \theta(u_1)(\theta(u_2)\theta(u_1))^i$ und $|\theta(u_1)\theta(u_2)| = p$ ist eine Periode von $\theta(w)$. Daraus folgt $\pi(w) = \pi(\theta(w))$. Die Aussage $\pi_\theta^s(w) = \pi_\theta^s(\theta(w))$ gilt, da bei der schwachen θ–Periode nur einzelne Zeichen betrachtet werden und es daher keinen Unterschied zum morphen Fall gibt. Zu den restlichen Aussagen geben wir nun ein Gegenbeispiel an. Sei $w = abc^i c^i a$ für $i \geq 1$ und θ eine antimorphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Es ist $\theta(w) = bc^i c^i ab$, jedoch gilt $\pi_\theta^{alt}(w) = \pi_\theta(w) = i + 2 \neq \pi_\theta^{alt}(\theta(w)) = \pi_\theta(\theta(w)) = i + 1$.*

Für eine morphe oder antimorphe Involution θ ist p eine schwache, alternierende θ–Periode eines Wortes $w \in \Sigma^+$, wenn $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ für alle $1 \leq i \leq n - p$ gilt. Die folgende Beobachtung 2.4 zeigt, dass bei morphen Involutionen die schwache, alternierende θ–Periode und die alternierende θ–Periode zusammenfallen und daher nicht unterschieden werden müssen.

Beobachtung 2.4 *Sei θ eine morphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort. Es gilt $p \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ genau dann, wenn p eine schwache, alternierende θ–Periode von w ist.*

Beweis: „$\Rightarrow$ “: Es ist $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$ für ein $u \in \Sigma^+$ der Länge p. Also gilt $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ für alle $1 \leq i \leq n - p$. „$\Leftarrow$ “: Sei $u = w_{[1]} \ldots w_{[p]}$. Es ist $w_{[1+p]} \ldots w_{[2p]} = \theta\big(w_{[1]}\big) \ldots \theta\big(w_{[p]}\big) = \theta(u)$. Dieses Schema lässt sich fortsetzen, es gilt $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$ und p ist eine alternierende θ–Periode von w. □

Beobachtung 2.5 *Sei p eine Periode eines Wortes $w \in \Sigma^+$. Eine bekannte und leicht einzusehende Aussage ist dann, dass p auch Periode jedes Faktors von w ist. Ist θ eine morphe oder antimorphe Involution und p schwache θ–Periode von w, so folgt ebenfalls direkt, dass p auch schwache θ–Periode jedes Faktors von w ist. Auch für alternierende θ–Perioden und morphe Involutionen gilt die analoge Aussage, wie sich mit Beobachtung 2.4 leicht einsehen lässt. Für θ–Perioden gilt diese natürliche Eigenschaft jedoch nicht. Sei $w = ab^i c\, ab^i c\, ba^i c$ für $i \geq 1$ ein Wort mit θ–Periode $i+2$ für die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Es gilt jedoch nicht, dass $i+2$ eine θ–Periode des Faktors $b^i c\, ab^i c\, b$ ist. Für antimorphe Involutionen gilt die Eigenschaft weder für alternierende θ–Perioden, noch für θ–Perioden. Sei θ eine antimorphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Wir betrachten das Wort $w = ab^i c\, ca^i b\, ab^i c$ für $i \geq 1$ mit der θ–Periode $i+2$ und der alternierenden θ–Periode $i+2$ sowie den Faktor $b^i c\, ca^i b\, a$ von w. Die Zahl $i+2$ ist weder θ–Periode noch alternierende θ–Periode dieses Faktors.*

Beobachtung 2.6 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution.*

(a) *Sei $a \in \Sigma$ ein Zeichen und $i \geq 1$. Für jedes Wort $w = \{ a, \theta(a) \}^i$ und für alle $p \leq n$ gilt dann $p \in \Pi_\theta^s(w)$*

(b) *Ein Wort $w \in \Sigma^+$ hat genau dann die schwache θ–Periode 1, wenn w die θ–Periode 1 besitzt.*

(c) *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort und $p \in \Pi_\theta^{alt}(w)$. Dann gilt $2 \cdot p \in \Pi(w)$.*

(d) *Sei θ nicht die Identität. Dann gilt $\pi_\theta(w) = 1$ für jedes Wort $w \in \Sigma^+$ über einem zwei elementigen Alphabet $\Sigma = \{ a, b \}$.*

Beweis: (a): Trivial, da für alle $i, j \in \{ 1, \ldots, n \}$ die Gleichung $w_{[i]} = w_{[j]}$ oder $w_{[i]} = \theta(w_{[j]})$ gilt. (b): Das Wort w hat die schwache θ–Periode 1, falls $w_{[i]} = w_{[i+1]}$ oder $w_{[i]} = \theta(w_{[i+1]})$ für jedes $i \in \{ 1, \ldots n-1 \}$ gilt. Das Wort w hat die θ–Periode 1, falls $w <_{\mathrm{p}} \{ a, \theta(a) \}^\omega$, also $w = \{ a, \theta(a) \}^j$ für ein $a \in \Sigma$ und ein $j \geq 1$ gilt. Die beiden Aussagen sind offensichtlich äquivalent. (c) Es ist $w <_{\mathrm{p}} (v\theta(v))^\omega$ für $v = w_{[1]} \ldots w_{[p]}$ mit Länge $|v| = p$. Für $u = v\theta(v)$ mit $|u| = 2p$ gilt $w <_{\mathrm{p}} u^\omega$ und $2 \cdot \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ ist eine Periode von w. (d): Da θ nicht die Identität ist, gilt $\theta(a) = b$ und $\{ a, \theta(a) \} = \{ b, \theta(b) \} = \Sigma$. Aus $w \in \Sigma^+ = \{ a, \theta(a) \}^+$ folgt $\pi_\theta(w) = 1$. □

Beobachtung 2.7 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort und $p \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *Es existiert eine morphe Involution θ so, dass $p \in \Pi_\theta^s(w)$ gilt.*
- *Es existiert eine antimorphe Involution φ so, so dass $p \in \Pi_\varphi^s(w)$ gilt.*

Beweis: Offensichtlich, da bei der schwachen θ–Periode bzw. schwachen φ–Periode nur einzelne Zeichen betrachtet werden. □

Im Allgemeinen gilt die Aussage aus Beobachtung 2.7 jedoch nicht für θ–Perioden. Sei hierzu $\Sigma = \{ a, b, c \}$ ein Alphabet und $w = ac^i bc^i$ und $w' = ac^i c^i b$ für $i \geq 1$ Wörter aus Σ^+. Wir definieren eine morphe Involution θ durch $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Dann ist $i+1$ eine θ–Periode von w. Angenommen es existiert eine antimorphe Involution φ so, dass w eine φ–Periode $i+1$ besitzt. Dann muss $\varphi(ac^i) = \varphi(c)\varphi(c^{i-1})\,\varphi(a) = bc^{i-1}c$, und daher $c \mapsto b$ sowie $a \mapsto c$ gelten. Dann ist aber $\varphi(\varphi(a)) = \varphi(c) = b$, im Widerspruch zu φ ist Involution. Also existiert keine antimorphe Involution φ so, dass w eine φ–Periode $i+1$ besitzt. Wir betrachten nun das Wort w' und die antimorphe Involution φ mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Es ist $i+1$ eine φ–Periode des Wortes w'. Mit zum ersten Beispiel analoger Argumentation existiert jedoch keine morphe Involution θ so, dass w' eine θ–Periode $i+1$ besitzt.

Beobachtung 2.8 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution und $p \in \Pi_\theta(w)$. Sei $u \leq_{\mathrm{p}} w$ mit $|u| = p$. Angenommen es gilt $u = v_1 \dots v_k$ für $k \geq 1$ und $v_1, \dots, v_k \in \{ v, \theta(v) \}$ für ein Wort $v \in \Sigma^+$ der Länge $|v| = q$. Dann folgt $q \in \Pi_\theta(w)$.*

Beobachtung 2.9 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution mit $p \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ und u ein Präfix von w der Länge p. Sei $v \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge $|v| = q$. Gilt $u = (v\theta(v))^i v$ für $i \geq 0$, dann ist $q \in \Pi_\theta^{alt}(w)$.*

Beweis: Es gilt $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$. Weiter ist $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega = \Big((v\theta(v))^i v(\theta(v)v)^i \theta(v)\Big)^\omega$ im morphen, bzw. $w <_{\mathrm{p}} \Big((v\theta(v))^i v\theta(v)(v\theta(v))^i\Big)^\omega$ im antimorphen Fall. Damit ist $w <_{\mathrm{p}} (v\theta(v))^\omega$ und es gilt $q \in \Pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$. □

Das nächsten zwei Lemmata stammen aus der Arbeit [20] von Lyndon und Schützenberger

Lemma 2.10 ([20]) *Seien $u, v, w \in \Sigma^+$ Wörter mit $uv = vw$. Dann ist $u = xy$, $v = (xy)^i x$ und $w = yx$ für Wörter $x, y \in \Sigma^+$ und $i \geq 0$.*

Lemma 2.11 ([20]) *Seien $u, v \in \Sigma^+$ Wörter mit $uv = vu$. Dann ist $u = x^i$ und $v = x^j$ für ein Wort $x \in \Sigma^+$ und $i, j \geq 0$.*

In [13] haben Kari und Mahalingam das Lemma 2.10 auf morphe Involutionen erweitert.

Lemma 2.12 ([13]) *Seien u und w Wörter mit $uv = \theta(v)w$ für ein $v \in \Sigma^*$. Dann existieren für eine morphe Involution θ Wörter $x, y \in \Sigma^*$ mit $u = xy$ und*

(a) $w = y\theta(x)$ und $v = \theta(x)$ falls $|u| > |v|$,

(b) $w = \theta(y)x$ und $v = (\theta(x)\theta(y)xy)^i\theta(x)\theta(y)x$ für $i \geq 0$ falls $|u| < |v|$.

Lemma 2.13 *Sei θ eine morphe Involution und u, v, w Wörter mit $uv = \theta(v)w$. Dann ist $uv <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$.*

Beweis: Nach Lemma 2.12 existieren Wörter x, y so, dass $u = xy$ und $v = \theta(x)$ falls $|u| > |v|$ bzw. $v = (\theta(x)\theta(y)xy)^i\theta(x)\theta(y)x$ für ein $i \geq 0$ falls $|u| < |v|$. In beiden Fällen ist uv ein Präfix von $(u\theta(u))^\omega = (xy\theta(x)\theta(y))^\omega$. Ist $|u| = |v|$, so gilt $v = \theta(u)$ und uv ist ebenfalls Präfix von $(u\theta(u))^\omega$. □

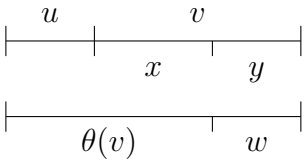

Abbildung 2: Fall $|u| < |v|$

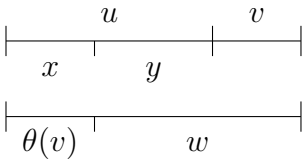

Abbildung 3: Fall $|u| \geq |v|$

Der antimorphe Fall zu Lemma 2.12 findet sich in [14]. Wir geben hier die Aussage und einen eigenen Beweis an.

Lemma 2.14 ([14]) *Sei θ eine antimorphe Involution und sei $uv = \theta(v)w$ für Wörter $v \in \Sigma^+$ und $u, w \in \Sigma^*$. Dann existieren $x, y \in \Sigma^*$ so, dass gilt*

- *$u = \theta(y)$, $v = xy$, $w = y$ und $x = \theta(x)$ falls $|u| < |v|$,*
- *$u = xy$, $v = \theta(x)$, $w = y\theta(x)$ falls $|u| \geq |v|$.*

Beweis: Sei zunächst $|u| < |v|$. Setze $y = w$, dann lässt sich v schreiben als $v = xy$ für ein $x \in \Sigma^*$, siehe Abbildung 2. Aus $ux = \theta(v) = \theta(xy) = \theta(y)\theta(x)$ folgt $u = \theta(y)$. Wegen $uv = \theta(y)xy$ und $uv = \theta(v)w = \theta(y)\theta(x)y$ gilt $x = \theta(x)$. Sei nun $|u| \geq |v|$. Setze $x = \theta(v)$, dann existiert ein $y \in \Sigma^*$ so, dass $u = xy$ gilt, siehe Abbildung 3. Weiter gilt $w = yv = y\theta(x)$. □

Beobachtung 2.15 *In Lemma 2.14 gilt im Fall $|u| \geq |v|$ genau dann die Beziehung $y = \theta(y)$, wenn $\theta(u) = w$ ist.*

Lemma 2.16 ([15, Proposition 3]) *Sei θ eine morphe Involution und seien $u, v, w \in \Sigma^+$ Wörter mit $uv = \theta(v)w$. Dann existieren Wörter $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ so, dass $u = \alpha\beta$ sowie eine der beiden folgenden Aussagen gilt:*

- *$w = \beta\theta(\alpha)$ und $v = (\theta(\alpha\beta)\alpha\beta)^i\theta(\alpha)$ für $i \geq 0$,*
- *$w = \theta(\beta)\alpha$ und $v = (\theta(\alpha\beta)\alpha\beta)^i\theta(\alpha\beta)\alpha$ für $i \geq 0$.*

Satz 2.17 ([15, Proposition 5]) *Seien $u, v \in \Sigma^+$ zwei Wörter mit $uv = \theta(v)u$. Dann gilt für eine morphe Involution θ einer der folgenden beiden Fälle:*

(a) *$u = \alpha^i$, $v = \alpha^j$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ mit $\theta(\alpha) = \alpha$ und $i, j \geq 1$,*

(b) *$u = \theta(\alpha)\,(\alpha\theta(\alpha))^i$, $v = (\alpha\theta(\alpha))^j$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ und $i \geq 0$, $j \geq 1$.*

Lemma 2.18 ([15, Proposition 9]) *Sei θ eine morphe Involution und seien $u, v \in \Sigma^+$ Wörter mit $uv = \theta(v)\theta(u)$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

- *$u = \alpha^i$ und $v = \alpha^j$ für ein Wort $\alpha \in \Sigma^+$ mit $\alpha = \theta(\alpha)$ und $i, j \geq 1$,*
- *$u = (\theta(\alpha)\alpha)^i\theta(\alpha)$ und $v = (\alpha\theta(\alpha))^j\alpha$ für $\alpha \in \Sigma^+$ und $i, j \geq 0$.*

Korollar 2.19 *Gilt für zwei nichtleere Wörter $u, v \in \Sigma^+$ die Beziehung $uv = \theta(v)u$ sowie $ggT\{|u|, |v|\} = 1$, so hat uv die Form $(a\theta(a))^i$ für $i \geq 1$ oder $\theta(a)(a\theta(a))^i$ für $i \geq 0$ und ein $a \in \Sigma$.*

Beweis: Angenommen nach Satz 2.17 gilt $u = \alpha^i$ und $v = \alpha^j$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ und $i, j \geq 1$. Dann ist $|x| = i \cdot |\alpha|$ und $|y| = j \cdot |\alpha|$. Wegen $ggT\{|u|, |v|\} = 1$ folgt $|\alpha| = 1$, also ist $\alpha = a$ für ein Zeichen $a \in \Sigma$. Es ist $uv = \alpha^i\alpha^j = a^{i+j}$ und aus $uv = \theta(v)u$ folgt $\theta(a) = a$. Damit hat uv die gewünschte Form. Wir betrachten nun den zweiten Fall, $u = \theta(\alpha)(\alpha\theta(\alpha))^i$, $v = (\alpha\theta(\alpha))^j$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ und $i \geq 0$, $j \geq 1$. Hier ist $|u| = |\alpha| + i \cdot 2 \cdot |\alpha|$ und $|v| = j \cdot 2 \cdot |\alpha|$. Aus $ggT\{|u|, |v|\} = 1$ folgt erneut $|\alpha| = 1$ und $\alpha = a$ für ein $a \in \Sigma$. Es ist $uv = \theta(a)(\alpha\theta(\alpha))^i(a\theta(a))^j = \theta(a)(\alpha\theta(\alpha))^{i+j}$. □

Lemma 2.20 ([13, Lemma 6]) *Sei θ eine antimorphe Involution. Dann ist $w \in \Sigma^+$ genau dann θ–begrenzt, wenn $w = ax\theta(a)$ für ein $a \in \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$ gilt.*

Lemma 2.21 *Sei θ eine morphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein θ–begrenztes Wort. Die kürzeste θ–Grenze von w sei $u \in \Sigma^+$. Dann ist u unbegrenzt.*

Beweis: Angenommen u ist begrenzt. Dann gilt $u = vx_1 = x_2v$ für nichtleere Wörter $v, x_1, x_2 \in \Sigma^+$. Da u eine θ–Grenze von w ist, gilt $w = uy_1 = y_2\theta(u)$ für $y_1, y_2 \in \Sigma^+$. Dann folgt $w = vx_1y_1 = y_2\theta(x_2)\theta(v)$. Das Wort v mit $|v| < |u|$ ist θ–Grenze von w, ein Widerspruch. □

Bei einer morphen Involution muss die kürzeste θ–Grenze unbegrenzt, aber im Allgemeinen nicht θ–unbegrenzt sein. Sei beispielsweise $w = a^ibb^ia$ für $i \geq 1$ und θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Die kürzeste θ–Grenze ist a^ib, jedoch ist a^ib wiederum θ–begrenzt. Für antimorphe Involutionen besitzt die kürzeste θ–Grenze die Länge 1, wie das Korollar zu folgendem Lemma zeigt. Damit ist die kürzeste θ–Grenze sowohl unbegrenzt als auch θ–unbegrenzt.

Lemma 2.22 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein θ–begrenztes Wort mit $w = vx = y\theta(v)$ und $v = w_{[1]} \dots w_{[m]} \in \Sigma^+$ der Länge m für eine antimorphe Involution θ. Dann ist für alle $1 \leq i \leq m$ das Wort $u = w_{[1]} \dots w_{[i]}$ ebenfalls eine θ–Grenze von w.*

Beweis: Es ist $\theta(v) = \theta\big(w_{[1]} \dots w_{[m]}\big) = \theta\big(w_{[m]}\big) \dots \theta\big(w_{[1]}\big)$ und damit $w = w_{[1]} \dots w_{[m]} x = y\theta\big(w_{[m]}\big) \dots \theta\big(w_{[1]}\big)$. Offensichtlich lässt sich w für $1 \leq i \leq m$ darstellen als $w = w_{[1]} \dots w_{[i]} x' = y'\theta\big(w_{[i]}\big) \dots \theta\big(w_{[1]}\big)$. Daher ist $u = w_{[1]} \dots w_{[i]}$ für alle $1 \leq i \leq m$ eine θ–Grenze von w. □

Korollar 2.23 *Sei θ eine antimorphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein θ–begrenztes Wort. Dann ist die Länge der kürzesten θ–Grenze* 1.

Beobachtung 2.24 *Es ist eine bekannte und leicht einzusehende Eigenschaft, dass begrenzte Wörter $w \in \Sigma^+$ sich darstellen lassen als $w = uxu$. Bei einer antimorphen Involution θ gilt mit Korollar 2.23, dass die kürzeste θ–Grenze die Länge* 1 *besitzt. Also lässt sich w als $w = ax\theta(a)$ darstellen. Für morphe Involutionen und θ–begrenzte Wörter ist dies hingegen nicht der Fall. Sei beispielsweise $w = a^i b^i a^i$ für $i \geq 1$ und θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Dann ist die kürzeste θ–Grenze $a^i b^i$ und w lässt sich nicht als $w = ux\theta(u)$ darstellen.*

Lemma 2.25 *Sei θ eine antimorphe Involution. Weiter sei $w \in \Sigma^+$ ein Wort mit $|w| \geq 2$, das θ–unbegrenzt ist. Dann ist $wz \neq \theta(z)w$ für alle $z \in \Sigma^+$.*

Beweis: Angenommen es existiert ein $z \in \Sigma^+$ mit $wz = \theta(z)w$. Sei $w = w_{[1]} \dots w_{[n]}$ und $z = z_{[1]} \dots z_{[m]}$ für $n \geq 2$ und $m \geq 1$. Dann ist $w_{[1]} = \theta(z)_{[1]} = \theta\big(z_{[m]}\big)$ und $z_{[m]} = w_{[n]}$. Daraus folgt $w_{[n]} = \theta\big(w_{[1]}\big)$, also lässt sich w schreiben als $w = w_{[1]} w' = w'' \theta\big(w_{[1]}\big)$ und w ist θ–begrenzt, ein Widerspruch. □

Für morphe Involutionen gilt die Aussage von Lemma 2.25 nicht. Sei z. B. θ die morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Das Wort $w = abc^i$ für $i \geq 1$ ist dann θ–unbegrenzt. Jedoch gilt für $z = bac^i\, abc^i$ die Beziehung $wz = abc^i\, bac^i\, abc^i = \theta(z)w$. Jedoch haben Kari und Mahalingam in [13] folgende schwächere Aussage gezeigt.

Lemma 2.26 ([13]) *Sei θ eine morphe Involution und $u, v \in \Sigma^+$ seien θ–unbegrenzte Wörter mit $u \neq v$. Dann gilt $uv \neq \theta(v)u$.*

In [13] wurde gezeigt, das bei gegebener antimorpher Involutionen θ die Menge aller θ–unbegrenzten Wörter *dicht* ist. Eine Menge $X \subset \Sigma^*$ heißt *dicht*, wenn für alle $u \in \Sigma^*$ gilt $X \cap \Sigma^* u \Sigma^* \neq \emptyset$. Wir wollen nun den morphen Fall betrachten.

Lemma 2.27 *Sei θ eine morphe Involution und nicht die Identität. Dann ist die Menge aller θ–unbegrenzten Wörter dicht.*

Beweis: Da θ nicht die Identität ist, existiert ein Zeichen $a \in \Sigma$ mit $\theta(a) \neq a$. Es muss gezeigt werden, dass für alle $u \in \Sigma^*$ Wörter $x, y \in \Sigma^*$ so existieren, dass xuy ein θ–unbegrenztes Wort ist. Sei also $u \in \Sigma^*$ beliebig. Wir setzen $x = a^{|u|+1}$ und $y = a^{|u|+1}$. Angenommen xuy ist θ–begrenzt, es gilt also $xuy = vz = w\theta(v)$. Ist $|v| \leq |u| + 1$, so ist v Präfix von x und hat die Form $v = a^i$ für $i \leq |u| + 1$. Des weiteren ist $\theta(v)$ ein Suffix von y und hat daher ebenfalls die Form $\theta(v) = a^i$. Dies ist ein Widerspruch zu $a \neq \theta(a)$. Sei also $|v| > |u| + 1$, dann enthält v mindestens $|u| + 1$ mal das Zeichen a. Damit enthält $\theta(v)$ mindestens $|u| + 1$ mal das Zeichen $\theta(a) \neq a$. Jedoch enthält xuy höchstens $|u|$ Zeichen ungleich a, also kann $\theta(v)$ kein Suffix von xuy sein und xuy ist θ–unbegrenzt. □

Für ein Wort $w = w_{[1]} \dots w_{[n]}$ definieren wir $w^\bullet = w_{[1]} \dots w_{[n-1]}$. Für ein Zeichen $a \in \Sigma$ ist $a^\bullet = \varepsilon$, der Ausdruck $\varepsilon^\bullet$ ist undefiniert.

Lemma 2.28 ([2]) *Seien $x, y \in \Sigma^+$ nichtleere Wörter. Gilt $xy^\bullet = yx^\bullet$, so folgt $xy = yx$.*

Wir zeigen nun, dass sich Lemma 2.28 aus der Arbeit [2] auf Aussagen mit antimorphen, nicht aber mit morphen Involutionen, übertragen lässt.

Lemma 2.29 *Sei θ eine antimorphe Involution und $xy^\bullet = \theta(y)\theta(x)^\bullet$ für zwei Wörter $x, y \in \Sigma^+$. Dann folgt $xy = \theta(y)\theta(x)$.*

Beweis: Sei $x = x_{[1]} \dots x_{[n]}$ ein Wort der Länge n und $y = y_{[1]} \dots y_{[m]}$ ein Wort der Länge m. Es ist zu zeigen, dass $y_{[m]} = \theta(x)_{[n]}$ gilt. Da θ eine antimorphe Involution ist, gilt $\theta(y)_{[1]} = \big(\theta\big(y_{[m]}\big) \dots \theta\big(y_{[1]}\big)\big)_{[1]} = \theta\big(y_{[m]}\big)$ und analog $\theta(x)_{[n]} = \theta\big(x_{[1]}\big)$. Mit $x_{[1]} = \theta(y)_{[1]}$ ergibt sich $\theta(x)_{[n]} = \theta\big(x_{[1]}\big) = \theta\big(\theta(y)_{[1]}\big) = \theta\big(\theta\big(y_{[m]}\big)\big) = y_{[m]}$. □

Korollar 2.30 *Sei θ eine antimorphe Involution und $x\theta(y)^\bullet = y\theta(x)^\bullet$ für zwei Wörter $x, y \in \Sigma^+$. Mit Lemma 2.29 folgt $x\theta(y) = y\theta(x)$.*

Für morphe Involutionen θ gilt die Aussage von Lemma 2.29 im Allgemeinen nicht. Sei beispielsweise $\Sigma = \{a, b\}$ und θ die morphe Involution mit $a \mapsto b$, sowie $b \mapsto a$. Für die Wörter $x = a$ und $y = ba$ gilt $xy^\bullet = ab = \theta(b)\theta(a) = \theta(y)\theta(x)^\bullet$. Jedoch ist $aba = xy \neq \theta(y)\theta(x) = abb$.

Lemma 2.31 *Die Länge der kürzesten Grenze eines begrenzten Wortes $w \in \Sigma^+$, ist nicht größer als die Periode von w.*

Für Wortbegrenzungen ist diese Aussage leicht nachprüfbar. Für morphe Involutionen und alternierende θ–Perioden gilt die analoge Aussage jedoch nicht. Sei hierzu θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Wir betrachten das Wort $w = a^i\, b^i\, a^i$ für $i \geq 1$. Die alternierende θ–Periode von w ist i, die kürzeste θ–Grenze ist jedoch das Wort $a^i\, b^i$ der Länge $2i$. Es gelten aber die folgenden zwei schwächeren Aussagen.

Lemma 2.32 *Sei θ eine morphe Involution, $w \in \Sigma^+$ ein θ–begrenztes Wort und $u \in \Sigma^+$ die kürzeste θ–Grenze von w. Dann gilt $|u| \leq 2 \cdot \pi_\theta^{alt}(w)$.*

Beweis: Es gilt $w <_{\mathrm{p}} (v\theta(v))^\omega$ für ein $v \in \Sigma^+$ der Länge $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$. Hat w die Form $w = v\theta(v)\ldots\theta(v)v'$ mit $v' \leq_{\mathrm{p}} v$, so ist $\theta(v)v'$ mit $|\theta(v)v'| \leq 2 \cdot \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ eine θ–Grenze von w. Gilt $w = v\theta(v)\ldots v\theta(v'')$ mit $v'' \leq_{\mathrm{p}} v$, so ist $v\theta(v'')$ mit $|v\theta(v'')| \leq 2 \cdot \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ eine θ–Grenze von w. □

Lemma 2.33 *Sei θ eine morphe Involution, $w \in \Sigma^+$ ein Wort mit $\pi_\theta(w) < |w|$. Dann existiert ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge $|u| \leq \pi_\theta(w)$ so, dass u eine Grenze oder eine θ–Grenze von w ist.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass ein $u \in \Sigma^+$ der Länge kleinergleich $\pi_\theta(w)$ existiert, mit $u \leq_{\mathrm{p}} w$ und außerdem $u \leq_{\mathrm{s}} w$ oder $\theta(u) \leq_{\mathrm{s}} w$. Es ist $w \leq_{\mathrm{p}} \{\, v, \theta(v) \,\}^\omega$ für ein Wort $v \in \Sigma^+$ der Länge $\pi_\theta(w)$. Sei also $w = v_1 v_2 \ldots v_m$ mit $v_1, \ldots v_{m-1} \in \{\, v, \theta(v) \,\}$ und $|v_m| \leq \pi_\theta(w)$. Es ist $v_m \leq_{\mathrm{p}} v$ oder $v_m \leq_{\mathrm{p}} \theta(v)$. Damit ist v_m eine Grenze oder eine θ–Grenze von w. □

Wir führen nun noch eine Technik ein, mit deren Hilfe in manchen Fällen Aussagen über Wörter unter Involution auf die ursprünglichen Aussagen ohne Involution zurück geführt werden können.

Definition 2.34 *Sei Σ ein Alphabet und θ eine morphe oder antimorphe Involution. Dann sei Σ' ein neues Alphabet, das folgende Bedingungen erfüllt:*

- *$a \in \Sigma'$ oder $\theta(a) \in \Sigma'$ für alle $a \in \Sigma$,*
- *$a \in \Sigma'$ und $a \neq \theta(a) \Rightarrow \theta(a) \notin \Sigma'$.*

Ein solches Alphabet Σ' existiert offensichtlich, wenn auch nicht eindeutig. Wir definieren nun eine Substitutionsabbildung *ψ wie folgt:*

$$\psi : \Sigma \to \Sigma'$$
$$a \mapsto \begin{cases} a & \textit{falls } a \in \Sigma' \\ \theta(a) & \textit{falls } a \notin \Sigma' \end{cases} .$$

Wir erweitern die Abbildung $\psi : \Sigma \to \Sigma'$ in natürlicher Weise auf $\psi : \Sigma^* \to (\Sigma')^*$ durch $\psi(w) = \psi\big(w_{[1]}\big) \dots \psi\big(w_{[n]}\big)$. Die Substitutionsabbildung ψ ersetzt also alle Zeichen $w_{[i]}$ mit $w_{[i]} \notin \Sigma'$ des Wortes w durch $\theta\big(w_{[i]}\big)$. Für $w' = \psi(w)$ gilt $w_{[i]} = w'_{[i]}$ oder $\theta\big(w_{[i]}\big) = w'_{[i]}$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$.

Beobachtung 2.35 *Für eine Substitutionsabbildung ψ ist es lediglich entscheidend, worauf die Zeichen aus Σ von der Involution abgebildet werden. Ob θ hierbei eine morphe oder antimorphe Involution ist, spielt keine Rolle. Wir werden im folgenden von Substitutionsabbildungen ψ sprechen, die zu einer Involution θ gehören. Gemeint ist damit eine Abbildung $\psi : \Sigma \to \Sigma'$ für ein beliebiges Alphabet Σ' so, dass die Bedingungen aus Definition 2.34 erfüllt sind.*

Lemma 2.36 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, θ eine morphe oder antimorphe Involution und ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Dann ist $p \in \Pi_\theta^s(w)$ genau dann, wenn $p \in \Pi(\psi(w))$ gilt.*

Beweis: „$\Leftarrow$ “: Es gilt $\psi(w)_{[i]} = \psi(w)_{[i+p]}$ für alle $1 \leq i \leq n-p$. Es gilt außerdem $\psi(w)_{[i]} = w_{[i]}$ oder $\psi(w)_{[i]} = \theta\big(w_{[i]}\big)$ sowie $\psi(w)_{[i+p]} = w_{[i+p]}$ oder $\psi(w)_{[i+p]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$. Also ist $w_{[i]} = w_{[i+p]}$ oder $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ für jedes $i \in \{1, \dots, n-p\}$ und q ist eine schwache θ–Periode von w.

„$\Rightarrow$ “: Sei $i \in \{1, \dots, n-p\}$, dann gilt $w_{[i]} = w_{[i+p]}$ oder $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$, also $\psi\big(w_{[i]}\big) = \psi\big(w_{[i+p]}\big)$. Außerdem ist $\psi(w)_{[i]} = \psi\big(w_{[i]}\big)$ und $\psi(w)_{[i+p]} = \psi\big(w_{[i+p]}\big)$. Es folgt $\psi(w)_{[i]} = \psi(w)_{[i+p]}$, also ist p eine Periode von $\psi(w)$. □

Korollar 2.37 *Für jedes Wort $w \in \Sigma^+$ gilt $\pi_\theta^s(w) = \pi(\psi(w))$.*

Lemma 2.38 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, θ eine morphe oder antimorphe Involution und ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Dann existiert ein Wort $u \in \Sigma^+$ mit $|u| \leq \pi_\theta^s(w)$ und $\psi(u)$ ist Grenze von $\psi(w)$.*

Beweis: Das Wort $\psi(w)$ hat nach Korollar 2.37 die Periode p. Mit Lemma 2.31 folgt die Aussage. □

Kapitel 3

Der Satz von Fine und Wilf

Periodizität ist eine wichtige Eigenschaft von Wörtern. Ein Hauptresultat in diesem Gebiet und gleichzeitig eines der ältesten Resultate aus dem Bereich Kombinatorik auf Wörtern überhaupt, ist der Satz von Fine und Wilf. Der Satz ist eine Hilfe, um die Menge der Perioden eines Wortes zu charakterisieren. Der Satz, sowie ein Beweis des Satzes, finden sich z. B. in [2]. Wir wollen in diesem Kapitel den Satz von Fine und Wilf auf Involutionen erweitern. Die Arbeit [2] von Berstel und Karhumäki dient hierfür als Grundlage.

Lemma 3.1 *Sei θ eine morphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge n. Hat w eine θ–Grenze $v \in \Sigma^+$ mit $|v| < n$, so ist $p = n - |v|$ eine alternierende θ–Periode von w. Hat w eine alternierende θ–Periode $p < n$, so hat w eine θ–Grenze v der Länge $|v| = n - p$. In beiden Fällen ist $n = p + |v|$.*

Beweis: Angenommen w hat die θ–Grenze v. Nach Lemma 2.13 ist w damit Präfix von $(u\theta(u))^\omega$ für ein $u \in \Sigma^+$ mit $|u| = n - |v|$. Nach Definition der θ–Periode ist $p = |u|$ eine alternierende θ–Periode von w und es gilt $n = p + |v|$.
Angenommen w hat eine alternierende θ–Periode $p < n$, es gilt also $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$ für $u = w_{[1]} \dots w_{[p]}$ sowie $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ für alle $1 \leq i \leq n - p$. Es ist zu zeigen, dass w eine θ–Grenze $v = v_{[1]} \dots v_{[n-p]}$ besitzt. Wähle $x, v \in \Sigma^+$ mit $xv = w$ und $|x| = p$. Damit ist $w_{[p+1]} \dots w_{[n]} = v_{[1]} \dots v_{[n-p]}$, siehe Abbildung 4. Da w eine alternierende θ–Periode p besitzt, gilt $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ und es ergibt sich $w_{[1]} \dots w_{[n-p]} = \theta\big(w_{[1+p]}\big) \dots \theta\big(w_{[n]}\big) = \theta\big(v_{[1]}\big) \dots \theta\big(v_{[n-p]}\big) = \theta(v)$. Damit ist $\theta(v)$ Präfix von w und $v \in \Sigma^+$ ist θ–Grenze von w. $\square$

Die Aussage von Lemma 3.1 gilt nicht für antimorphe Involutionen. Sei hierzu θ eine antimorphe Involution über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ und $c \mapsto c$. Sei $i \geq 1$. Das Wort $w = ab^icb^ia$ besitzt eine θ–Grenze ab^i der Länge $i + 1$. Jedoch hat w lediglich die triviale (alternierende) θ–Periode $n = 2i + 3$. Auch die Gegenrichtung gilt im Allgemeinen nicht. Sei hierzu θ eine antimorphe Involution über $\Sigma = \{a, b\}$ mit

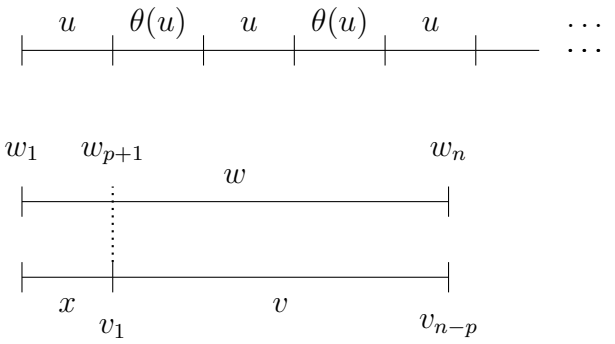

Abbildung 4: $w = xv <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^{\omega}$

$a \mapsto a$ und $b \mapsto b$. Für ein $i \geq 1$ ist $i+1$ eine (alternierende) θ–Periode von $w = ab^ib^i$, das Wort w besitzt jedoch keine θ–Grenze.

Lemma 3.2 *Es sei θ eine morphe Involution. Weiter sei $w \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge n mit $p, q \in \Pi_\theta^{alt}(w)$. Dann ist $p+q \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ genau dann, wenn $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i]}\big)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n-(p+q)$ und $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i]}\big)$ für alle $p+q+1 \leq i \leq n$ gilt.*

Beweis: „$\Leftarrow$“: Zu zeigen ist, dass $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p+q]}\big)$ für alle $1 \leq i \leq n-(p+q)$ gilt. Sei also $1 \leq i \leq n-(p+q)$. Wegen $p, q \in \Pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ ist $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big) = w_{[i+p+q]}$. Diese Aussage und die Voraussetzung $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i]}\big)$ implizieren $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p+q]}\big)$ und $p+q$ ist eine alternierende θ–Periode von w.
„$\Rightarrow$“: Angenommen $p+q$ ist eine alternierende θ–Periode von w. Sei $1 \leq i \leq n-(p+q)$. Es gilt $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p+q]}\big)$. Außerdem gilt $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big) = \theta\big(\theta\big(w_{[i+p+q]}\big)\big) = w_{[i+p+q]}$. Daraus folgt $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i]}\big)$. Sei nun $p+q+1 \leq i \leq n$. Es gilt $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i-p]}\big) = \theta\big(\theta\big(w_{[i-p-q]}\big)\big) = w_{[i-p-q]}$. Damit folgt $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i]}\big)$. □

Korollar 3.3 *Es sei θ eine morphe Involution. Weiter sei $w \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge n mit $p, q \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ und $p+q \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dann ist $p+q \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ genau dann, wenn $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i]}\big)$ für alle $1 \leq i \leq n$ und damit $w = \theta(w)$ gilt.*

Beweis: Nach Einsetzen von $p+q \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ in die Bedingungen $1 \leq i \leq n-(p+q)$ und $p+q+1 \leq i \leq n$ aus Lemma 3.2 ergibt sich $1 \leq i \leq n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq n$. Mit $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ folgt die Aussage. □

Satz 3.4 (Satz von Fine und Wilf) *Sei $w \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge n und $p, q \in \Pi(w)$. Falls $n \geq p+q-ggT\{p,q\}$ gilt, dann ist $ggT\{p,q\} \in \Pi(w)$.*

Ein Beweis dieser Aussage findet sich z. B. in [2]. Wir wollen diesen Satz nun auf morphe und antimorphe Involutionen sowie die verschiedenen θ–Perioden übertragen.

Satz 3.5 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge n und θ eine morphe Involution. Außerdem seien $p, q \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ mit $n \geq p + q$. Dann ist $ggT\{p, q\} \in \Pi_\theta^{alt}(w)$.*

Beweis: Ist $p = 1$ oder $q = 1$ so ist die Aussage trivial. Sei daher $p \neq 1$ und $q \neq 1$. Des weiteren seien p und q zunächst koprim, $ggT\{p, q\} = 1$. Es ist $w <_\mathrm{p} (u\theta(u))^\omega$ für ein $u \in \Sigma^+$ mit $|u| = p$. Außerdem ist $w <_\mathrm{p} (v\theta(v))^\omega$ für ein $v \in \Sigma^+$ mit $|v| = q$. Wegen $n \geq p + q$ lässt sich das Wort w schreiben als $w = uw'$ für ein $w' \in \Sigma^*$. Es ist $w' <_\mathrm{p} (\theta(u)u)^\omega$. Also ist $\theta(w') <_\mathrm{p} (u\theta(u))^\omega$, woraus mit $w <_\mathrm{p} (u\theta(u))^\omega$ und $|\theta(w')| \leq |w|$ folgt $\theta(w') <_\mathrm{p} w <_\mathrm{p} (v\theta(v))^\omega$. Damit ist $w = uw' <_\mathrm{p} u(\theta(v)v)^\omega$. Symmetrisch gilt $w = vw'' <_\mathrm{p} v(\theta(u)u)^\omega$. Mit $n \geq p + q$ folgt $u\theta(v) = v\theta(u)$. Da $ggT\{p, q\} = 1$ gilt, ist mindestens eine der θ–Perioden p und q ungerade. Außerdem ist $|u| \neq |v|$. Sei Œ p ungerade und sei zunächst $|u| = p > |v| = q$. Dann gilt nach Lemma 2.12 $u = xy$, $w = \theta(u) = y\theta(x)$ und $v = \theta(x)$ für Wörter $x, y \in \Sigma^*$. Es folgt $u = xy = \theta(y)x$. Allgemein gilt bei natürlichen Zahlen $n_1, n_2, m \in \mathbb{N}$ für den größsten gemeinsamen Teiler die Gleichung $ggT\{n_1, n_2\} = ggT\{n_1 + m \cdot n_2, n_2\}$. Damit ist $ggT\{|x|, |y|\} = ggT\{|x|, |x| + |y|\} = ggT\{|v|, |u|\} = 1$. Hieraus folgt auch, dass weder x noch y das leere Wort ε sein können. Denn angenommen es ist $y = \varepsilon$, so gilt $ggT\{|x|, |y|\} = |x| = |u| = p \neq 1$ im Widerspruch zu $ggT\{|x|, |y|\} = 1$. Nach Korollar 2.19 und da p ungerade ist, gilt $u = xy = \theta(a)(a\theta(a))^i$ für ein $a \in \Sigma$. Damit ist $w <_\mathrm{p} (u\theta(u))^\omega = (\theta(a)a)^\omega$ und w hat die θ–Periode 1. Sei nun $|u| < |v|$. Nach Lemma 2.12 gilt $u = xy$, $w = \theta(u) = \theta(y)x$ und $v = (\theta(x)\theta(y)xy)^i\theta(x)\theta(y)x$ für ein $i \geq 0$ und Wörter $x, y \in \Sigma^*$. Es folgt $u = y\theta(x) = xy$. Die Länge von v ist dann $|v| = i \cdot (2|x| + 2|y|) + 2|x| + |y| = j \cdot (|x| + |y|) + |x|$ für ein $j \geq 1$. Weiter ist $ggT\{|x|, |y|\} = ggT\{|x|, |x| + |y|\} = ggT\{j \cdot (|x| + |y|) + |x|, |x| + |y|\} = ggT\{|v|, |u|\} = 1$. Analog zum Fall $|u| > |v|$ folgt aus $y\theta(x) = xy$ und $ggT\{|x|, |y|\} = 1$ wiederum, dass w die alternierende θ–Periode 1 besitzt.

Sei nun $ggT\{p, q\} = d > 1$. Wir definieren Wörter $w^{[i]} = w_{[i]}w_{[i+d]} \ldots w_{[i+n_i d]}$ für $1 \leq i \leq d - 1$ und $n_i = \lfloor (n - i - 1)/d \rfloor$. Diese Wörter haben koprime alternierende θ–Perioden p/d und q/d und mindestens die Länge $\lfloor n/d \rfloor$. Wegen $n \geq p + q$ und $p/d, q/d \in \mathbb{N}$ gilt auch $\lfloor n/d \rfloor \geq p/d + q/d$ und es lässt sich der erste Fall anwenden. Alle Wörter $w^{[i]}$ haben also die alternierende θ–Periode 1. Es ist damit $w <_\mathrm{p} (v\theta(v))^\omega$ für ein Wort v der Länge d und d ist eine alternierende θ–Periode des Wortes w. □

Die Bedingung $n \geq p + q$ ist für alternierende θ–Perioden bei morphen Involutionen θ scharf: Sei θ eine morphe Involution auf $\Sigma = \{a, b\}$ mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Dann hat $w = a^i b^i$ für $i \geq 2$ alternierende θ–Perioden $p = i$ und $q = i + 1$. Es ist $|w| = 2i \geq p + q - 1 = 2i$, aber $ggT\{i, i + 1\} = 1$ ist offensichtlich keine alternierende θ–Periode von w.

Korollar 3.6 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge n mit θ–Grenzen $x \in \Sigma^+$ und $y \in \Sigma^+$ der Länge $|x|, |y| < n$. Falls $|x| + |y| \geq n$ ist, dann hat w eine θ–Grenze der Länge $n - ggT\{n - |x|, n - |y|\}$.*

Beweis: Das Wort w hat nach Lemma 3.1 θ–Perioden $n - |x|$ und $n - |y|$. Man erkennt durch Umformung, dass $|x| + |y| \geq n$ genau dann gilt, wenn $n \geq n - |x| + n - |y|$ ist. In diesem Fall ist $ggT\{n - |x|, n - |y|\}$ eine θ–Periode von w und daher existiert nach Lemma 3.1 eine θ–Grenze der Länge $n - ggT\{n - |x|, n - |y|\}$. □

Für die restlichen Aussagen dieses Kapitels sei $w = w_{[0]} \dots w_{[n-1]}$, die Indizierung der Zeichen beginnt also bei 0.

Satz 3.7 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort mit $p, q \in \Pi_\theta^s(w)$. Gilt $n \geq p + q - ggT\{p, q\}$, dann ist $ggT\{p, q\} \in \Pi_\theta^s(w)$.*

Beweis: Sei $\Sigma_\theta \subseteq \Sigma$ ein neues Alphabet und $\psi : \Sigma^* \to \Sigma_\theta^*$ die zugehörige Substitutionsabbildung, beides wie in Definition 2.34 beschrieben. Nach Lemma 2.36 sind p und q Perioden von $\psi(w)$. Aus Satz 3.4 folgt, dass $ggT\{p, q\}$ eine Periode von $\psi(w)$ ist. Mit Lemma 2.36 folgt, dass $ggT\{p, q\}$ eine schwache θ–Periode von w ist. □

Satz 3.8 *Sei θ eine morphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort mit $p, q \in \Pi_\theta(w)$. Gilt $n \geq p + q - ggT\{p, q\}$, dann ist $ggT\{p, q\} \in \Pi_\theta(w)$.*

Beweis: Sei zunächst $ggT\{p, q\} = 1$. Nach Beobachtung 2.2 (c) und Satz 3.7 hat w die schwache θ–Periode 1. Nach Beobachtung 2.6 (b) hat w damit auch die θ–Periode 1. Sei jetzt $ggT\{p, q\} = d > 1$. Wir betrachten das Wort $w' = w_{[0]} \dots w_{[p+q-d]}$ der Länge $n' = p + q - d$. Es sind p und q beides θ–Perioden von w, also sind p und q auch θ–Perioden von $w' \leq_{\mathrm{p}} w$. Wir definieren nun ein neues Alphabet $\Sigma^{(d)} = \{ a_0 \dots a_{d-1} \mid a_i \in \Sigma \text{ für alle } 0 \leq i \leq d-1 \}$. Wir codieren also d Zeichen aus Σ zu einem Zeichen in $\Sigma^{(d)}$. Da d die Länge n' des Wortes w' teilt, können wir $w' \in \Sigma^+$ damit zu $x = x_{[0]} \dots x_{[(n'/d)-1]}$ mit Zeichen aus $\Sigma^{(d)}$ codieren. Wir übertragen die Involution θ von Σ in natürlicher Weise auf $\Sigma^{(d)}$, also durch $\theta(a_0 \dots a_{d-1}) = \theta(a_0) \dots \theta(a_{d-1}) \in \Sigma^{(d)}$. Das Wort x besitzt θ–Perioden p/d und q/d, siehe auch Abbildung 5. Es gilt $|x| = n'/d = p/d + q/d - 1$ und $ggT\{p/d, q/d\} = 1$. Also lässt sich der erste Fall anwenden und 1 ist θ–Periode von x. Damit ist d eine θ–Periode von w', es gilt $w' <_{\mathrm{p}} \{ v, \theta(v) \}^\omega$ für ein Wort v der Länge d. Da p eine θ–Periode von w ist, gilt $w <_{\mathrm{p}} \{ u, \theta(u) \}^\omega$ für ein $u \in \Sigma^+$ der Länge p. Es ist $u \leq_{\mathrm{p}} w'$ oder $\theta(u) \leq_{\mathrm{p}} w'$ und d teilt $|u| = p$. Daher lässt sich u darstellen als eine Abfolge der Wörter v und $\theta(v)$, also als $u = v_0 \dots v_{p/d-1}$ mit $v_0, \dots, v_{p/d-1} \in \{ v, \theta(v) \}$. Nach Beobachtung 2.8 ist d dann θ–Periode des Wortes w. □

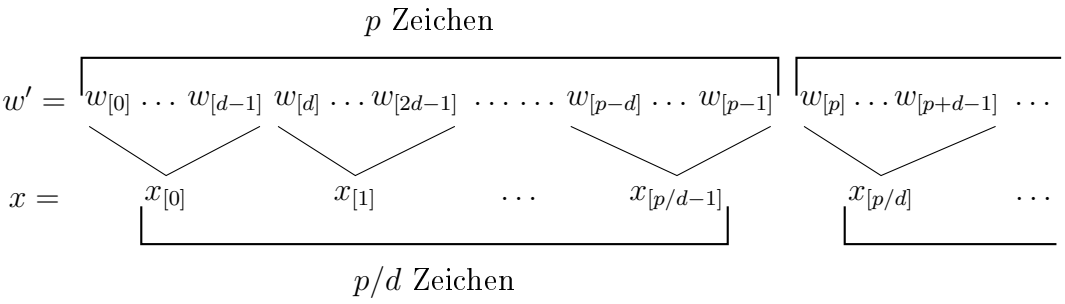

Abbildung 5: Codierung von w' zu x

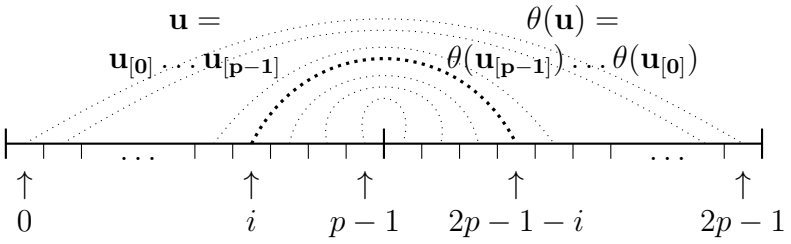

Abbildung 6: $u\theta(u)$ für antimorphe Involution θ

Die Bedingung $n \geq p + q - ggT\{p, q\}$ aus Satz 3.7 und Satz 3.8 ist scharf. Sei θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Wir betrachten das Wort $w = (abc)^i ba$ für $i \geq 1$. Die Zahlen $p = 3$ und $q = 3i + 1$ sind (schwache) θ–Perioden von w, es gilt $ggT\{3, 3i + 1\} = 1$. Weiter ist $3i+2 = |w| \geq p+q-ggT\{p, q\}-1 = 3+3i+1-1-1 = 3i + 2$, jedoch ist $ggT\{p, q\} = 1$ keine (schwache) θ–Periode von w.

Lemma 3.9 *Sei θ eine antimorphe Involution, $p \in \mathbb{N}$ und $w \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge n. Dann ist $p \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ genau dann, wenn $w_{[i]} = w_{[i+2p]}$ für alle $0 \leq i \leq n - 1 - 2p$, sowie $w_{[i]} = \theta\big(w_{[2p-i-1]}\big)$ für alle $0 \leq i \leq p - 1$ mit $2p - i - 1 \leq n - 1$ gilt.*

Beweis: Wir nehmen im Beweis zur einfacheren Darstellung $n \geq 2p$ an. Der Beweis für $n < 2p$ verläuft analog. „$\Rightarrow$“ : Es ist $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ mit $|u| = p$. Daher gilt offensichtlich $w_{[i]} = w_{[i+2p]}$ für alle $0 \leq i \leq n-1-2p$. Da θ antimorph ist, gilt $w_{[0]} \dots w_{[2p-1]} = u_{[0]} \dots u_{[p-1]}\theta\big(u_{[p-1]}\big) \dots \theta\big(u_{[0]}\big)$. Es ist also $w_{[i]} = \theta\big(w_{[2p-1-i]}\big)$ für alle $0 \leq i \leq p-1$, siehe auch Abbildung 6. „$\Leftarrow$“: Da $w_{[i]} = \theta\big(w_{[2p-i-1]}\big)$ für alle $0 \leq i \leq p-1$ gilt, ist $u\theta(u) \leq_{\mathrm{p}} w$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ mit $|u| = p$. Wegen $w_{[i]} = w_{[i+2p]}$ für alle $0 \leq i \leq n - 1 - 2p$, ist $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$ und p ist alternierende θ–Periode von w. $\square$

Als Hilfsmittel für den Beweis des nächsten Satzes, benötigen wir ein Lemma aus dem Bereich der Zahlentheorie.

Lemma 3.10 (Kürzungsregel, [3]) *Seien $a, b, d, p \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen und $p \neq 0$. Dann gilt*

$$da \equiv db \mod p \Leftrightarrow a \equiv b \mod \frac{p}{ggT\{d,p\}} .$$

Ein Beweis der Aussage findet sich in [3, S.82].

Satz 3.11 *Sei θ eine antimorphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein Wort mit $p, q \in \Pi_\theta^{alt}(w)$. Ist $n \geq p + q$, so folgt $ggT\{p,q\} \in \Pi_\theta^{alt}(w)$.*

Beweis: Es ist $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$ für ein $u \in \Sigma^+$ mit $|u| = p$ und $w <_{\mathrm{p}} (v\theta(v))^\omega$ für ein $v \in \Sigma^+$ mit $|v| = q$. Sei Œ $p < q$ und zunächst $ggT\{p,q\} = 1$. Wir wollen zeigen, dass w die alternierende θ–Periode $ggT\{p,q\} = 1$ besitzt. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $u_{[i]} = \theta(u_{[i+1]})$ gilt für alle $0 \leq i < p - 1$. Auf Grund der alternierenden θ–Perioden p und q gilt nach Lemma 3.9

$$w_{[i]} = w_{[i+2p]} \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n-1-2p \tag{3.11.1}$$
$$w_{[i]} = \theta\big(w_{[2p-1-i]}\big) \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq p-1 \tag{3.11.2}$$
$$w_{[i]} = \theta\big(w_{[2q-1-i]}\big) \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n-1-2q \tag{3.11.3}$$

Das Anwenden einer dieser Gleichungen bezeichnen wir auch als *springen*. Œ nehmen wir $(u\theta(u))^k u <_{\mathrm{p}} v$ und $(u\theta(u))^k u\theta(u) \not\leq_{\mathrm{p}} v$ für ein $k \in \mathbb{N}$ an. Dies ergibt Abbildung 7. Da $n \geq p+q$ ist, hat der eingezeichnete Präfix von $\theta(v)$ (mindestens) die Länge $|u| = p$. Wir betrachten nun das letzte Vorkommen des Wortes u in $v \leq_{\mathrm{p}} w$. Wir wollen von einer Position i in diesem Wort u mit Hilfe der Gleichungen 3.11.1, 3.11.2 und 3.11.3 zur Position $i+1$ springen und dadurch $u_{[i]} = \theta\big(u_{[i+1]}\big)$ zeigen. Auf Grund von Gleichung 3.11.1 können wir die Position im folgenden modulo $2p$ rechnen. Sind wir an Position i und springen wie durch Gleichung 3.11.2 beschrieben, so sind wir nach dem Sprung bei Position $2p-1-i \equiv -1-i \mod (2p)$. Nach einem Sprung von Position i wie in Gleichung 3.11.3 ist die neue Position $2q-1-i \mod (2p)$. Wir springen nun beginnend bei Position i abwechselnd wie durch Gleichung 3.11.2 und 3.11.3 beschrieben. Dadurch ergibt sich modulo $2p$ folgende Positionsfolge:

$$\begin{array}{ll}
0: & i \\
1: & -1-i \\
2: & 2q-1+1+i = 2q+i \\
3: & -1-2q-i \\
4: & 2q-1+1+2q+i = 4q+i \\
5: & -1-4q-i \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Springen wir von Position i zu Position i', so gilt $u_{[i]} = \theta\big(u_{[i']}\big)$. Für uns sind daher die Zeilen mit ungerader Nummer interessant, da hier eine ungerade Anzahl an Sprüngen vorliegt. Diese Zeilen haben die Form $-1 - r \cdot 2q - i$ für $r \in \mathbb{N}$. Da wir zu Position $i+1$ springen wollen, suchen wir ein r, das die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{array}{rrcll} & -1 - r \cdot 2q - i & \equiv & i+1 & (2p) \\ \Leftrightarrow & -r \cdot 2q & \equiv & 2i+2 & (2p) \\ \overset{3.10}{\Leftrightarrow} & -r \cdot q & \equiv & i+1 & \left(\frac{2p}{ggT\{2,2p\}}\right) \\ \Leftrightarrow & r \cdot q & \equiv & -i-1 & (p) \end{array}$$

Da $ggT\,\{p,q\} = 1$ gilt, ist q ein Erzeuger der Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ und es existiert ein $r \in \mathbb{N}$, das die Gleichung erfüllt. Wir müssen nun noch zeigen, dass die obige Sprungfolge mit Hilfe von Sprüngen um $2p$ so möglich ist, dass dabei das Wort w nicht verlassen wird. Wir betrachten hierzu Abbildung 8. Die Startposition liegt im Bereich $i_0 - i_2$ und wir zeigen durch Induktion, dass wir den Bereich $i_0 - i_5$ bei der Sprungfolge nicht verlassen. Springen wir von einer Position im Bereich $i_0 - i_5$ wie durch Gleichung 3.11.2 beschrieben, so ist dies offensichtlich möglich ohne den Bereich zu verlassen. Wir betrachten nun den Sprung nach Gleichung 3.11.3. Springt man von $i_4 - i_5$ so landet man in $i_1 - i_3$. Da wir modulo $2p$ rechnen, gilt dies auch für den Bereich $i_0 - i_1$. Von $i_3 - i_4$ springt man nach $i_2 - i_3$, von $i_1 - i_3$ nach $i_3 - i_5$. Also wird das Wort w bei den Sprüngen nicht verlassen und $ggT\,\{p,q\} = 1$ ist eine alternierende θ–Periode von w.

Sei nun $ggT\,\{p,q\} = d > 1$. Wir gehen analog zum Beweis von Satz 3.8 vor und definieren ein neues Alphabet $\Sigma^{(d)}$. Dabei werden d Zeichen aus Σ zu einem neuen Zeichen in $\Sigma^{(d)}$ codiert. Wir übertragen die antimorphe Involution θ von Σ in natürlicher Weise auf $\Sigma^{(d)}$ durch $\theta(a_0 \dots a_{d-1}) = \theta(a_{d-1}) \dots \theta(a_0) \in \Sigma^{(d)}$. Wir betrachten den Präfix $w' \leq_{\mathrm{p}} w$ der Länge $p+q$ und codieren $w' \in \Sigma^+$ zu $x = x_{[0]} \dots x_{[n'/d-1]}$ mit Zeichen aus $\Sigma^{(d)}$. Das Wort x besitzt alternierende θ–Perioden p/d und q/d, wie sich anhand von Abbildung 5 nachvollziehen lässt. Es gilt $|x| = n'/d = p/d + q/d$ und $ggT\,\{p/d, q/d\} = 1$. Also lässt sich der erste Fall anwenden und 1 ist alternierende θ–Periode von x. Damit ist d eine alternierende θ–Periode von w'. Wir betrachten den Präfix $u <_{\mathrm{p}} w'$ der Länge p. Da d ein Teiler von p ist, folgt $u = (\alpha\theta(\alpha))^i$ oder $u = (\alpha\theta(\alpha))^i\alpha$ für ein Wort $\alpha \in \Sigma^+$ der Länge d und $i \geq 1$ bzw. $i \geq 0$. In beiden Fällen folgt $w <_{\mathrm{p}} (\alpha\theta(\alpha))^\omega$ und d ist eine alternierende θ–Periode von w. □

Zur Veranschaulichung des Beweises geben wir nun noch ein Beispiel an. Sei $p = 5$, $q = 8$ und $n = 13$. Dies ergibt Abbildung 9. Beginnen wir nun bei Position $i = 1$ im Wort $u <_{\mathrm{p}} w$. Wir springen als erstes wie durch Gleichung 3.11.2 beschrieben zur Position $-1 - i \equiv -1 - 1 \equiv 8\ (2 \cdot 5)$. Daraufhin springen wir nach Gleichung 3.11.3 zu $2 \cdot 8 - 1 - 8 \equiv 7\ (10)$. Der dritte Sprung ergibt Position $-1 - 7 \equiv 2\ (10)$, wir sind wie gewünscht nach einer ungeraden Zahl an Sprüngen bei $i + 1 = 2$ angekommen. Also ist

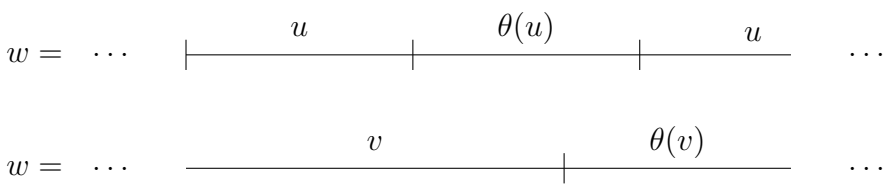

Abbildung 7: Darstellungen von w

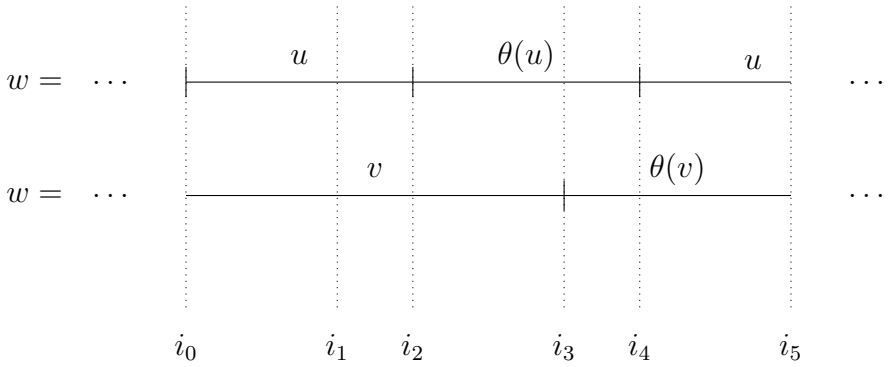

Abbildung 8: Darstellungen von w

$u_{[1]} = \theta(u_{[2]})$. Die Sprungfolgen aller Startpunkte sind:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{0}, 9, 6, 3, 2, 7, 8, \mathbf{1}\\
&\mathbf{1}, 8, 7, \mathbf{2}\\
&\mathbf{2}, 7, 8, 1, 4, 5, 0, 9, 6, \mathbf{3}\\
&\mathbf{3}, 6, 9, 0, 5, \mathbf{4}
\end{aligned}$$

Es ist nicht bekannt, ob die Grenze $n \geq p + q$ aus Satz 3.11 scharf ist. Wir geben nun noch ein Beispiel an, bei dem die Bedingung $n \geq p + q$ nicht erfüllt ist und $ggT\,\{p, q\}$ keine alternierende θ–Periode ist. Sei θ eine antimorphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Wir betrachten das Wort $w = cababab$. Das Wort w besitzt die alternierenden θ–Perioden 4 und 5. Es gilt $|w| = 7 \ngeq 4 + 5$ und $ggT\,\{p, q\} = 1$ ist keine alternierende θ–Periode von w.

Ist θ eine morphe Involution, so gilt der Satz von Fine und Wilf für θ–Perioden mit der Bedingung $n \geq p + q - ggT\,\{p, q\}$. Gilt der Satz für antimorphe Involutionen mit einer Bedingung $n \geq p + k \cdot q - ggT\,\{p, q\}$ mit $p < q$, so zeigt das folgende Beispiel, dass dabei $k \geq 2$ sein muss. Sei θ eine antimorphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Wir betrachten die Wörter $w_i = (abc)^i ab(cab)^i$ der Länge $6i + 2$ für $i \geq 1$. Es ist $w <_{\mathrm{p}} (abc)^\omega$ und daher ist $p = 3$ eine θ–Periode von w_i. Außerdem ist $w = v\theta(v)$ für das Wort $v = (abc)^i a$ der Länge $3i + 1$. Also ist auch $q_i = 3i + 1$ eine θ–Periode von w_i. Weiter ist $ggT\,\{3, 3i + 1\} = 1$ keine θ–Periode von w_i. Die Bedingung $|w_i| \geq p + k \cdot q_i - ggT\,\{p, q_i\}$

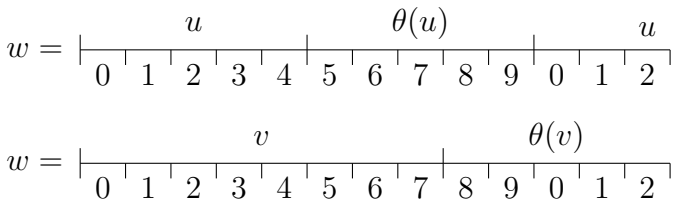

Abbildung 9: Beispiel: Fine und Wilf bei antimorpher Involution θ und alternierender θ–Periode

darf also nicht erfüllt sein, es muss $(|w_i| - p + ggT\{p, q_i\})/q_i < k$ gelten. Es ist

$$\frac{|w_i| - p + ggT\{p, q_i\}}{q_i} = \frac{6i + 2 - 3 + 1}{3i + 1} \xrightarrow[i \to \infty]{} 2 \ .$$

Da der Bruch $(|w_i| - p - ggT\{p, q_i\})/q_i$ von unten gegen 2 konvergiert, folgt $k \geq 2$. Czeizler, Kari und Seki haben in den Arbeiten [21, 6, 16] den Satz von Fine und Wilf mit antimorphen θ–Perioden detailliert untersucht und gezeigt, dass der Satz von Fine und Wilf für antimorphe θ–Perioden mit der Bedingung $n \geq p + k \cdot q - ggT\{p, q\}$ und $k = 2$ gilt.

Satz 3.12 ([21]) *Sei θ eine antimorphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein Wort mit $p, q \in \Pi_\theta(w)$ und $p < q$. Ist $n \geq p + 2 \cdot q - ggT\{p, q\}$, so existiert ein Teiler $t \in \mathbb{N}$ von p und q mit $t \in \Pi_\theta(w)$.*

Korollar 3.13 *Sei θ eine antimorphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein Wort mit $p, q \in \Pi_\theta(w)$ und $p < q$. Ist $n \geq p + 2 \cdot q - ggT\{p, q\}$, so folgt $ggT\{p, q\} \in \Pi_\theta(w)$.*

Beweis: Für $ggT\{p, q\} = 1$ folgt die Aussage direkt aus Satz 3.12. Sei nun $ggT\{p, q\} = d > 1$. Der restliche Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 3.8 und 3.11, daher geben wir ihn nur verkürzt an. Wir definieren ein neues Alphabet $\Sigma^{(d)}$, indem wir d Zeichen aus Σ zu einem neuen Zeichen in $\Sigma^{(d)}$ codieren. Betrachtet man das Wort w codiert durch Zeichen aus $\Sigma^{(d)}$, so folgt mit Satz 3.12 die Aussage. □

Lemma 3.14 ([7, Lemma 2]) *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort der Länge n. Sei $q \in \Pi(w)$ mit $q \leq n - \pi(w)$. Dann ist $\pi(w)$ ein Teiler von q.*

Wir übertragen dieses Lemma aus der Arbeit [7] nun auf Involutionen.

Lemma 3.15 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein Wort der Länge n.*

(a) Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution und sei $q \in \Pi_\theta^s(w)$ mit $q \leq n - \pi_\theta^s(w)$. Dann ist die schwache θ–Periode $\pi_\theta^s(w)$ ein Teiler von q.

(b) Sei θ eine morphe Involution und sei $q \in \Pi_\theta(w)$ mit $q \leq n - \pi_\theta(w)$. Dann ist die θ–Periode $\pi_\theta(w)$ ein Teiler von q.

(c) Sei θ eine antimorphe Involution und sei $q \in \Pi_\theta(w)$ mit $2q \leq n - \pi_\theta(w)$. Dann ist die θ–Periode $\pi_\theta(w)$ ein Teiler von q.

(d) Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution und sei $q \in \Pi_\theta^{alt}(w)$ mit $q \leq n - \pi_\theta^{alt}(w)$. Dann ist die alternierende θ–Periode $\pi_\theta^{alt}(w)$ ein Teiler von q.

Beweis: (a): Es gilt $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w) + q \leq n$. Nach Satz 3.7 gilt $ggT\{\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w), q\} \in \Pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$. Wegen $ggT\{\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w), q\} = \pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$ folgt, dass die schwache θ–Periode $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$ ein Teiler von q ist. Die Aussage (b) wird analog mit Hilfe von Satz 3.8 bewiesen, (c) mit Satz 3.12 und (d) mit Satz 3.5 und Satz 3.11. □

Übersicht: Bedingungen Fine und Wilf bei morpher Involution θ

schwache θ–Periode	θ–Periode	alternierende θ–Periode
$n \geq p + q - ggT\{p, q\}$	$n \geq p + q - ggT\{p, q\}$	$n \geq p + q$

Übersicht: Bedingungen Fine und Wilf bei antimorpher Involution θ

schwache θ–Periode	θ–Periode	alternierende θ–Periode
$n \geq p + q - ggT\{p, q\}$	$n \geq p + 2 \cdot q - ggT\{p, q\}$ für $p < q$	$n \geq p + q$ *

Abbildung 11: Bedingungen für den Satz von Fine und Wilf bei Involutionen. Bei Gleichung $*$ ist nicht bekannt, ob die Grenze scharf ist.

Kapitel 4

Kritische Faktorisierungen

Neben dem Satz von Fine und Wilf ist das kritische Faktorisierungstheorem ein weiteres großes Resultat aus dem Bereich Periodizität von Wörtern. Das Theorem der kritischen Faktorisierungen stellt einen Zusammenhang zwischen der Periode eines Wortes und einer lokalen Periode her, die wir im folgenden definieren werden. In diesem Kapitel wird das Resultat auf morphe Involutionen übertragen. Außerdem wird gezeigt, dass die Aussage für antimorphe Involutionen nicht gilt. Grundlage für das Kapitel ist die Arbeit [8] von Harju und Nowotka, sowie Kapitel 8 aus [18] von Lothaire.

Wir definieren nun Relationen $\sim_{\mathrm{p}}$ und $\sim_{\mathrm{s}}$. Es ist $u \sim_{\mathrm{p}} v$ für zwei Wörter $u, v \in \Sigma^+$ genau dann, wenn $u \leq_{\mathrm{p}} v$ oder $v \leq_{\mathrm{p}} u$ gilt. Analog ist $u \sim_{\mathrm{s}} v$, wenn $u \leq_{\mathrm{s}} v$ oder $v \leq_{\mathrm{s}} u$ gilt. Die Relation $\sim_{\mathrm{p}}$ ist reflexiv, aber nicht transitiv: Es ist $w \leq_{\mathrm{p}} w$ für alle $w \in \Sigma^+$, also ist $\sim_{\mathrm{p}}$ reflexiv. Sei nun $u = aba$, $v = ab$ und $w = abc$. Dann gelten wegen $v \leq_{\mathrm{p}} u$ und $v \leq_{\mathrm{p}} w$ die Relationen $u \sim_{\mathrm{p}} v$ und $v \sim_{\mathrm{p}} w$. Es ist aber $u \not\leq_{\mathrm{p}} w$ und $w \not\leq_{\mathrm{p}} u$, also $u \nsim_{\mathrm{p}} w$. Analog ist die Relation $\sim_{\mathrm{s}}$ ebenfalls reflexiv, aber nicht transitiv.

Eine *Faktorisierung* eines Wortes $w \in \Sigma^+$ ist ein Tupel (w_1, w_2) bestehend aus nichtleeren Wörtern $w_1, w_2 \in \Sigma^+$ mit $w = w_1 w_2$. Wir stellen dies auch durch $w = w_1.w_2$ dar. Ein Wort $v \in \Sigma^+$ heißt *Kreuzfaktor* einer Faktorisierung (w_1, w_2), falls $v \sim_{\mathrm{p}} w_2$ und $v \sim_{\mathrm{s}} w_1$ gilt. Die Menge aller Kreuzfaktoren einer Faktorisierung bezeichnen wir mit $\Pi(w_1, w_2)$. Den Kreuzfaktor mit minimaler Länge bezeichnen wir mit $\pi(w_1, w_2)$ und nennen $|\pi(w_1, w_2)|$ die *lokale Periode* von (w_1, w_2). Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution. Ein Wort $v \in \Sigma^+$ nennen wir *θ–Kreuzfaktor* einer Faktorisierung (w_1, w_2), falls $v \sim_{\mathrm{p}} w_2$ und $\theta(v) \sim_{\mathrm{s}} w_1$. Die Menge aller θ–Kreuzfaktoren einer Faktorisierung bezeichnen wir mit $\Pi_\theta(w_1, w_2)$, den θ–Kreuzfaktor mit minimaler Länge mit $\pi_\theta(w_1, w_2)$. Die Länge $|\pi_\theta(w_1, w_2)|$ nennen wir *lokale θ–Periode* der Faktorisierung (w_1, w_2). Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, (w_1, w_2) eine Faktorisierung von w und ψ eine Substitutionsabbildung zu einer morphen oder antimorphen Involution θ. Ein nichtleeres Wort $v \in \Sigma^+$ heißt *schwacher θ–Kreuzfaktor* von (w_1, w_2), falls $\psi(v) \sim_{\mathrm{p}} \psi(w_2)$ und $\psi(v) \sim_{\mathrm{s}} \psi(w_1)$ gilt. Die Länge des kürzesten schwachen θ–Kreuzfaktors nennen wir *schwache lokale θ–Periode* von (w_1, w_2).

Satz 4.1 (Kritische Faktorisierungstheorem) *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort. Dann existiert unter allen $\pi(w) - 1$ aufeinander folgenden Faktorisierungen von w, eine Faktorisierung (w_1, w_2) mit $\pi(w_1, w_2) = \pi(w)$.*

Beweise dieses Satzes finden sich in [8] und [18]. Wir werden zeigen, dass sich der Satz für schwache θ–Perioden bei einer morphen oder antimorphen Involution θ übertragen lässt. Für morphe und antimorphe Involutionen θ gilt für andere θ–Perioden keine zu Satz 4.1 analoge Aussage:

Sei $i \geq 1$ und sei θ eine morphe Involution über $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Das Wort $w = ac^i\, bc^i\, bc^i\, ac^i$ hat die alternierende θ–Periode $2i+2$. Wir betrachten folgende $2i+1$ Faktorisierungen:

$$
\begin{array}{ll}
ac^i\, bc^i\, bc^i\, ac^j\, .\, c^{i-j} & \text{für } 1 \leq j < i \\
ac^i\, bc^i\, bc^i\, a\, .\, c^i & \\
ac^i\, bc^i\, bc^i\, .\, ac^i & \\
ac^i\, bc^i\, bc^j\, .\, c^{i-j}\, ac^i & \text{für } 1 \leq j < i \\
ac^i\, bc^i\, b\, .\, c^i\, ac^i &
\end{array}
$$

Die zugehörigen kürzesten Kreuzfaktoren sind c, $c^i a$, $ac^i\, bc^i\, bc^i$, c und $c^i\, ac^i\, bc^i\, b$. Die kürzesten θ–Kreuzfaktoren sind c, $c^i b$, ac^i, c und $c^i a$. Keine der Längen dieser Kreuzfaktoren und θ–Kreuzfaktoren entspricht der alternierenden θ–Periode $2i+2$. Die θ–Periode von w ist $i+1$, was der Länge von zwei der θ–Kreufaktoren entspricht. Damit ist dies kein Gegenbeispiel für das kritische Faktorisierungstheorem bei θ–Perioden. Dieses Gegenbeispiel folgt nun.

Sei $i \geq 1$. Betrachten wir nun das Wort $w = uu\theta(u) = abca^i abca^i bacb^i$ für $u = abca^i$ und die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Das Wort w hat die θ–Periode $i+3$. Wir betrachten die $i+3-1 = i+2$ aufeinander folgenden Faktorisierungen:

$$
\begin{array}{ll}
abca^j\, .\, a^{i-j}\, abca^i\, bacb^i & \text{für } 1 \leq j \leq i \\
abca^i\, a\, .bca^i\, bacb^i & \\
abca^i\, ab\, .\, ca^i\, bacb^i &
\end{array}
$$

Die kürzesten Kreufaktoren sind a, $bca^i\, bacb^i\, abca^i\, a$ und $ca^i\, bacb^i\, abca^i\, ab$. Die kürzesten θ–Kreuzfaktoren sind $a^{i-j}\, abca^i\, bacb^j$, b und $ca^i\, bacb^i\, ba$. Keine der Längen dieser kürzesten Kreuzfaktoren und kürzesten θ–Kreuzfaktoren entspricht der θ–Periode $i+3$.

Für antimorphe Involutionen θ gilt ebenfalls keine analoge Aussage zu Satz 4.1. Sei hierzu θ eine antimorphe Involution über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Sei weiter $w = u\theta(u)u = abca^i\, b^i cab\, a^i bca$ für $u = abca^i$ und $i \geq 2$. Das Wort w hat die (alternierende) θ–Periode $i+3$. Wir betrachten die $i+3-1 = i+2$ aufeinander

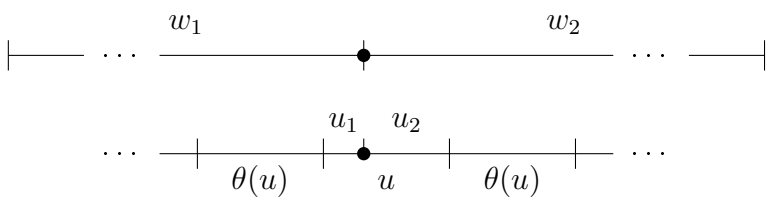

Abbildung 11: Darstellung der Faktorisierung (w_1, w_2)

folgenden Faktorisierungen:

$$abca^i\, b^j \,.\, b^{i-j}\, cab\, abca^i \qquad \text{für } 1 \leq j < i$$
$$abca^i\, b^i \,.\, cab\, abca^i$$
$$abca^i\, b^i c \,.\, ab\, abca^i$$
$$abca^i\, b^i ca \,.\, b\, abca^i$$

Die zugehörigen kürzesten Kreuzfaktoren sind b, $cab\, abca^i\, b^i$, $ab\, abca^i\, b^i c$ und $b\, abca^i\, b^i ca$. Bei der ersten Faktorisierung ist b der erste Buchstabe des Wortes w_2, der letzte Buchstabe von w_1 ist ebenfalls b. Da $b \neq \theta(b)$ gilt, gibt es keinen Kreuzfaktor $v = v_{[1]} \ldots v_{[n]} \in \Sigma^+$ mit $v_{[1]} \ldots v_{[n]} \sim_{\mathrm{p}} w_2$ und $\theta(v) = \theta(v_{[n]}) \ldots \theta(v_{[1]}) \sim_{\mathrm{s}} w_1$. Aus demselben Grund besitzen auch die zweite und dritte Faktorisierung keinen kürzesten θ–Kreuzfaktor. Der kürzeste θ–Kreuzfaktor der vierten Faktorisierung ist b. Alle Längen sind wiederum ungleich der θ–Periode $i + 3$.

Lemma 4.2 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort und θ eine morphe Involution. Weiter sei (w_1, w_2) eine Faktorisierung von w. Dann gilt $|\pi_\theta(w_1, w_2)| \leq \pi_\theta^{alt}(w)$.*

Beweis: Es ist $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$ für ein $u \in \Sigma^+$ mit Länge $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$. Trennt die Faktorisierung das Wort w an einer Grenze zwischen u und $\theta(u)$, dann gilt $w_2 <_{\mathrm{p}} (\theta(u)u)^\omega$ und $w_1 <_{\mathrm{s}} (\theta(u)u)^i$ für ein $i \geq 0$. In diesem Fall ist $\theta(u)$ ein θ–Kreuzfaktor der Länge $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ und die Aussage ist erfüllt. Analog gilt die Aussage falls die Faktorisierung das Wort w an einer Grenze zwischen $\theta(u)$ und u trennt. Es lässt sich Œ annehmen, dass die Faktorisierung wie in Abbildung 11 dargestellt werden kann. Denn falls die in Abbildung 11 eingezeichneten Wörter u oder θ nicht vollständig in w liegen, wird $|\pi_\theta(w_1, w_2)|$ dadurch höchstens kleiner. Das Wort u lässt sich als $u = u_1 u_2$ mit $u_1 \leq_{\mathrm{s}} w_1$ und $u_2 \leq_{\mathrm{p}} w_2$ schreiben. Dann gilt offensichtlich $u_2\theta(u_1) \leq_{\mathrm{p}} w_2$ und $\theta(u_2\theta(u_1)) = \theta(u_2)u_1 \leq_{\mathrm{s}} w_1$. Also ist $u_2\theta(u_1)$ ein θ–Kreuzfaktor von (w_1, w_2). Da $|u_2\theta(u_1)| = p$ gilt, hat der minimale θ–Kreuzfaktor höchstens die Länge $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$. □

Lemma 4.3 *Sei θ eine morphe Involution und (w_1, w_2) eine Faktorisierung eines Wortes $w \in \Sigma^+$. Dann ist der kürzeste θ–Kreuzfaktor $v = \pi_\theta(w_1, w_2)$ unbegrenzt.*

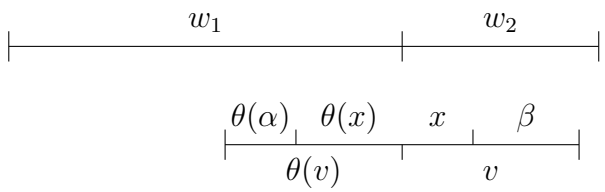

Abbildung 12: θ–Kreuzfaktor v von (w_1, w_2)

Beweis: Angenommen v ist begrenzt, es ist also $v = \alpha x = x\beta$ für nichtleere Wörter $\alpha, \beta, x \in \Sigma^+$. Œ kann angenommen werden, dass $v \leq_{\mathrm{p}} w_2$ und $\theta(v) \leq_{\mathrm{s}} w_1$ gilt. Die Fälle mit $w_2 \leq_{\mathrm{p}} v$ oder $w_1 \leq_{\mathrm{s}} \theta(v)$ verlaufen analog. Sei also $v = x\beta \leq_{\mathrm{p}} w_2$ und $\theta(v) = \theta(\alpha)\theta(x) \leq_{\mathrm{s}} w_1$ wie in Abbildung 12. Dann ist das Wort x ein θ–Kreuzfaktor mit Länge $|x| < |v|$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, v ist kürzester θ–Kreuzfaktor von (w_1, w_2). Also ist $v = \pi_\theta(w_1, w_2)$ unbegrenzt. □

Lemma 4.4 *Sei $|\Sigma| \geq 3$ und sei θ eine morphe Involution und nicht die Identität. Dann existiert für alle $p \geq 1$ ein Wort $w \in \Sigma^+$ so, dass $p = \pi_\theta^{alt}(w)$ gilt und p außerdem der lokalen θ–Periode aller Faktorisierungen von w entspricht.*

Beweis: Die Involution θ ist nicht die Identität, also existiert ein $a \in \Sigma$ mit $a \neq \theta(a)$. Da $|\Sigma| \geq 3$ gilt, existiert ein Zeichen $c \in \Sigma$ mit $a \neq c$ und $\theta(a) \neq c$. Dann folgt $\theta(c) \neq a$ sowie $\theta(c) \neq \theta(a)$. Es ist $p = i + 1$ für ein $i \geq 0$. Wir setzen $w = a^i c\theta(a)^i\theta(c)$ und es gilt $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w) = p$. Wir betrachten nun folgende zwei Typen von Faktorisierungen des Wortes w:

$$a^j \,.\, a^{i-j}\, c\, \theta(a)^i\, \theta(c) \qquad \text{für ein } j \text{ mit } 1 \leq j \leq i$$
$$a^i\, c\, \theta(a)^j \,.\, \theta(a)^{i-j}\, \theta(c) \qquad \text{für ein } j \text{ mit } 0 \leq j \leq i$$

Es lässt sich nachprüfen, dass im ersten Fall der kürzeste θ–Kreuzfaktor $v = a^{i-j}\, c\, \theta(a)^j$ ist. Das Wort v hat die Länge $i - j + 1 + j = i + 1 = p$. Im zweiten Fall ist der kürzeste θ–Kreuzfaktor $v = \theta(a)^{i-j}\theta(c)a^j$. Wieder gilt $|v| = i - j + 1 + j = i + 1 = p$. □

Lemma 4.5 *Sei θ eine morphe Involution und nicht die Identität. Dann existiert für alle $p \in \mathbb{N}$ mit $p \neq 3$ ein Wort $w \in \Sigma^+$ mit $\pi_\theta^{alt}(w) = p$ so, dass alle Faktorisierungen von w die lokale θ–Periode 1 oder 2 besitzen.*

Beweis: Da θ nicht die Identität ist, gilt $a \neq \theta(a)$ für ein Zeichen $a \in \Sigma$. Für $p = 1$ wählen wir das Wort $w = a$, für $p = 2$ das Wort $w = aa$. Sei nun also $p \geq 4$ und p ist gerade. Dann setzen wir

$$w = (a\theta(a))^i\, aa\, (\theta(a)a)^i\, \theta(a)\theta(a)$$

für $i = \frac{p-2}{2} > 0$. Es gilt $\left|(a\theta(a))^i aa\right| = 2i+2 = p$ und $\theta\left((a\theta(a))^i aa\right) = (\theta(a)a)^i \theta(a)\theta(a)$. Es lässt sich überprüfen, dass p die alternierende θ–Periode des Wortes w ist und alle Faktorisierungen von w die lokale θ–Periode 1 oder 2 besitzen. Für ungerades $p \geq 4$ definieren wir

$$w = (a\theta(a))^i aa\theta(a)\ (\theta(a)a)^i \theta(a)\theta(a)a$$

für $i = \frac{p-3}{2} > 0$. Das Wort w besitzt die alternierende θ–Periode $2 \cdot i + 3 = p$ und alle Faktorisierungen besitzen die lokale θ–Periode 1 oder 2, wie sich nachprüfen lässt. □

Die Aussage von Lemma 4.5 gilt nicht für $p = 3$, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 4.6 *Sei θ eine morphe Involution und nicht die Identität. Dann existiert kein Wort $w \in \Sigma^+$ mit $\pi_\theta^{alt}(w) = 3$ so, dass alle Faktorisierungen von w die lokale θ–Periode 1 oder 2 besitzen.*

Beweis: Angenommen es existiert ein Wort w mit alternierender θ–Periode 3 und die lokale θ–Periode aller Faktorisierungen von w ist jeweils 1 oder 2. Das Wort w hat mindestens die Länge 3. Beweis durch Fallunterscheidung: Es gilt $w = abc\ldots$ für nicht notwendigerweise unterschiedliche Zeichen $a, b, c \in \Sigma$. Wir betrachten zunächst die Faktorisierung $(a, bc\ldots)$.

Fall 1: Hat die Faktorisierung $(a, bc\ldots)$ die lokale θ–Periode 1, so ist $b = \theta(a)$ und $a\theta(a)c \leq_{\mathrm{p}} w$. Da die Faktorisierung $(a\theta(a), c\ldots)$ nach Annahme die lokale θ–Periode 1 oder 2 hat, gilt $c = a$ oder $c = \theta(a)$. Ist $|w| = 3$, dann hat w jedoch im Widerspruch zur Annahme die alternierende θ–Periode 1 oder 2. Es ist also $a\theta(a)c\theta(a) \leq_{\mathrm{p}} w$ mit $c = a$ oder $c = \theta(a)$. Ist $c = a$, so hat w nach Beobachtung 2.9 die alternierende θ–Periode 1, ein Widerspruch. Daher ist $c = \theta(a)$ und $a\theta(a)\theta(a)\theta(a) \leq_{\mathrm{p}} w$. Da die lokale θ–Periode von $(a\theta(a), \theta(a)\theta(a)\ldots)$ nach Annahme entweder 1 oder 2 ist, folgt $a = \theta(a)$. Damit besitzt w die alternierende θ–Periode 1, erneut ein Widerspruch.

Fall 2: Hat $(a, bc\ldots)$ die lokale θ–Periode 2, so ist $a = \theta(c)$ und $ab\theta(a) \leq_{\mathrm{p}} w$. Ist $|w| = 3$, so hat w die alternierende θ–Periode 2, im Widerspruch zur Annahme. Sei also $ab\theta(a)\theta(a) \leq_{\mathrm{p}} w$. Wir betrachten nun die Faktorisierung $(ab, \theta(a)\theta(a)\ldots)$. Ist die lokale θ–Periode dieser Faktorisierung 2, so folgt $a = \theta(a)$ und $a = b$. Also hat w die Form $w = a^i$ für ein $i \geq 4$ und $a = \theta(a)$. Dies ist ein Widerspruch. Die lokale θ–Periode von $(ab, \theta(a)\theta(a)\ldots)$ ist daher 1, es gilt $b = a$. Hat w die Länge 4, so hat w die alternierende θ–Periode 2. Dies ist ein Widerspruch. Damit ist $aa\theta(a)\theta(a)\theta(a) \leq_{\mathrm{p}} w$. Da die Faktorisierung $(aa\theta(a), \theta(a)\theta(a)\ldots)$ nach Annahme die lokale θ–Periode 1 oder 2 hat, folgt $a = \theta(a)$. Dies ist ein Widerspruch, da in diesem Fall w die alternierende θ–Periode 1 besitzt. □

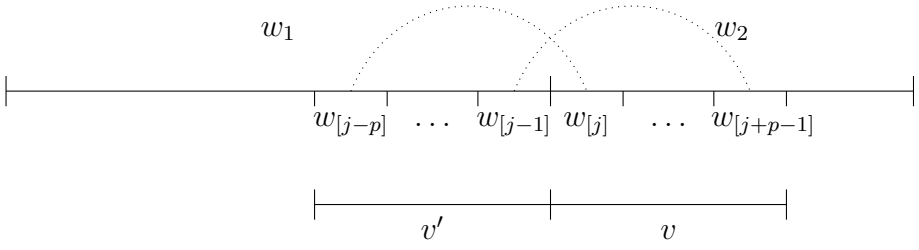

Abbildung 13: Schwacher θ–Kreuzfaktor v

Lemma 4.7 *Sei θ eine morphe Involution, $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort und (w_1, w_2) eine Faktorisierung von w. Weiter sei $q \in \mathbb{N}$ die schwache lokale θ–Periode von (w_1, w_2). Dann gilt $q \leq \pi_\theta^s(w)$.*

Beweis: Sei $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w) = p$. Wir können $|w_1|, |w_2| \geq p$ annehmen, da sonst die schwache lokale θ–Periode nur kleiner wird. Sei $w_2 = w_{[j]} \dots w_{[n]}$ und sei $v \leq_{\mathrm{p}} w_2$ mit $|v| = p$. Weiter sei $v' \leq_{\mathrm{s}} w_1$ mit $|v'| = p$. Für jedes $i \in \{1, \dots, n-p\}$ gilt $w_{[i]} = w_{[i+p]}$ oder $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$. Also ist $\psi(v) = \psi(v') \leq_{\mathrm{s}} \psi(w_1)$ und das Wort v der Länge p ist schwacher θ–Kreuzfaktor der Faktorisierung (w_1, w_2). □

Beobachtung 4.8 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, θ eine morphe oder antimorphe Involution und ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Weiter sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, (w_1, w_2) eine Faktorisierung von w sowie $(\psi(w_1), \psi(w_2))$ eine Faktorisierung von $\psi(w)$. Dann existiert genau dann ein schwacher θ–Kreuzfaktor v der Länge ℓ von (w_1, w_2), wenn ein Kreuzfaktor v' der Länge ℓ von $\psi(w)$ existiert.*

Satz 4.9 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort mit $\pi_\theta^s(w) = p$. Dann existiert unter allen $p-1$ aufeinander folgenden Faktorisierungen von w eine Faktorisierung (w_1, w_2) mit schwacher lokaler θ–Periode p.*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass unter allen $p-1$ aufeinander folgenden Faktorisierungen, eine Faktorisierung (w_1, w_2) existiert, mit dem kürzesten schwachen θ–Kreuzfaktor v der Länge p. Beweis durch Widerspruch. Sei Σ_θ ein neues Alphabet und $\psi : \Sigma^* \to \Sigma_\theta^*$ die zugehörige Substitutionsabbildung. Nach Korollar 2.37 besitzt $\psi(w)$ die Periode p. Nach Lemma 4.7 ist die schwache lokale θ–Periode jeder Faktorisierung kleinergleich $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$. Angenommen es existieren $p-1$ aufeinander folgende Faktorisierungen von w mit schwachen θ–Kreuzfaktoren $v_1, \dots, v_{p-1}$ und $|v_1|, \dots, |v_{p-1}| < p$. Nach Beobachtung 4.8 existieren dann Kreuzfaktoren $v_1', \dots, v_{p-1}'$ der zugehörigen $p-1$ aufeinander folgenden Faktorisierungen von $\psi(w)$ mit $|v_1'|, \dots, \left|v_{p-1}'\right| < p$, im Widerspruch zu Satz 4.1 □

Kapitel 5

Das Ehrenfeucht–Silberger Problem

In diesem Kapitel wollen wir das Problem von Ehrenfeucht und Silberger aus dem Jahr 1979 näher betrachten. Das Problem von Ehrenfeucht und Silberger beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen der Periode eines Wortes und der Länge eines längsten unbegrenzten Faktors. Die Fragestellung dabei ist, wie lange kann ein Wort maximal sein, so dass die Länge eines längsten unbegrenzten Faktors des Wortes noch echt kleiner als die Periode des Wortes ist. Wir wollen das Problem in Bezug auf morphe und antimorphe Involutionen untersuchen und beginnen hierzu zunächst mit einigen Definitionen.

Definition 5.1 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, θ eine morphe oder antimorphe Involution und ψ eine Substitutionsabbildung. Mit $\tau(w)$ bezeichnen wir die Länge des längsten Faktors von w, der unbegrenzt ist. Es gilt $1 \leq \tau(w) \leq |w|$. Die Länge des längsten Faktors von w, der θ–unbegrenzt ist, bezeichnen wir mit $\tau_\theta(w)$. Das Wort w ist ψ–*begrenzt*, falls Wörter $u, v \in \Sigma^+$ mit $u <_{\mathrm{p}} w$ und $v <_{\mathrm{s}} w$ sowie $\psi(u) = \psi(v)$ existieren. Die Wörter u und v nennen wir ψ–Grenze von w. Aus der Definition folgt, dass u und v gleich lang sein müssen. Die Länge des längsten Faktors von w, der ψ–unbegrenzt ist, bezeichnen wir mit $\tau_\psi(w)$.*

Lemma 5.2 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, θ eine morphe Involution und ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Dann gilt $\tau_\psi(w) \leq \tau(w)$ und $\tau_\psi(w) \leq \tau_\theta(w)$.*

Beweis: Ist ein Faktor von w begrenzt, so ist er nach der Definition einer ψ–Grenze auch ψ–begrenzt. Die Umkehrung der Aussage ist, dass falls ein Faktor ψ–unbegrenzt ist, er auch unbegrenzt ist. Also ist der längste ψ–unbegrenzte Faktor auch unbegrenzt und es gilt $\tau_\psi(w) \leq \tau(w)$. Der Beweis der Aussage $\tau_\psi(w) \leq \tau_\theta(w)$ verläuft analog. □

Lemma 5.3 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, θ eine morphe Involution und ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Dann gilt $\tau_\psi(w) \leq \pi_\theta^s(w)$.*

Beweis: Angenommen es existiert ein ψ–unbegrenzter Faktor u von w, der länger als $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$ ist. Dann ist $\psi(u)$ ein unbegrenzter Faktor von $\psi(w)$ und nach Lemma 2.36 gilt $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w) = \pi(\psi(w))$. Es ist jedoch bekannt und leicht einzusehen, dass der längste unbegrenzte Faktor eines Wortes kürzer als die Periode des Wortes ist. □

Der längste Faktor eines Wortes $w \in \Sigma^+$, der sowohl unbegrenzt als auch θ–unbegrenzt ist, kann jedoch länger sein als $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$. Ein Beispiel hierfür ist das Wort $w = (ac^ja)^i\,b$ für $i \geq 2$ und $j \geq 1$, sowie die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$, $c \mapsto c$. Es gilt $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w) = j+2$, der längste unbegrenzte und θ–unbegrenzte Faktor ist $c^ja\,(ac^ja)^{i-1}\,b$ der Länge $(j+2)\cdot i$.

Lemma 5.4 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, θ eine morphe Involution und ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Angenommen w ist ψ–unbegrenzt. Dann ist w unbegrenzt und θ–unbegrenzt.*

Beweis: Das Wort w ist ψ–unbegrenzt und hat daher keine Darstellung der Form $w = ux = yv$ für $u, v, x, y \in \Sigma^+$ mit $\psi(u) = \psi(v)$. Also besitzt w auch keine Darstellung der Form $w = ux = yu$ oder $w = ux = y\theta(u)$, da $\psi(\theta(u)) = \psi(u)$ gilt. □

Korollar 5.5 *Sei r die Länge des längsten unbegrenzten und θ–unbegrenzten Faktors eines Wortes $w \in \Sigma^+$. Dann gilt $r \geq \tau_\psi(w)$.*

Die Umkehrung von Lemma 5.4 gilt im Allgemeinen nicht. Wir betrachten hierzu das Wort $w = cab^i\,caa^i$, die morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$ sowie eine zugehörige Substitutionsabbildung ψ. Das Wort w besitzt eine ψ–Grenze der Länge $i+2$. Jedoch ist w unbegrenzt sowie θ–unbegrenzt.

Wir wollen nun die Beziehung zwischen $\tau(w)$ und $\pi(w)$ betrachten. Da die Periode von w auch eine Periode jedes Faktors von w ist, folgt $\tau(w) \leq \pi(w)$. Aus dem kritischen Faktorisierungstheorem lässt sich folgern, dass $|w| > 2\cdot\pi(w) - 2$ die Gleichheit $\tau(w) = \pi(w)$ impliziert. Siehe hierzu [12]. Ehrenfeucht und Silberger haben untersucht, wie sich diese Bedingung an die Wortlänge in Bezug zu $\tau(w)$ statt zu $\pi(w)$ verhält. Im Jahr 1979 haben sie folgendes Problem formuliert: Wie lang muss ein Wort w in Bezug zu $\tau(w)$ mindestens sein, um die Beziehung $\tau(w) = \pi(w)$ zu implizieren? Die genaue Grenze hierfür war lange ein offenes Problem. Im Jahr 2009 haben Holub und Nowotka das Problem in [12] durch den folgenden Satz gelöst.

Satz 5.6 ([12]) *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort mit $|w| \geq \frac{7}{3}\cdot\tau(w)$. Dann gilt $\tau(w) = \pi(w)$.*

Wir wollen das Problem von Ehrenfeucht und Silberger unter Anwendung einer Involution betrachten. Die Aussage gilt im Allgemeinen nicht für morphe Involutionen und θ–Perioden. Als Gegenbeispiel betrachten wir das Wort $w = a^i\, b^i\, a^i$ für $i \geq 2$ und die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Ein längster θ–unbegrenzter Faktor ist a^i. Es gilt $|w| = 3 \cdot i \geq \frac{7}{3} \cdot \tau_\theta(w) = \frac{7}{3} \cdot i$ und $\tau_\theta(w) = i \neq \pi_\theta(w) = 1$. Wir betrachten daher nun ψ–begrenzte Faktoren sowie Faktoren, die sowohl unbegrenzt als auch θ–unbegrenzt sind. Sei $w = (acb)^i\, aca$ für $i \geq 2$ und θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Es gilt $\tau_\psi(w) = 3$, das Wort cba ist z. B. ein längster θ–unbegrenzter Faktor. Weiter ist $\pi_\theta(w) = 3i + 2$. Damit ist $\tau_\psi(w) \neq \pi_\theta(w)$, obwohl $|w| = 3i + 3 \geq \frac{7}{3} \cdot \tau_\psi(w)$ gilt. Da $|w|$ mit i wächst, $\tau_\psi(w)$ hingegen konstant ist, gilt die Aussage auch mit größerem Faktor als $\frac{7}{3}$ nicht. Ein unbegrenzter und θ–unbegrenzter Faktor maximaler Länge ist cba und besitzt ebenfalls die Länge $3 \neq \pi_\theta(w) = 3i + 2$. Demnach scheinen θ–Perioden bei morphen Involutionen keine geeignete Struktur zu sein, auf die sich der Satz von Ehrenfeucht und Silberger übertragen lässt. Den antimorphen Fall werden wir später, im Anschluss an Lemma 5.10 diskutieren. Für alternierende θ–Perioden bei morphen Involutionen und θ–unbegrenzte Faktoren gilt die zu Satz 5.6 analoge Aussage nicht. Sei beispielsweise $w = aababbabaababa$ und θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Es gilt $|w| = 14$ und $\tau_\theta(w) = 6$, die Bedingung $|w| = 14 \geq \frac{7}{3} \cdot \tau_\theta(w) = 14$ ist erfüllt. Jedoch ist $\pi_\theta^{\text{alt}}(w) = 14 \neq \tau_\theta(w) = 6$. Dies ist für das gegebene Σ und θ das kürzeste Beispiel mit $|w| \geq \frac{7}{3} \cdot \tau_\theta(w)$ und $\tau_\theta(w) \neq \pi_\theta^{\text{alt}}(w)$. Wir betrachten nun Wörter w_i, bei denen sogar $|w| > \frac{7}{3} \cdot \tau_\theta(w)$ und $\tau_\theta(w) \neq \pi_\theta^{\text{alt}}(w)$ gilt. Sei

$$w_i = (ab)^i abb(ab)^i aab(ab)^i a$$

für $i \geq 2$ und die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Es gilt $|w_i| = 6(i+1) + 1$, $\tau_\theta(w_i) = 2i + 4$ und $\pi_\theta^{\text{alt}}(w_i) = 4i + 5$, wie sich nachprüfen lässt. Ein längster θ–unbegrenzter Faktor von w_i ist beispielsweise $aab(ab)^i a$. Damit ist $\tau_\theta(w_i) \neq \pi_\theta^{\text{alt}}(w_i)$ für alle i. Für den Faktor $|w_i| / \tau_\theta(w_i)$ gilt $|w_i| / \tau_\theta(w_i) < 3$ wie sich durch die folgende Umformung erkennen lässt.

$$\begin{array}{lll} & \frac{6\cdot(i+1)+1}{2i+4} & < 3 \\ \Leftrightarrow & 6i+7 & < 6i+12 \quad \surd \end{array}$$

Für unsere Gegenbeispiele gilt also

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|w_i|}{\tau_\theta(w_i)} = 3 \ .$$

Dies motiviert die folgende Vermutung.

Vermutung 5.7 *Sei θ eine morphe Involution und sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort mit $|w| \geq 3 \cdot \tau_\theta(w)$. Dann gilt $\tau_\theta(w) = \pi_\theta^{alt}(w)$.*

Für schwache θ–Perioden kann die folgende Aussage getroffen werden.

Satz 5.8 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, θ eine morphe oder antimorphe Involution sowie ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Gilt $|w| \geq \frac{7}{3}\tau_\psi(w)$, dann ist $\tau_\psi(w) = \pi_\theta^s(w)$.*

Beweis: Ein Wort $u \in \Sigma^+$ ist offensichtlich genau dann ψ–unbegrenzt, wenn $\psi(u)$ unbegrenzt ist. Also ist $\tau(\psi(w)) = \tau_\psi(w)$. Ist $|w| \geq \frac{7}{3}\tau_\psi(w)$ erfüllt, so auch $|\psi(w)| \geq \frac{7}{3}\tau(\psi(w))$. Aus Satz 5.6 folgt $\tau(\psi(w)) = \pi(\psi(w))$. Nach Lemma 2.37 gilt $\pi(\psi(w)) = \pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$. Insgesamt ergibt sich $\tau_\psi(w) = \tau(\psi(w)) = \pi(\psi(w)) = \pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$. □

Lemma 5.9 *Sei θ eine morphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort. Dann gilt $\tau_\theta(w) \leq \pi_\theta^{alt}(w)$.*

Beweis: Angenommen es existiert ein θ–unbegrenzter Faktor $u \in \Sigma^+$ von w, der länger als $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ ist. Mit Beobachtung 2.5 ist $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ auch eine alternierende θ–Periode des Faktors u von w. Nach Lemma 3.1 besitzt u dann eine θ–Grenze der Länge $|u| - \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$, ein Widerspruch. □

Für morphe Involutionen und θ–Perioden gilt die Aussage von Lemma 5.9 nicht. Wir betrachten hierzu das Wort $w = a^i b^i$ für $i \geq 2$ und die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Es gilt $\tau_\theta(w) = i > \pi_\theta(w) = 1$.

Lemma 5.10 *Sei θ eine antimorphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein Wort so, dass Indizes $1 \leq i \neq j \leq n$ mit $\theta(w_{[i]}) \neq w_{[j]}$ existieren. Dann gilt $2 \cdot \tau_\theta(w) \geq n$.*

Beweis: Angenommen es existiert ein Wort w mit $2 \cdot \tau_\theta(w) < n$. Sei n gerade. Nach Lemma 2.20 ist ein Faktor $w_{[i]} \ldots w_{[j]}$ genau dann θ–unbegrenzt, wenn $w_{[i]} \neq \theta\big(w_{[j]}\big)$ gilt. Das Wort w enthält nach Annahme keinen θ–unbegrenzten Faktor $u \in \Sigma^+$ mit $|u| \geq n/2$. Die Faktoren $w_{[1]} \ldots w_{[i]}$ für $n/2 < i \leq n$ müssen daher θ–begrenzt sein. Es folgt $\theta\big(w_{[1]}\big) = w_{[i]}$ für $n/2 < i \leq n$. Das Wort w lässt sich darstellen als $w = w_{[1]} \ldots w_{[n/2]} \theta\big(w_{[1]}\big) \ldots \theta\big(w_{[1]}\big)$. Symmetrisch müssen auch die Faktoren $w_{[j]} \ldots w_{[n]}$ für $1 \leq j \leq n/2$ alle θ–begrenzt sein. Daher lässt sich das Wort w darstellen als $w = w_{[1]} \ldots w_{[1]} \theta\big(w_{[1]}\big) \ldots \theta\big(w_{[1]}\big)$, die ersten $n/2$ sowie die letzten $n/2$ Zeichen sind also jeweils gleich. Da nach Voraussetzung Indizes i, j mit $1 \leq i \neq j \leq n$ und $\theta\big(w_{[i]}\big) \neq w_{[j]}$ existieren, folgt $w_{[1]} \neq \theta\big(w_{[1]}\big)$. Dann ist der Faktor $w_{[1]} \ldots w_{[n/2]} = w_{[1]} \ldots w_{[1]}$ der Länge $n/2$ aber θ–unbegrenzt, ein Widerspruch. Der Fall $|w|$ ist ungerade, verläuft analog. □

Lemma 5.10 gibt für $\tau_\theta(w)$ mit $n/2$ eine Mindestlänge in Bezug zur Wortlänge an. Insbesondere enthält jedes Wort w mit $n \geq 2$ und zwei Stellen i, j mit $\theta(w_{[i]}) \neq w_{[j]}$, einen θ–unbegrenzten Faktor, der mindestens die Länge 2 hat. Dies ist für morphe Involutionen nicht der Fall, wie sich durch das Beispiel $w = (a\theta(a))^k$ leicht einsehen lässt. Aus

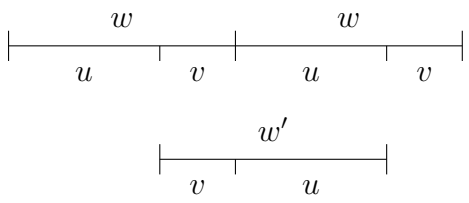

Abbildung 14: Conjugate von w

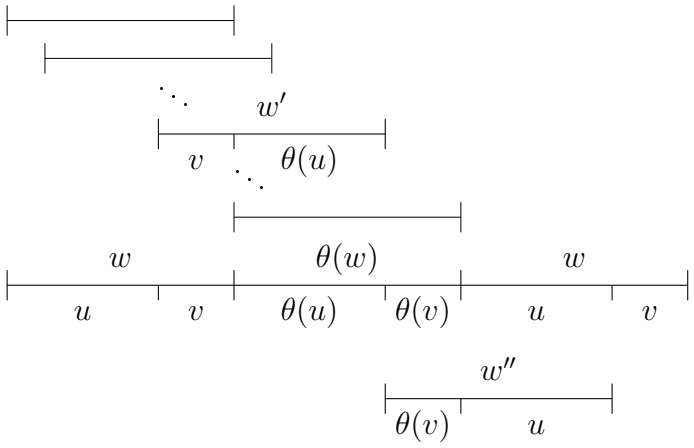

Abbildung 15: θ–Conjugate von w

dieser Mindestlänge für $\tau_\theta(w)$ bei antimorphen Involutionen folgt auch, dass Wörter mit $\tau_\theta(w) > \pi_\theta(w)$ und $\tau_\theta(w) > \pi_\theta^{\text{alt}}(w)$ existieren. Ein Beispiel ist das Wort $w = (aabb)^i aa$ für $i \geq 1$ und die Involution θ mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Es gilt $\pi_\theta(w) = 1$ und $\pi_\theta^{\text{alt}}(w) = 2$. Der längste θ–unbegrenzte Faktor von w ist jedoch $(aabb)^i aa$ der Länge $4i+2$. Das Problem von Ehrenfeucht und Silberger lässt sich daher nicht auf antimorphe Involutionen übertragen.

Wir definieren nun die Menge $\mathcal{C}(w)$ der *Conjugate* eines Wortes $w \in \Sigma^+$. Es gilt $w' \in \mathcal{C}(w)$ genau dann, wenn Wörter $u, v \in \Sigma^*$ mit $w' = vu$ und $w = uv$ existieren. Die Menge $\mathcal{C}(w)$ enthält also alle Wörter, die durch zyklische Verschiebung aus w entstehen, siehe Abbildung 14.

Analog definieren wir die Menge aller θ–*Conjugate* $\mathcal{C}_\theta(w)$ für eine morphe Involution θ. Es ist $w' \in \mathcal{C}_\theta(w)$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

- Es existieren $u, v \in \Sigma^*$ mit $w' = v\theta(u)$ und $w = uv$.
- Es existieren $u, v \in \Sigma^*$ mit $w' = \theta(v)u$ und $w = uv$.

Eine Veranschaulichung der Menge $\mathcal{C}_\theta(w)$ der θ–Conjugate ist Abbildung 15.

Beobachtungen 5.11 *Sei θ eine morphe Involution und $w \in \Sigma^+$. Dann gilt:*

(a) Ist $w' \in \mathcal{C}_\theta(w)$, so gilt auch $\theta(w') \in \mathcal{C}_\theta(w)$.

(b) Ist $w_1 w_2 \in \mathcal{C}_\theta(w)$, so gilt auch $w_2\theta(w_1) \in \mathcal{C}_\theta(w)$ und $\theta(w_2)w_1 \in \mathcal{C}_\theta(w)$.

Beweis: Eigenschaft (a) ergibt sich direkt aus der Definition von $\mathcal{C}_\theta(w)$. Die Eigenschaft (b) lässt sich am besten anschaulich durch Abbildung 15 erkennen. □

Ein Wort $w \in \Sigma^+$ heißt *primitiv*, falls $w = \alpha^i$ für $\alpha \in \Sigma^+$ impliziert, dass $i = 1$ gilt. Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution. Wir sagen w ist *θ–primitiv*, wenn $w \in \{\alpha, \theta(\alpha)\}^i$ impliziert, dass $i = 1$ gilt. Für die morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$ ist das Wort $w = abc$ beispielsweise θ–primitiv, das Wort $w = acacbc$ hingegen nicht. *Die primitive Wurzel* eines Wortes $w \in \Sigma^+$ ist definiert als kürzestes Wort $\alpha \in \Sigma^+$ so, dass $w \in \alpha^*$ gilt. Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution. Als *θ–primitive Wurzel* eines Wortes w bezeichnen wir ein Wort $\alpha \in \Sigma^+$ mit minimaler Länge so, dass $w \in \{\alpha, \theta(\alpha)\}^*$ gilt. Ein Wort $w \in \Sigma^+$ heißt *schwach θ–primitiv*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $w \neq \alpha(\theta(\alpha)\alpha)^i$ für alle $\alpha \in \Sigma^+$ und $i \geq 1$,
- $w \neq \alpha^i$ für alle $\alpha \in \Sigma^+$ mit $\alpha = \theta(\alpha)$ und $i > 1$.

Beobachtung 5.12 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution.*

(a) Sei $w \in \Sigma^+$ ein θ–primitives Wort. Dann ist w auch schwach θ–primitiv.

(b) Ein Wort $w \in \Sigma^+$ ist genau dann θ–primitiv, wenn $\theta(w)$ ein θ–primitives Wort ist.

(c) Sei $\alpha \in \Sigma^+$ eine θ–primitive Wurzel eines Wortes $w \in \Sigma^+$. Dann ist auch $\theta(\alpha)$ eine θ–primitive Wurzel von w.

Die Umkehrung von 5.12 (a) gilt im Allgemeinen nicht. Sei z. B. $w = (aa\theta(a))^i$ für $i \geq 1$ und ein $a \in \Sigma$ mit $a \neq \theta(a)$. Dann ist w schwach θ–primitiv, aber nicht θ–primitiv.

Beobachtungen 5.13 *Sei θ eine morphe Involution.*

(a) Sei $u \in \Sigma^+$ eine θ–primitive Wurzel eines Wortes $w \in \Sigma^+$. Das Wort u ist dann θ–primitiv.

(b) Sei $w, u \in \Sigma^+$ mit $u \leq_{\mathrm{p}} w$ und $|u| = \pi_\theta^{alt}(w)$. Dann ist u schwach θ–primitiv.

(c) Sei $w, u \in \Sigma^+$ mit $u \leq_{\mathrm{p}} w$ und $|u| = \pi_\theta(w)$. Dann ist u ein θ–primitives Wort.

(d) Existiert für ein Wort w eine Zahl $p < n \in \mathbb{N}$ so, dass $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ für alle $1 \leq i \leq n - p$ und $|w| = k \cdot p$ für ein ungerades $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist w nicht schwach θ–primitiv.

Beweis: (a): klar. (b): Es gilt $w \leq_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$. Angenommen u ist nicht schwach θ–primitiv. Für ein $\alpha \in \Sigma^+$ gilt dann $u = \alpha(\theta(\alpha)\alpha)^i$ und $i \geq 1$ oder $u = \alpha^i$ mit $\alpha = \theta(\alpha)$ und $i > 1$. Ist $u = \alpha(\theta(\alpha)\alpha)^i$, so ergibt sich $w \leq_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega = (\alpha(\theta(\alpha)\alpha)^i\theta(\alpha)(\alpha\theta(\alpha))^i)^\omega = (\alpha\theta(\alpha))^\omega$. Also ist α mit $|\alpha| < |u|$ alternierende θ–Periode von w im Widerspruch zu $|u| = \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$. Sei nun $u = \alpha^i$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ mit $\alpha = \theta(\alpha)$ und $i > 1$. Es ist $w \leq_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega = (\alpha^i\theta(\alpha^i))^\omega = ((\alpha\theta(\alpha))^i)^\omega = (\alpha\theta(\alpha))^\omega$, wiederum ein Widerspruch. (c): Gilt $u \in \{\alpha, \theta(\alpha)\}^i$ für ein $i > 1$, so folgt $w <_{\mathrm{p}} \{\alpha, \theta(\alpha)\}^\omega$, im Widerspruch zu $|u| = \pi_\theta(w)$. (d): Das Wort w lässt sich darstellen als $w = u(\theta(u)u)^k$ für $u = w_{[1]} \ldots w_{[p]}$, daher ist w nicht schwach θ–primitiv. □

Das folgende Lemma stammt aus der Arbeit [10].

Lemma 5.14 ([10]) *Seien $u, v \in \Sigma^+$ nichtleere, primitive Wörter. Ist v^m ein Faktor eines Wortes u^k für $k, m \geq 2$, dann gilt $(m-1)|v| < |u|$ oder u und v sind Conjugate.*

Im Beweis des Lemmas spielt der Satz 3.4 von Fine und Wilf eine wesentliche Rolle. Wir erweitern Lemma 5.14 nun auf morphe Involutionen. Der Beweis orientiert sich dabei stark am Beweis von Lemma 5.14 in [10], verwendet aber die von uns in Satz 3.5 erweiterte Version des Satzes von Fine und Wilf.

Lemma 5.15 *Sei θ eine morphe Involution und $u, v \in \Sigma^+$ nichtleere, θ–primitive Wörter. Ist $(v\theta(v))^{m/2}$ oder $(v\theta(v))^{m/2}v$ ein Faktor eines Wortes $(u\theta(u))^{k/2}$ für gerade $k, m \geq 2$, dann gilt $(m-1)|v| < |u|$ oder u und v sind θ–Conjugate.*

Beweis: Angenommen es gilt $(m-1)|v| \geq |u|$. Es sind $|u|$ und $|v|$ alternierende θ–Perioden des Faktors $(v\theta(v))^{m/2}$ bzw. $(v\theta(v))^{m/2}v$ von $(u\theta(u))^{k/2}$. Der betrachtete Faktor hat die Länge $2 \cdot |v| \cdot m/2 = (m-1) \cdot |v| + |v| \geq |u| + |v|$. Nach Satz 3.5 ist $ggT\{|u|, |v|\}$ eine alternierende θ–Periode des betrachteten Faktors. Die Wörter u und v sind nach Voraussetzung θ–primitiv, daher folgt $|u| = |v|$ und die Wörter u und v sind θ–Conjugate. □

Die Voraussetzung $v_1 \ldots v_m$ ist ein Faktor von $u_1 \ldots u_k$ für Wörter $v_1, \ldots, v_m \in \{v, \theta(v)\}$ und $u_1, \ldots, u_k \in \{u, \theta(u)\}$ genügt für die Aussage von Lemma 5.15 nicht. Sei z. B. $u = cb\,(acb)^i\,bca\,b$, $v = acb$ für $i \geq 1$ und θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Wir betrachten $u\theta(u) = cb\,(acb)^i\,bca\,b\,ca\,(bca)^i\,acb\,a$. Dann ist $v^i\theta(v)^{i+2}v$ ein Faktor von $u\theta(u)$ für $v = acb$. Es ist $(2i+2) \cdot |v| = 6i + 6 > |u| = 3i + 6$, aber u ist kein θ–Conjugat von v.

Lemma 5.16 *Sei θ eine morphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein schwach θ–primitives Wort. Dann sind alle Wörter $w' \in \mathcal{C}_\theta(w)$ ebenfalls schwach θ–primitiv.*

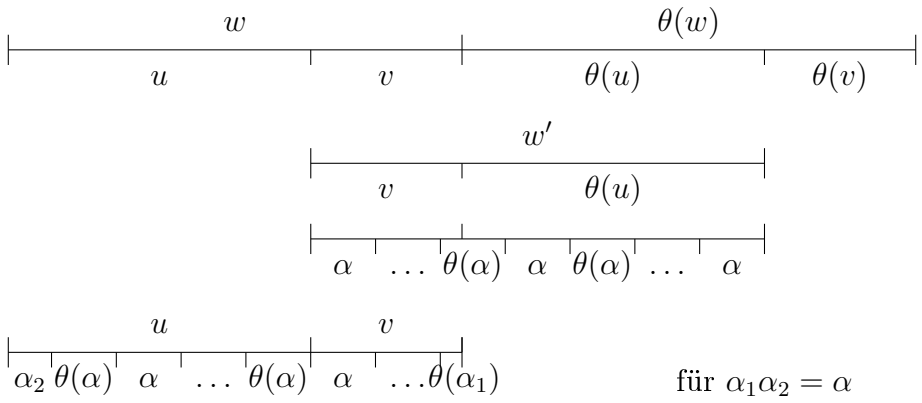

Abbildung 16: Darstellung eines nicht schwach θ–primitiven Wortes w', das θ–Conjugat von w ist.

Beweis: Angenommen es existiert ein Wort $w' \in \mathcal{C}_\theta(w)$, das nicht schwach θ–primitiv ist. Es gilt also $w' = \alpha(\theta(\alpha)\alpha)^i$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ und $i \geq 1$ oder $w' = \alpha^i$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ mit $\alpha = \theta(\alpha)$ und $i > 1$. Sei zunächst $w' = \alpha(\theta(\alpha)\alpha)^i$. Für $p = |\alpha|$ ist dann $w'_{[i]} = \theta\Big(w'_{[i+p]}\Big)$ für alle $1 \leq i \leq n-p$ und $|w'| = |w| = k \cdot p$ für ein ungerades $k \in \mathbb{N}$. Wegen $w' \in \mathcal{C}_\theta(w)$ ist $w' = v\theta(u)$ oder $w' = \theta(v)u$ für Wörter $u, v \in \Sigma^+$ mit $uv = w$. Sei $w' = v\theta(u)$. Dann folgt $w_{[i]} = \theta\big(w_{[i+p]}\big)$ für alle $1 \leq i \leq n-p$, wie sich Abbildung 16 entnehmen lässt. Nach Beobachtung 5.13 (d) ist w dann nicht schwach θ–primitv, im Widerspruch zur Annahme. Der Fall $w' = \theta(v)u$ verläuft analog.

Sei nun $w' = \alpha^i$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ mit $\alpha = \theta(\alpha)$. Es folgt $w' = \theta(w')$ und wegen $|w'| = |w|$ folgt $w_{[j]} = \theta\big(w_{[j]}\big)$ für alle $1 \leq j \leq n$. Weiter gilt $w' = v\theta(u) = \theta(v)u = vu$ und $w = uv$ für Wörter $u, v \in \Sigma^+$. Ersetzt man in Abbildung 16 das Wort $\theta(\alpha)$ durch α, so lässt sich erkennen, dass $w = (\alpha')^i$ gilt für $i > 1$ und $\alpha' \leq_{\mathrm{p}} w$ der Länge $|\alpha'| = |\alpha|$. Also ist w nicht schwach θ–primitiv, ein Widerspruch. □

Die θ–Conjugate von θ–primitiven Wörtern müssen hingegen im Allgemeinen nicht θ–primitiv sein. Sei beispielsweise $w = ac^iabc^iabc^ia$ für $i \geq 1$ und θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Das Wort w ist θ–primitiv. Für $u = ac^iabc^i$ und $v = abc^ia$ gilt $w = uv$. Das Wort $w' = v\theta(u) = abc^iabc^ibac^i$ ist ein θ–Conjugat von w, jedoch ist $w' \in \{\, abc^i, bac^i \,\}^*$ und w' ist nicht θ–primitiv.

Satz 5.17 *Sei θ eine morphe Involution und $w \in \Sigma^+$ ein schwach θ–primitives Wort. Dann existiert ein Wort $w' \in \mathcal{C}_\theta(w)$, das θ–unbegrenzt ist.*

Beweis: Sei $w' \in \mathcal{C}_\theta(w)$ das minimale Element aus $\mathcal{C}_\theta(w)$ bezüglich einer lexikographischen Ordnung $\lhd$, es gilt $w' \lhd u$ für alle $u \in \mathcal{C}_\theta(w)$. Das Wort w' ist nach Lemma 5.16 schwach θ–primitiv. Wir nehmen an, w' sei θ–begrenzt und führen dies zum Wider-

spruch. Aus Lemma 2.12 folgen zwei Darstellungen für w'. Wir ersetzen hierin x durch u und y durch v und erhalten, dass w' eine der folgenden Darstellungen besitzt:

(a) $w' = uv\theta(u)$,

(b) $w' = uv\left(\theta(u)\theta(v)uv\right)^i \theta(u)\theta(v)u$ für $i \geq 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall $w' = uv\theta(u)$.

(a): Auf Grund der Beobachtungen 5.11 gilt

$$\{\, uv\theta(u), v\theta(u)\theta(u), \theta(u)\theta(u)\theta(v), \theta(u)\theta(v)u, \theta(v)uu, uuv \,\} \in \mathcal{C}_\theta\left(w\right).$$

Da w' bezüglich $\lhd$ minimal ist, gilt $uv\theta(u) \lhd v\theta(u)\theta(u)$ und $uv\theta(u) \lhd uuv$. Daraus folgt $uv \lhd v\theta(u)$ und $v\theta(u) \lhd uv$. Dies impliziert $uv = v\theta(u)$. Wir definieren $x := v$ und $y := \theta(u)$, es ergibt sich $w' = uv\theta(u) = \theta(y)xy$ und $xy = \theta(y)x$. Nach Satz 2.17 gilt dann einer der folgenden beiden Fälle:

- $x = \alpha^\ell$, $y = \alpha^m$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ mit $\theta(\alpha) = \alpha$ und $\ell, m \geq 1$,
- $x = \theta(\alpha)\left(\alpha\theta(\alpha)\right)^\ell$, $y = \left(\alpha\theta(\alpha)\right)^m$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ und $\ell \geq 0$, $m \geq 1$.

Im ersten Fall ist $w' = \theta(y)xy$ offensichtlich nicht schwach θ–primitiv. Im zweiten Fall ergibt sich

$$w' = \theta(y)xy = \left(\theta(\alpha)\alpha\right)^m \theta(\alpha)\left(\alpha\theta(\alpha)\right)^\ell \left(\alpha\theta(\alpha)\right)^m = \theta(\alpha)\left(\alpha\theta(\alpha)\right)^{2m+\ell} .$$

Das Wort w' ist wiederum nicht schwach θ–primitiv ist. Es liegt damit in beiden Fällen ein Widerspruch vor. (b): Wir betrachten nun den Fall $w' = uv\left(\theta(u)\theta(v)uv\right)^i \theta(u)\theta(v)u$ für $i \geq 0$. Ist $i \geq 1$, so lässt sich w' darstellen als

$$w' = \underbrace{uv\theta(u)}_{u'}\ \underbrace{\theta(v)uv\left(\theta(u)\theta(v)uv\right)^{i-1}}_{v'}\ \underbrace{\theta(u)\theta(v)u}_{\theta(u')}$$

und es lässt sich Fall (a) anwenden. Es bleibt der Fall $i = 0$ und $w' = uv\theta(u)\theta(v)u$. Auf Grund der Beobachtungen 5.11 gilt $\theta(v)u\theta(u)\theta(v)u \in \mathcal{C}_\theta\left(w\right)$ und $uv\theta(u)uv \in \mathcal{C}_\theta\left(w\right)$. Da w' minimal bezüglich der Ordnung $\lhd$ ist, folgt $uv\theta(u)\theta(v)u \lhd \theta(v)u\theta(u)\theta(v)u$ und $uv\theta(u)\theta(v)u \lhd uv\theta(u)uv$. Dies impliziert die Beziehungen $uv \lhd \theta(v)u$ und $\theta(v)u \lhd uv$. Es folgt $uv = \theta(v)u$. Nach Satz 2.17 gilt einer der folgenden beiden Fälle:

- $u = \alpha^\ell$, $v = \alpha^m$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ mit $\theta(\alpha) = \alpha$ und $\ell, m \geq 1$,
- $u = \theta(\alpha)\left(\alpha\theta(\alpha)\right)^\ell$, $v = \left(\alpha\theta(\alpha)\right)^m$ für ein $\alpha \in \Sigma^+$ und $\ell \geq 0$, $m \geq 1$.

Im ersten Fall ist w' offensichlich nicht schwach θ–primitiv. Im zweiten Fall ist

$$\begin{aligned} w' &= uv\theta(u)\theta(v)u = \theta(\alpha)\left(\alpha\theta(\alpha)\right)^\ell \left(\alpha\theta(\alpha)\right)^m \alpha\left(\theta(\alpha)\alpha\right)^\ell \left(\theta(\alpha)\alpha\right)^m \theta(\alpha)\left(\alpha\theta(\alpha)\right)^\ell \\ &= \theta(\alpha)\left(\alpha\theta(\alpha)\right)^{3\ell+2m+1} . \end{aligned}$$

Dies ist wieder ein Widerspruch zur Annahme, w' sei schwach θ–primitiv. □

Satz 5.18 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort und θ eine morphe Involution. Gilt $|w| \geq 2 \cdot \pi_\theta^{alt}(w)$, so folgt $\tau_\theta(w) = \pi_\theta^{alt}(w)$.*

Beweis: Sei $u \leq_{\mathrm{p}} w$ mit $|u| = \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$. Nach Beobachtung 5.13 (b) ist u ein schwach θ–primitives Wort. Nach Satz 5.17 enthält $\mathcal{C}_\theta(u)$ ein θ–unbegrenztes Wort u'. Nach Beobachtung 2.2 (b) ist auch $\theta(u')$ ein θ–unbegrenztes Wort. Da $|w| \geq 2 \cdot \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ gilt, ist $u\theta(u) \leq_{\mathrm{p}} w$ und u' oder $\theta(u')$ ist ein Faktor von w. Also enthält w einen θ–unbegrenzten Faktor der Länge $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$. Nach Lemma 5.9 gilt $\tau_\theta(w) \leq \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$, wodurch $\tau_\theta(w) = \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ folgt. □

Lemma 5.19 *Sei θ eine morphe Involution, $w \in \Sigma^+$ ein θ–primitives Wort und seien $w_1, w_2 \in \{w, \theta(w)\}$. Dann ist weder w noch $\theta(w)$ ein interner Faktor von w_1w_2, es gilt also $w_1w_2 \neq xwy$ und $w_1w_2 \neq x\theta(w)y$ für alle nichtleeren Wörter $x, y \in \Sigma^+$.*

Beweis: Angenommen w_1w_2 enthält einen internen Faktor w oder $\theta(w)$.

Fall 1: $w_1w_2 = ww$. Nach Abbildung 17 ergibt sich $w = xy$ für nichtleere Wörter $x, y \in \Sigma^+$ mit $yx = xy$ oder $yx = \theta(x)\theta(y)$. Gilt $yx = xy$, so folgt aus Lemma 2.11, dass $x = \alpha^i$ und $y = \alpha^j$ für $\alpha \in \Sigma^+$ und $i, j \geq 1$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $w = xy$ ein θ–primitives Wort ist. Gilt $yx = \theta(x)\theta(y)$, so folgt aus der Darstellung von w nach Lemma 2.18, dass $w = xy$ nicht θ–primitiv ist.

Fall 2: $w_1w_2 = w\theta(w)$. Nach Abbildung 18 gilt $w = xy$ für $x, y \in \Sigma^+$ sowie $y\theta(x) = xy$ oder $y\theta(x) = \theta(x)\theta(y)$. In beiden Fällen ergibt sich mit Satz 2.17 ein Widerspruch zur Annahme, w ist θ–primitiv.

Der Fall $w_1w_2 = \theta(w)\theta(w)$ verläuft analog zu Fall 1, der Fall $w_1w_2 = \theta(w)w$ verläuft analog zu Fall 2. □

Für schwach θ–primitive Wörter bei morphen Involutionen gilt die Aussage von Lemma 5.19 im Allgemeinen nicht. Sei beispielsweise $w = (a\theta(a))^i$ für $i \geq 2$ und ein $a \in \Sigma$ mit $a \neq \theta(a)$. Das Wort w ist schwach θ–primitiv, jedoch hat das Wort $ww = (a\theta(a))^i(a\theta(a))^i = (a\theta(a))^{2i}$ einen internen Faktor $(a\theta(a))^i$. Auch für antimorphe Involutionen gilt die Aussage nicht. Sei hierzu θ eine antimorphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Das Wort $w = abc^i$ für $i \geq 1$ ist θ–primitiv. Jedoch enthält $ww = abc^iabc^i$ den Faktor $c^iab = \theta(w)$.

Das folgende Lemma wurde als erstes von Crochemore und Ryther in [4] bewiesen. Die angegebene Version stammt aus [19] von Lothaire.

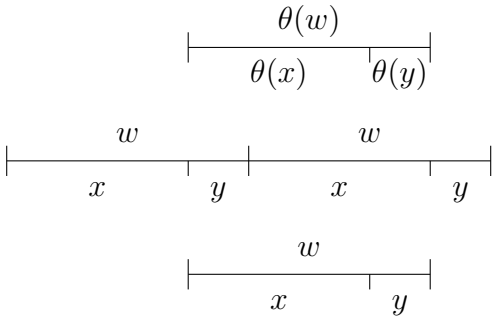

Abbildung 17: $w_1w_2 = ww$

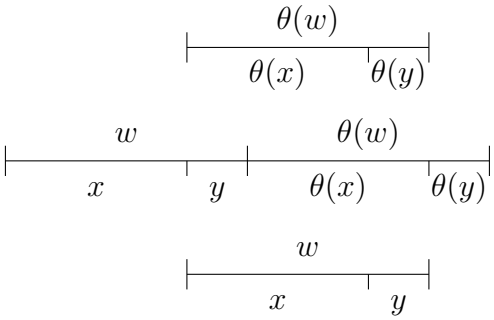

Abbildung 18: $w_1w_2 = w\theta(w)$

Lemma 5.20 ([19, Lemma 8.1.14]) *Seien $u, v, w \in \Sigma^+$ Wörter mit $uu <_\mathrm{p} vv <_\mathrm{p} ww$ und u ist primitiv. Dann gilt $|u| + |v| \leq |w|$.*

Wir erweitern dieses Lemma nun auf morphe Involutionen. Der Beweis orientiert sich dabei stark am Beweis der orginalen Aussage in [19].

Lemma 5.21 *Sei θ eine morphe Involution, $u \in \Sigma^+$ ein θ–primitives Wort und $v, w \in \Sigma^+$ nichtleere Wörter. Gilt*

$$u_1u_2 <_\mathrm{p} v_1v_2 <_\mathrm{p} w_1w_2$$

für $u_1, u_2 \in \{ u, \theta(u) \}$, $v_1, v_2 \in \{ v, \theta(v) \}$ und $w_1, w_2 \in \{ w, \theta(w) \}$, dann folgt $|u| + |v| \leq |w|$.

Beweis: Indizierung eines Wortes $u \in \Sigma^+$ durch Hochkomma als u' bedeutet in diesem Beweis analog zur Indizierung durch Zahlen, dass $u' \in \{ u, \theta(u) \}$ gilt. Wir nehmen $|u| + |v| > |w|$ an und führen dies zum Widerspruch. Sei also $|v| < |w| < |u| + |v|$.

Fall 1: Angenommen es ist $2\,|u| \leq |v|$. Wegen $u_1u_2 \leq_\mathrm{p} v_1 <_\mathrm{p} w_1$ ist $qu_2' <_\mathrm{p} w_2$ für ein $q \in \Sigma^+$, wie in Abbildung 19 dargestellt. Wegen $|w| > |v|$ und $|w| < |u| + |v|$ ist $0 < |q| < |u|$. Aus $qu_2' <_\mathrm{p} w_2$ folgt $q'u_2'' <_\mathrm{p} w_1$. Also ist $u_2'' \in \{ u, \theta(u) \}$ ein interner Faktor von u_1u_2, im Widerspruch zu Lemma 5.19.

Fall 2: Sei nun $2\,|u| > |v|$, es gilt $u_1 <_\mathrm{p} v_1 <_\mathrm{p} u_1u_2$. Dann ergibt sich $v_1 = u_1z$ für ein nichtleeres $z \in \Sigma^+$, siehe Abbildung 20. Sei $\alpha \in \Sigma^+$ eine θ–primitive Wurzel von z, es ist also $z \in \{ \alpha, \theta(\alpha) \}^m$ für ein $m \geq 1$. Es folgt $u_1 \in \{ \alpha, \theta(\alpha) \}^n r$ für $n \geq m \geq 1$ und $r <_\mathrm{p} \alpha$ oder $r <_\mathrm{p} \theta(\alpha)$. Ist $n > 1$, so folgt $r \neq \varepsilon$ da u_1 ein θ–primitives Wort ist. Angenommen es ist $n = 1$ und $r = \varepsilon$. Dann gilt $2\,|u| = 2(n \cdot |\alpha| + |r|) = 2\,|\alpha|$ und $|v| = |u| + |z| = 2\,|\alpha|$. Dies ist ein Widerspruch zu $2\,|u| > |v|$. Wir können also $r \neq \varepsilon$ annehmen. Im weiteren Verlauf des Beweises benötigen wir, dass α ein θ–primitives Wort ist. Dies ist wegen

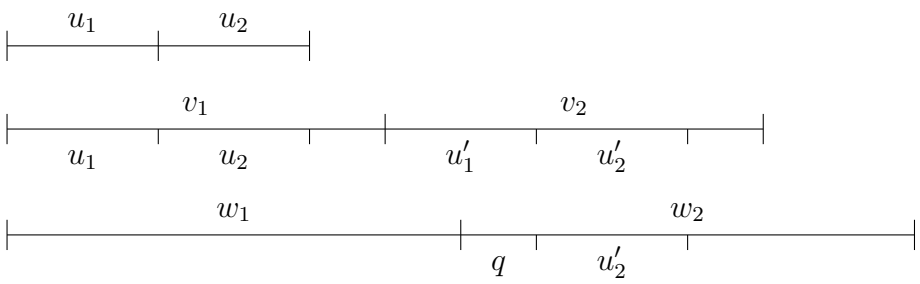

Abbildung 19: Fall $2\,|u| \leq |v|$

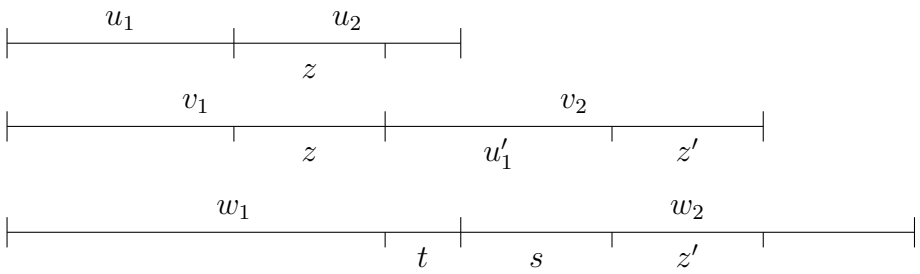

Abbildung 20: Fall $|u| < |v| < 2\,|u|$

Beobachtung 5.13 (a) der Fall. Weiter gilt $v_1 = u_1 z \in \{\,\alpha, \theta(\alpha)\,\}^n\, r\, \{\,\alpha, \theta(\alpha)\,\}^m$ und $sz' <_{\mathrm{p}} w_2$, für ein $s \in \Sigma^+$ mit $s <_{\mathrm{s}} u_1'$ ist.

Fall 2a : Gilt $|s| \geq |\alpha|$, so folgt wegen $s' <_{\mathrm{p}} w_1$, dass $\alpha \leq_{\mathrm{p}} s$ oder $\theta(\alpha) \leq_{\mathrm{p}} s$ ist. Zusammen mit Lemma 5.19 folgt $s \in \{\,\alpha, \theta(\alpha)\,\}^\ell\, r'$ für ein $\ell < n$. Aus $s\alpha' <_{\mathrm{p}} w_2$ folgt $s'\alpha'' <_{\mathrm{p}} w_1$, wobei $s'\alpha''$ ein Präfix der Länge $(\ell+1)\cdot|\alpha| + |r|$ ist. Wegen $u_1 <_{\mathrm{p}} w_1$ mit $|u_1| = n\cdot|\alpha| + |r| \geq (\ell+1)\cdot|\alpha| + |r|$ folgt $s'\alpha'' \leq_{\mathrm{p}} u_1 <_{\mathrm{p}} \beta$ für $\beta \in \{\,\alpha, \theta(\alpha)\,\}^{n+1}$. Da α ein θ–primitives Wort ist und da $0 < |r| < |\alpha|$ gilt, ist dies ein Widerspruch zu Lemma 5.19.

Fall 2b: Angenommen es gilt $|s| < |\alpha|$. Dann ist $s <_{\mathrm{p}} \alpha$ oder $s <_{\mathrm{p}} \theta(\alpha)$. Gilt aber $|s| \leq (n-1)\cdot|\alpha| + |r|$, so ist $s\alpha' \leq_{\mathrm{p}} u_1 \in \{\,\alpha, \theta(\alpha)\,\}^n\, r <_{\mathrm{p}} \beta$ für $\beta \in \{\,\alpha, \theta(\alpha)\,\}^{n+1}$. Dies ist wieder ein Widerspruch zu Lemma 5.19. Es gilt also $|s| < |\alpha|$ und $|s| > (n-1)\cdot|\alpha| + |r|$. Daraus folgt $n = m = 1$ und $|s| > |r|$. Für z, z' in Abbildung 20 gilt damit $z, z' \in \{\,\alpha, \theta(\alpha)\,\}$. Es ergibt sich $u_1 = \alpha' r$, $v_1 = \alpha' r \alpha''$ und $w = \alpha' r \alpha'' t$ für ein nichtleeres $t \in \Sigma^+$ mit $ts = u_1' \in \{\,\alpha' r, \theta(\alpha' r)\,\}$. Wegen $|s| > |r|$ ist $|t| < |\alpha|$. Weiter ist $tu_1'' <_{\mathrm{p}} v_2 = u_1' z' <_{\mathrm{p}} \beta$ für $\beta = u_1'\alpha' r = u_1' u_1$ falls $z' = \alpha'$ oder $\beta = u_1'\theta(\alpha' r) = u_1'\theta(u_1)$ falls $z' = \theta(\alpha')$. Sowohl $tu_1'' <_{\mathrm{p}} u_1' u_1$ als auch $tu_1'' <_{\mathrm{p}} u_1'\theta(u_1)$ sind wegen $|t| < |\alpha|$ jedoch ein Widerspruch zur Aussage von Lemma 5.19. □

Ein Beispiel aus [19] zeigt, dass die Grenze in Lemma 5.21 scharf ist. Wir geben das Beispiel an dieser Stelle in leicht veränderter Form an. Sei θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Sei weiter $i \geq 1$ und $u = ac^{2i}ac^i$, $v = ac^{2i}ac^ibc^{2i}$ und $w = ac^{2i}ac^ibc^{2i}bc^{2i}bc^i$. Es gilt

$$\begin{aligned} u\theta(u) &= ac^{2i}ac^i\, bc^{2i}bc^i \\ v\theta(v) &= ac^{2i}ac^ibc^{2i}\, bc^{2i}bc^iac^{2i} \\ ww &= ac^{2i}ac^ibc^{2i}bc^{2i}bc^i\, ac^{2i}ac^ibc^{2i}bc^{2i}bc^i \end{aligned}$$

und $u\theta(u) <_{\mathrm{p}} v\theta(v) <_{\mathrm{p}} ww$ mit $|u|+|v| = |w|$. Fordert man für das Wort u in Lemma 5.21 nur die Eigenschaft schwach θ–primitiv statt θ–primitiv zu sein, so gilt die Aussage nicht. Ein einfaches Beispiel hierfür ist $u = ab$, $v = aba$, $w = abab$ für die morphe Involution θ wie im vorigen Beispiel. Dann ist $uu <_{\mathrm{p}} v\theta(v) <_{\mathrm{p}} ww$, es gilt jedoch $|u| + |v| > |w|$. Für $|u| + |v| \leq k \cdot |w|$ mit $k = 1$ ist die Aussage also falsch. Wir wollen nun die Frage untersuchen, welches das minimale $k \in \mathbb{R}$ ist, so dass die Aussage von Lemma 5.21 für schwach θ–primitive Wörter u und $|u| + |v| \leq k \cdot |w|$ gilt. Für $k = 2$ ist $|u| + |v| \leq 2 \cdot |w|$ wegen $|u| < |v| < |w|$ trivialerweise erfüllt. Das folgende Beispiel zeigt, dass $k = 2$ auch der kleinst mögliche Wert ist, der die Aussage wahr macht. Sei θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Weiter definieren wir $u_i = (ab)^i$, $v_i = (ab)^ia$ und $w_i = (ab)^{i+1}$ für $i \geq 1$. Die Wörter u_i sind schwach θ–primitiv, wie sich nachprüfen lässt. Es gilt

$$\frac{|u_i| + |v_i|}{|w_i|} = \frac{2i + 2i + 1}{2i + 2} \xrightarrow[i\to\infty]{} 2$$

und $uu <_{\mathrm{p}} v\theta(v) <_{\mathrm{p}} ww$. Da der Quotient $\frac{|u_i|+|v_i|}{|w_i|}$ für $i \to \infty$ gegen 2 konvergiert, ist der triviale Wert $k = 2$ gleichzeitig auch der minimale Wert, der die Aussage wahr macht.

Auch für antimorphe Involutionen gilt die Aussage 5.21 nicht: Sei θ eine antimorphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Sei weiter $u = abc^i$, $v = abc^ia$ und $w = abc^iabc^i$ für $i \geq 1$. Dann gilt $uu <_{\mathrm{p}} v\theta(v) <_{\mathrm{p}} ww$, es ist aber $|u| + |v| > |w|$. Auch durch Verschärfen der Bedingungen $u_1, u_2 \in \{\, u, \theta(u) \,\}$, $v_1, v_2 \in \{\, v, \theta(v) \,\}$ und $w_1, w_2 \in \{\, w, \theta(w) \,\}$, z. B. durch Festsetzung $u_1 = u$ und $u_2 = \theta(u)$, wird die Aussage nicht wahr. Die zahlreichen notwendigen Gegenbeispiele werden an dieser Stelle aber aus Platzgründen nicht angegeben. Jedoch wollen wir wieder untersuchen, für welches $k \in \mathbb{R}$ die Aussage mit $|u| + |v| \leq k \cdot |w|$ gilt. Es sei hierzu θ eine antimorphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Weiter seien $u_i = (abcc)^ia$, $v_i = (abcc)^{i+1}$ und $w_i = (abcc)^{i+1}a$ für $i \geq 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_i\theta(u_i) &= (abcc)^ia\, b(ccab)^i = (abcc)^{2i}ab \\ v_iv_i &= (abcc)^{2i+2} \\ w_i\theta(w_i) &= (abcc)^{i+1}a\, b(ccab)^{i+1} = (abcc)^{2i+2}ab\ . \end{aligned}$$

Also ist $u_i\theta(u_i) <_{\mathrm{p}} v_iv_i <_{\mathrm{p}} w_i\theta(w_i)$. Für den Quotienten der Wortlängen gilt

$$\frac{|u_i| + |v_i|}{|w_i|} = \frac{4i + 1 + 4i + 4}{4i + 5} \xrightarrow[i\to\infty]{} 2\ .$$

Analog zum morphen Fall gilt $|u| + |v| \leq 2 \cdot |w|$ wegen $|u| < |v| < |w|$. Damit ist 2 der minimale Wert für k, der die Aussage wahr macht.

Kapitel 6

Gleichung von Lyndon & Schützenberger

Ein klassisches Resultat über Gleichungen der Form $u^\ell = v^m w^n$ für Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ und Zahlen $\ell, m, n \in \mathbb{N}$, ist die folgende Aussage von Lyndon und Schützenberger in der Arbeit [20] aus dem Jahr 1962.

Satz 6.1 (Lyndon & Schützenberger) *Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ Wörter mit $u^\ell = v^m w^n$ für Zahlen $\ell, m, n \geq 2$. Dann existiert ein Wort $\alpha \in \Sigma^*$ mit $u, v, w \in \alpha^*$.*

Ein kurzer Beweis der Aussage findet sich in [9] von Harju und Nowotka. In [5, 21] haben Kari, Seki sowie Elena und Eugen Czeizler das Resultat in Bezug auf antimorphe Involutionen untersucht. Wir wollen in diesem Kapitel den morphen Fall betrachten.

Satz 6.2 *Sei θ eine morphe Involution und seien $u, v, w \in \Sigma^+$ nichtleere Wörter. Für natürliche Zahlen $\ell, m, n \geq 2$ seien $u_1, \ldots, u_\ell, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^+$ Wörter mit $u_1, \ldots, u_\ell \in \{ u, \theta(u) \}$, $v_1, \ldots, v_m \in \{ v, \theta(v) \}$ sowie $w_1, \ldots, w_n \in \{ w, \theta(w) \}$. Falls*

$$u_1 \ldots u_\ell = v_1 \ldots v_m \, w_1 \ldots w_n$$

gilt, so existiert ein Wort $\alpha \in \Sigma^+$ mit $u, v, w \in \{ \alpha, \theta(\alpha) \}^*$.

Beweis: Sei zunächst $ggT \{|u|, |v|, |w|\} = 1$. Sei weiter $\Sigma_\theta \subseteq \Sigma$ ein neues Alphabet und $\psi : \Sigma^* \to \Sigma_\theta^*$ eine zugehörige Substitutionsabbildung, beides wie in Definition 2.34 beschrieben. Aus $u_1 \ldots u_\ell = v_1 \ldots v_m w_1 \ldots w_n$ folgt $\psi(u)^\ell = \psi(v)^m \psi(w)^n$. Satz 6.1 impliziert, dass $\psi(u), \psi(v), \psi(w) \in \beta^*$ für ein Wort $\beta \in \Sigma_\theta^*$ gilt. Wegen $ggT \{|u|, |v|, |w|\} = 1$ folgt $|\beta| = 1$, die Wörter $\psi(u), \psi(v), \psi(w)$ sind also Potenzen eines Zeichens $a \in \Sigma_\theta$. Daher enthalten die Wörter u, v, w nur die Zeichen a und $\theta(a)$, es gilt $u, v, w \in \{ \alpha, \theta(\alpha) \}^*$ für $\alpha = a$.

Sei nun $ggT\{|u|, |v|, |w|\} = d > 1$. Wir codieren die Wörter u, v, w in einem neuen Alphabet $\Sigma^{(d)}$ zu u', v', w', indem d Zeichen aus Σ zu einem neuen Zeichen in $\Sigma^{(d)}$ codiert werden. Analog erhalten wir

$$u'_1 \dots u'_\ell = v'_1 \dots v'_m w'_1 \dots w'_n$$

und wegen $ggT\{|u'|, |v'|, |w'|\} = 1$ können wir den ersten Fall anwenden. Daraus folgt $u', v', w' \in \{a_1 \dots a_d, \theta(a_1 \dots a_d)\}^*$ für ein Zeichen $a_1 \dots a_d \in \Sigma^{(d)}$. Also ist $u, v, w \in \{\alpha, \theta(\alpha)\}^*$ für ein Wort $\alpha \in \Sigma^*$ der Länge d. □

Lemma 6.3 *Sei θ eine morphe Involution und seien $u, v \in \Sigma^+$ nichtleere Wörter. Weiter seien $u_1, \dots, u_m \in \Sigma^+$ für $m \geq 2$ Wörter mit $u_1, \dots, u_m \in \{u, \theta(u)\}$ und $v_1, \dots, v_n \in \Sigma^+$ für $n \geq 2$ Wörter mit $v_1, \dots, v_n \in \{v, \theta(v)\}$. Gilt $u_1 \dots u_m = v_1 \dots v_n$, so existiert ein Wort $\alpha \in \Sigma^+$ mit $u, v \in \{\alpha, \theta(\alpha)\}^*$.*

Beweis: Das Wort $w = u_1 \dots u_m = v_1 \dots v_n$ besitzt θ–Perioden $|u|$ und $|v|$. Wegen $m, n \geq 2$ gilt außerdem $|w| \geq |u| + |v| - ggT\{u, v\}$. Nach Satz 3.8 ist $ggT\{u, v\}$ eine θ–Periode von w und es gilt $u, v \in \{\alpha, \theta(\alpha)\}^*$ für ein Wort $\alpha \in \Sigma^+$ der Länge $ggT\{u, v\}$. □

Es wurden inzwischen verschiedene Erweiterungen der Wortgleichung $u^\ell = v^m u^n$ betrachtet. So hat Lentin in [17] Gleichungen der Form $u^\ell = v_1^{\ell_1} v_2^{\ell_2} v_3^{\ell_3}$ untersucht. In [1] haben Appel und Djorup Gleichungen der Form $u^\ell = v_1^\ell v_2^\ell \dots v_k^\ell$ untersucht. In [10] haben Harju und Nowotka mit

$$u^\ell = v_1^{\ell_1} v_2^{\ell_2} \dots v_k^{\ell_k}$$

eine noch allgemeinere Version betrachtet. Der folgende Satz ist das Hauptresultat aus [10].

Satz 6.4 ([10]) *Sei $k \geq 2$. Für alle $1 \leq i \leq k$ seien $u, v_i \in \Sigma^*$ Wörter mit $|u| \neq |v_i|$ und außerdem $\ell, \ell_i \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $\ell, \ell_i \geq 3$. Gilt*

$$u^\ell = v_1^{\ell_1} v_2^{\ell_2} \dots v_k^{\ell_k}$$

und $k \leq \ell$, dann ist $u, v_1, \dots, v_k \in \alpha^*$ für ein Wort $\alpha \in \Sigma^*$.

Der Satz 6.4 impliziert das folgende Resultat von Appel und Djorup aus [1]. Für einen Beweis dieser Implikation, siehe [10].

Satz 6.5 ([10]) *Sei $k \geq 2$ und $u, v_i \in \Sigma^*$ für alle $1 \leq i \leq k$. Gilt*

$$u^\ell = v_1^\ell v_2^\ell \dots v_k^\ell$$

und $k \leq \ell$, dann ist $u, v_1, \dots, v_k \in \alpha^*$ für ein Wort $\alpha \in \Sigma^*$.

Wir wollen diese Resultate nun auf morphe Involutionen erweitern. Es ist zu beachten, dass hier durch die Indizierung unten, wie z.B. bei $v_1, \ldots, v_k$, nicht k verschiedene Wörter bezeichnet werden. Statt dessen gilt $v_1, \ldots, v_k \in \{ v, \theta(v) \}$. Verschiedene Wörter werden durch Indizierung oben gekennzeichnet, also beispielsweise $v^{(1)}$.

Satz 6.6 *Sei $k \geq 2$ und θ eine morphe Involution. Für alle $1 \leq i \leq k$ seien $u, v^{(i)} \in \Sigma^*$ Wörter mit $|u| \neq \left|v^{(i)}\right|$ und außerdem $\ell, \ell_i \in \mathbb{N}$ mit $\ell, \ell_i \geq 3$. Angenommen es gilt*

$$u_1 \ldots u_\ell = v_1^{(1)} \ldots v_{\ell_1}^{(1)} \; v_1^{(2)} \ldots v_{\ell_2}^{(2)} \; \ldots \; v_1^{(k)} \ldots v_{\ell_k}^{(k)}$$

und $k \leq \ell$ für Wörter

$$\begin{array}{c} u_1, \ldots, u_\ell \in \{ u, \theta(u) \} \\ v_1^{(1)}, \ldots, v_{\ell_1}^{(1)} \in \left\{ v^{(1)}, \theta\left(v^{(1)}\right) \right\} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ v_1^{(k)}, \ldots, v_{\ell_k}^{(k)} \in \left\{ v^{(k)}, \theta\left(v^{(k)}\right) \right\} . \end{array}$$

Dann ist $u, v^{(1)}, \ldots, v^{(k)} \in \{ \alpha, \theta(\alpha) \}^*$ für ein Wort $\alpha \in \Sigma^*$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 6.2. Wir nehmen zunächst $ggT \left\{ |u|, \left|v^{(1)}\right|, \ldots, \left|v^{(k)}\right| \right\} = 1$ an. Sei weiter $\Sigma_\theta \subseteq \Sigma$ ein neues Alphabet und $\psi : \Sigma^* \to \Sigma_\theta^*$ die zugehörige Substitutionsabbildung, beides wie in Definition 2.34 beschrieben. Da

$$\psi(u)^\ell = \psi\left(v^{(1)}\right)^{\ell_1} \; \psi\left(v^{(2)}\right)^{\ell_2} \; \ldots \; \psi\left(v^{(k)}\right)^{\ell_k}$$

gilt, lässt sich Satz 6.4 anwenden. Es ist also $\psi(u), \psi\left(v^{(1)}\right), \ldots, \psi\left(v^{(k)}\right) \in a^*$ für ein Zeichen $a \in \Sigma_\theta$. Damit ist $u, v^{(1)}, \ldots, v^{(k)} \in \{ a, \theta(a \}^*$. Sei nun $ggT \left\{ |u|, \left|v^{(1)}\right|, \ldots, \left|v^{(k)}\right| \right\} = d > 1$. Dann folgt die Aussage durch Codierung von d Zeichen zu einem neuen Zeichen. □

Satz 6.7 *Sei $k \geq 2$, θ eine morphe Involution und seien $u, v^{(i)} \in \Sigma^*$ für $1 \leq i \leq k$ Wörter. Angenommen es gilt*

$$u_1 \ldots u_\ell = v_1^{(1)} \ldots v_\ell^{(1)} \; v_1^{(2)} \ldots v_\ell^{(2)} \; \ldots \; v_1^{(k)} \ldots v_\ell^{(k)}$$

und $k \leq \ell$ für Wörter

$$\begin{array}{c} u_1, \ldots, u_\ell \in \{ u, \theta(u) \} \\ v_1^{(1)}, \ldots, v_\ell^{(1)} \in \left\{ v^{(1)}, \theta\left(v^{(1)}\right) \right\} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ v_1^{(k)}, \ldots, v_\ell^{(k)} \in \left\{ v^{(k)}, \theta\left(v^{(k)}\right) \right\} . \end{array}$$

Dann ist $u, v^{(1)}, \ldots, v^{(k)} \in \{ \alpha, \theta(\alpha) \}^*$ für ein Wort $\alpha \in \Sigma^*$.

Der Beweis verläuft analog zu den Beweisen der Sätze 6.2 und 6.6, daher geben wir ihn hier nicht an. Die Aussagen der Sätze 6.6 und 6.7 mit antimorphen Involutionen zu untersuchen, ist ein Gebiet für zukünftige Forschung.

Kapitel 7

Ordnungen unter Involution

Sei $\lhd$ eine beliebige totale Ordnung auf den Zeichen des Alphabets Σ bzw. die hiervon induzierte lexikographische Ordnung. Solche Ordnungen sind ein Hilfsmittel, um Aussagen über Wörter zu beweisen. So wird beispielsweise das kritische Faktorisierungstheorem über Wörtern aus Kapitel 4 in der Arbeit [8] mit Hilfe einer solchen Ordnung bewiesen. Eine wichtige Eigenschaft dabei ist, dass falls $\beta \in \Sigma^+$ der maximale Suffix eines Wortes $w \in \Sigma^+$ bezüglich der Ordnung $\lhd$ ist, dann gilt $w\beta^{-1} < \pi(w)$. Ersetzen wir hier $\pi(w)$ z. B. durch $\pi_\theta(w)$ bei einer morphen Involution θ, so gilt die Aussage nicht mehr. Wir wollen in diesem Kapitel neue Ordnungen $\lhd_\psi$ und $\lhd_\chi$ so definieren, dass bekannte Eigenschaften der Ordnung $\lhd$ auch auf Wörtern unter Involution erhalten bleiben.

Definition 7.1 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution und $\psi : \Sigma \to \Sigma'$ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Weiter sei $\lhd$ eine beliebige totale Ordnung der Zeichen des Alphabets $\Sigma' = \{a_1, \ldots, a_m\}$, also z. B. $a_1 \lhd a_2 \lhd \ldots \lhd a_m$. Die Ordnung $\lhd$ auf Σ' induziert eine lexikographische Ordnung durch*

$$u \lhd v \;\Leftrightarrow\; u \leq_{\mathrm{p}} v \text{ oder } u = xay \text{ und } v = xbz \text{ mit } a \lhd b \text{ für maximal langes } x$$

auf Wörtern $u, v \in (\Sigma')^*$. Mit $\lhd^{-1}$ bezeichnen wir die zu $\lhd$ inverse Ordnung auf den Zeichen aus Σ', bzw. die Ordnung auf $(\Sigma')^*$ die sich hieraus ergibt. Ein Suffix $\beta \leq_{\mathrm{s}} w$ eines Wortes $w \in \Sigma^+$ heißt maximal *bezüglich einer Ordnung $\lhd$, falls $\alpha \lhd \beta$ gilt für alle Suffixe $\alpha \leq_{\mathrm{s}} w$.*

Beobachtung 7.2 *Sei $\lhd$ eine lineare Ordnung auf Σ bzw. die hiervon induzierte lexikographische Ordnung. Weiter sei $\beta \in \Sigma^+$ der maximale Suffix eines Wortes $w \in \Sigma^+$. Dann gilt $|w\beta^{-1}| < \pi(w)$.*

Beweis: Es ist $\beta u \leq_{\mathrm{s}} w$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge $\pi(w)$. Es gilt $\beta <_{\mathrm{p}} \beta u$ und $\beta u \not\lhd \beta$, im Widerspruch zur Maximalität von β. $\square$

Für θ–Perioden bei morpher oder antimorpher Involution gilt die Aussage von Beobachtung 7.2 jedoch nicht. Sei z. B. θ eine morphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Wir betrachten die Ordnung $a \lhd c \lhd b$ und das Wort $w = c^i a c^i b$ für $i \geq 1$. Dann ist b der maximale Suffix bezüglich der Ordnung $\lhd$, es gilt $|w\beta^{-1}| = 2i + 1$. Jedoch ist $\pi_\theta(w) = \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w) = \pi_\theta^{\mathrm{s}}(w) = i + 1$. An diesem Beispiel lässt sich leicht einsehen, dass die Aussage von Beobachtung 7.2 auch bei antimorpher Involution und (alternierender) θ–Periode nicht gilt. Dies motiviert die Definition einer neuen Ordnung.

Definition 7.3 *Wir wollen mit Hilfe einer linearen Ordnung $\lhd$ auf Σ, bzw. der hiervon induzierten lexikographischen Ordnung, eine neue Ordnung $\lhd_\psi$ auf Σ definieren. Wir definieren hierzu*

$$u \lhd_\psi v :\Leftrightarrow \psi(u) \lhd \psi(v)$$

für Wörter $u, v \in \Sigma^+$. Die Ordnungen $\lhd$ und $\lhd_\psi$ sind beide transitiv, wie sich leicht nachprüfen lässt. Für die Ordnung $\lhd_\psi$ gilt $a \lhd_\psi \theta(a)$ als auch $\theta(a) \lhd_\psi a$ für alle Zeichen $a \in \Sigma$. Die Ordnung $\lhd_\psi^{-1}$ wird analog zu $\lhd_\psi$ definiert.

Lemma 7.4 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution und ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Weiter seien $u, v \in \Sigma^+$ nichtleere Wörter. Es gilt $u \lhd_\psi v$ genau dann, wenn $\psi(u) \leq_{\mathrm{p}} \psi(v)$, oder $u = x_1 a y$ und $v = x_2 b z$ mit $\psi(a) \lhd \psi(b)$ für maximal langes x_1, x_2 mit $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ gilt.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Angenommen es gilt $u \lhd_\psi v$, also $\psi(u) \lhd \psi(v)$. Dann ist $\psi(u) \leq_{\mathrm{p}} \psi(v)$ oder es ist also $\psi(u)_{[1]} \ldots \psi(u)_{[j-1]} = \psi(v)_{[1]} \ldots \psi(v)_{[j-1]}$ sowie $\psi(u)_{[j]} \lhd \psi(v)_{[j]}$ für ein maximal großes $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq n$. Für $x_1 = u_{[1]} \ldots u_{[j-1]}$ und $x_2 = v_{[1]} \ldots v_{[j-1]}$ gilt $\psi(x_1) = \psi(x_2)$. „$\Leftarrow$“: Falls $\psi(u) \leq_{\mathrm{p}} \psi(v)$ gilt, so folgt direkt $\psi(u) \lhd \psi(v)$. Angenommen es gilt $u = x_1 a y$ und $v = x_2 b z$ für maximal langes $x_1, x_2 \in \Sigma^*$ mit $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ und $\psi(a) \lhd \psi(b)$. Dann ist ebenfalls $\psi(u) \lhd \psi(v)$ und damit $u \lhd_\psi v$. □

Korollar 7.5 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution, ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung und $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort. Angenommen der maximale Suffix von $\psi(w)$ bezüglich $\lhd$ hat die Länge ℓ. Für $\beta = w_{[n-\ell+1]} \ldots w_{[n]}$ ist also $\psi(\beta)$ dieser maximale Suffix. Dann ist β maximaler Suffix von w bezüglich $\lhd_\psi$.*

Beweis: Für jeden Suffix v von $\psi(w)$ existiert ein Suffix α von w mit $\psi(\alpha) = v$. Da $\psi(\beta)$ maximal ist bezüglich der Ordnung $\lhd$, gilt $\psi(\alpha) \lhd \psi(\beta)$ für alle Suffixe $\psi(\alpha)$ von $\psi(w)$. Nach Lemma 7.4 gilt dann auch $\alpha \lhd_\psi \beta$ und β ist maximaler Suffix von w bezüglich $\lhd_\psi$. □

Lemma 7.6 *Es sei θ eine morphe Involution und $\psi : \Sigma \to \Sigma'$ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Sei $w \in \Sigma^+$ ein Wort, das Zeichen $c \neq d \in \Sigma$ mit $\theta(c) \neq d$ enthält. Seien $\lhd$ und $\lhd^{-1}$ lineare Ordnungen auf Σ', und $\lhd_\psi$ sowie $\lhd_\psi^{-1}$ die hiervon induzierten Ordnungen auf Σ. Dann ist der maximale Suffix des Wortes w bezüglich $\lhd_\psi$ ungleich dem maximalen Suffix von w bezüglich $\lhd_\psi^{-1}$.*

Beweis: Sei $a \in \Sigma$ ein Zeichen von w so, dass $\psi(e) \lhd \psi(a)$ für alle Zeichen $e \in \Sigma$ des Wortes w gilt. Analog sei $b \in \Sigma$ ein Zeichen aus w so, dass $\psi(e) \lhd^{-1} \psi(b)$ für alle Zeichen $e \in \Sigma$ gilt. Dann beginnt der maximale Suffix von w bezüglich $\lhd_\psi$ mit dem Zeichen a oder $\theta(a)$, der maximale Suffix bezüglich $\lhd_\psi^{-1}$ mit b oder $\theta(b)$. Wir müssen nun also noch $\psi(a) \neq \psi(b)$ zeigen. Für die Zeichen $c, d \in \Sigma$ aus w gilt nach Voraussetzung $\psi(c) \neq \psi(d)$. Œ sei $\psi(c) \lhd \psi(d)$. Dann ist $\psi(b) \lhd \psi(c) \lhd \psi(d) \lhd \psi(a)$. Aus $\psi(c) \neq \psi(d)$ folgt $\psi(a) \neq \psi(b)$. □

Lemma 7.7 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution, ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung und $\lhd_\psi$ eine Relation wie in Definition 2.34 beschrieben. Sei $\beta \in \Sigma^+$ der maximale Suffix eines Wortes $w \in \Sigma^+$ bezüglich $\lhd_\psi$. Dann ist $w \neq w_1\beta' w_2$ für alle $w_1 \in \Sigma^*$ und alle $w_2, \beta' \in \Sigma^+$ mit $\psi(\beta') = \psi(\beta)$.*

Beweis: Da β maximal bezüglich $\lhd_\psi$ ist, gilt $\alpha \lhd_\psi \beta$ für alle Wörter $\alpha \in \Sigma^+$ mit $\alpha \leq_{\mathrm{s}} w$. Angenommen es existiert eine Darstellung $w \neq w_1\beta' w_2$ mit $w_1 \in \Sigma^*$ und $w_2, \beta' \in \Sigma^+$, sowie $\psi(\beta') = \psi(\beta)$. Dann ist $\psi(\beta' w_2) \ntriangleleft \psi(\beta)$. Damit gilt $\beta' w_2 \ntriangleleft_\psi \beta$ für den Suffix $\beta' w_2$ von w, ein Widerspruch. □

Lemma 7.8 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution, ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung und $\lhd_\psi$ eine Relation wie in Definition 2.34 beschrieben. Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort mit dem maximalen Suffix $\beta \in \Sigma^+$ von w bezüglich $\lhd_\psi$. Dann gilt $|w\beta^{-1}| < \pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$.*

Beweis: Angenommen es gilt $w\beta^{-1} \geq \pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$. Dann lässt sich w darstellen als $w = w_1\beta' w_2$ für Wörter $w_1, \beta', w_2 \in \Sigma^*$ mit $|\beta'| = |\beta|$ und $|w_2| = \pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$. Die Zeichen von β' sind gegenüber den Zeichen von β genau um $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$ Stellen verschoben. Da w die schwache θ–Periode $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$ besitzt, gilt $\beta'_{[i]} = \beta_{[i]}$ oder $\beta'_{[i]} = \theta\big(\beta_{[i]}\big)$ für alle $1 \leq i \leq |\beta|$. Es folgt $\psi(\beta) = \psi(\beta')$ im Widerspruch zu Lemma 7.7. □

Die Ordnung $\lhd_\psi$ eignet sich vor allem zur Betrachtung von Wörtern und schwachen θ–Perioden. Denn für θ–Perioden und alternierende θ–Perioden gilt Lemma 7.8 nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei θ die morphe, θ' die antimorphe Involution mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Weiter sei ψ eine zugehörige Substitutionsabbildung. Wir betrachten das Wort $w = abc^iaac^i$ für $i \geq 1$ und die Ordnung $a \lhd b \lhd c$. Der maximale Suffix von w bezüglich $\lhd_\psi$ ist c^iaac^i, es gilt aber $\pi_\theta(w) = \pi_\theta^{\text{alt}}(w) = \pi'_\theta(w) = \pi'^{\text{alt}}_\theta(w) = |w|$. Die Funktion ψ scheint zu viel Struktur aus w zu entfernen. Wir wollen nun eine weitere Ordnung einführen, die sich für morphe Involutionen und alternierende θ–Perioden eignet.

Definition 7.9 *Sei Σ ein Alphabet, θ eine morphe Involution und $\lhd$ eine lineare Ordnung auf Σ bzw. die lexikographische Ordnung die hieraus induziert wird. Dann definieren wir eine Funktion χ durch*

$$\begin{aligned} \chi : \Sigma^* &\to \Sigma^* \\ w &\mapsto \begin{cases} w & \textit{falls } \theta(w) \lhd w \\ \theta(w) & \textit{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

auf Σ^*. Die Funktion χ induziert durch

$$u \lhd_\chi v :\Leftrightarrow \chi(u) \lhd \chi(v)$$

eine Ordnung $\lhd_\chi$. Mit $\lhd_\chi^{-1}$ bezeichnen wir die Ordnung, die analog durch die Ordnung $\lhd^{-1}$ definiert wird.

Beobachtungen 7.10

(a) Die Definition der Ordnung $\lhd_\chi$ in Definition 7.9 ist äquivalent zur Definition

$$\begin{aligned} u \lhd_\chi v \quad :\Leftrightarrow \quad & \chi(u) \leq_{\text{p}} \chi(v) \\ & \textit{oder} \\ & \chi(u) = x_1ay \textit{ und } \chi(v) = x_2bz \textit{ mit } a \lhd b, \\ & \textit{sowie } x_1 \textit{ und } x_2 \textit{ maximal lang so, dass } x_1 = x_2 \textit{ gilt.} \end{aligned}$$

(b) Die Funktion χ ist keine morphe Abbildung, d. h. es gilt im Allgemeinen nicht $\chi(w_1w_2) = \chi(w_1)\chi(w_2)$. Sei beispielsweise θ eine morphe Involution, die auf zwei Wörtern $w_1, w_2 \in \Sigma^+$ nicht die Identität ist. Außerdem sei $\theta(w_1) \lhd w_1$ und $w_2 \lhd \theta(w_2)$. Dann gilt $\chi(w_1w_2) = w_1w_2 \neq \chi(w_1)\chi(w_2) = w_1\theta(w_2)$.

Beobachtungen 7.11

(a) *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort und θ eine morphe Involution mit $w \neq \theta(w)$. Dann gilt entweder $w \lhd \theta(w)$ oder $\theta(w) \lhd w$, aber nicht beides.*

(b) *Sei θ eine morphe Involution, $u, v \in \Sigma^+$ nichtleere Wörter und $\lhd$ eine lineare Ordnung auf Σ bzw. die dadurch induzierte lexikographische Ordnung. Aus der Definition der Abbildung χ folgt direkt, dass $\chi(uv) \lhd \chi(u)\chi(v)$ gilt. Außerdem ist $\chi(w) = \chi(\theta(w))$, $w \lhd \chi(w)$ und $w \lhd_\chi \theta(w)$ für alle Wörter $w \in \Sigma^+$.*

(c) *Es ist möglich, dass der maximale Suffix α von $w \in \Sigma^+$ bezüglich der Ordnung $\lhd_\chi$ gleich dem maximalen Suffix β bezüglich $\lhd_\chi^{-1}$ ist. Sei z. B. $b \lhd c \lhd a$ und $w = c^i a c^i$ mit $i \geq 1$. Für die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$ ist $\alpha = \beta = ac^i$.*

Bei der durch χ definierten Ordnung benötigen wir eine weitere Voraussetzung um $\alpha \neq \beta$ garantieren zu können. Wir nennen das Zeichen $w_{[k]}$ eines Wortes $w \in \Sigma^+$ das *maximale Zeichen* von w bezüglich $\lhd_\chi$, falls $w_{[i]} \lhd_\chi w_{[k]}$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Mit dieser Definition können wir über α und β die folgende Aussage treffen.

Lemma 7.12 *Sei $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort, θ eine morphe Involution und $\lhd$ eine lineare Ordnung auf w bzw. die davon induzierte lexikographische Ordnung. Sei a das maximale Zeichen von w bezüglich $\lhd_\chi$ und b das maximale Zeichen von w bezüglich $\lhd_\chi^{-1}$. Weiter sei α der maximale Suffix von w bezüglich $\lhd_\chi$ und β der maximale Suffix von w bezüglich $\lhd_\chi^{-1}$. Gilt $a \neq b$ und $a \neq \theta(b)$, so folgt $\alpha \neq \beta$.*

Beweis: Der maximale Suffix α von w bezüglich $\lhd_\chi$ beginnt mit a oder $\theta(a)$, der maximale Suffix β von w bezüglich $\lhd_\chi^{-1}$ beginnt mit b oder $\theta(b)$. Da $a, \theta(a)$ und $b, \theta(b)$ paarweise verschieden sind, folgt $\alpha \neq \beta$. □

In Beobachtung 7.11 (c) ist das Zeichen $a \in \Sigma$ sowohl bezüglich der Ordnung $\lhd_\chi$ als auch bezüglich $\lhd_\chi^{-1}$ maximal. Daher ist die Voraussetzung für Lemma 7.12 nicht erfüllt und die maximalen Suffixe können identisch sein.

Lemma 7.13 *Sei θ eine morphe Involution, $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort und $\lhd$ eine lineare Ordnung auf Σ bzw. die dadurch induzierte lexikographische Ordnung. Die Funktion χ erhält Perioden, es gilt $\pi(w) = \pi(\chi(w))$, $\pi_\theta^s(w) = \pi_\theta^s(\chi(w))$, $\pi_\theta(w) = \pi_\theta(\chi(w))$ und $\pi_\theta^{alt}(w) = \pi_\theta^{alt}(\chi(w))$.*

Beweis: Klar, da θ eine morphe Involution ist und Beobachtung 2.2 (e) gilt. □

Lemma 7.14 *Sei θ eine morphe Involution, $u, u', v \in \Sigma^+$ nichtleere Wörter und $\lhd$ eine lineare Ordnung auf Σ bzw. die dadurch induzierte lexikographische Ordnung. Gilt $\chi(u) = \chi(u')$, so folgt $\chi(u) <_{\mathrm{p}} \chi(u'v)$.*

Beweis: Die Involution θ ist auf u genau dann die Identität, wenn θ auf u' die Identität ist. Falls θ auf u und u' die Identität ist, so ist die Aussage trivial. Sei also θ weder auf u noch auf u' die Identität und sei Œ $\theta(u') \lhd u'$. Dann ist $\chi(u) = \chi(u') = u'$. Aus $\theta(u') \lhd u'$ folgt $\theta(u'v) = \theta(u')\theta(v) \lhd u'v$, also ist $\chi(u'v) = u'v$. Es folgt $\chi(u) = u' <_{\mathrm{p}} \chi(u'v) = u'v$. □

Korollar 7.15 *Sei θ eine morphe Involution und $\lhd$ eine lineare Ordnung auf Σ bzw. die dadurch induzierte lexikographische Ordnung. Dann gilt $u \lhd_\chi u'v$ und $u'v \ntriangleleft_\chi u$ für alle Wörter $u, u', v \in \Sigma^+$ mit $\chi(u) = \chi(u')$*

Beweis: Es gilt $u \lhd_\chi u'v$ genau dann, wenn $\chi(u) \lhd \chi(u'v)$ ist. Analog gilt $u'v \ntriangleleft_\chi u$ genau dann, wenn $\chi(u'v) \ntriangleleft \chi(u)$. Nach Lemma 7.14 gilt $\chi(u) <_{\mathrm{p}} \chi(u'v)$. Es folgt $\chi(u) \lhd \chi(u'v)$ und $\chi(u'v) \ntriangleleft \chi(u)$. □

Korollar 7.16 *Sei θ eine morphe Involution, $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort und $\lhd$ eine lineare Ordnung auf Σ bzw. die dadurch induzierte lexikographische Ordnung. Sei α der maximale Suffix von w bezüglich $\lhd_\chi$. Dann gilt $w \neq w_1\alpha' w_2$ für alle $w_1 \in \Sigma^*$, $\alpha', w_2 \in \Sigma^+$ mit $\chi(\alpha) = \chi(\alpha')$.*

Beweis: Folgt direkt aus Korollar 7.15. □

Lemma 7.17 *Sei θ eine morphe Involution, $w \in \Sigma^+$ ein nichtleeres Wort und $\lhd$ eine lineare Ordnung auf Σ bzw. die dadurch induzierte lexikographische Ordnung. Weiter sei α der maximale Suffix von w bezüglich $\lhd_\chi$. Dann gilt $|w\alpha^{-1}| < \pi_\theta^{alt}(w)$.*

Beweis: Angenommen es gilt $|w\alpha^{-1}| \geq \pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$. Es ist $\alpha' u \leq_{\mathrm{s}} w$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$. Da das Wort α' im Vergleich zum Suffix α genau um $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ Stellen verschoben ist, gilt $\chi(\alpha) = \chi(\alpha')$. Dies ist ein Widerspruch zu Korollar 7.16. □

Kapitel 8

Unvermeidbare Muster

In diesem Kapitel wollen wir vermeidbare und unvermeidbare Muster in Bezug auf Involutionen untersuchen. Ein typisches Muster ist z. B. $\alpha\alpha$, das Wort $w = (ab)^\omega$ enthält das Muster $\alpha\alpha$ für $\alpha = ab$. Für $|\Sigma| = 2$ ist das Muster $\alpha\alpha$ *unvermeidbar*, das heißt es tritt in jedem unendlich langen Wort auf. Wir wollen prüfen, ob Muster, deren Variablen teilweise durch eine morphe oder antimorphe Involution abgebildet werden, vermeidbar oder unvermeidbar sind. Ein Beispiel für ein solches Muster ist $\alpha\theta(\alpha)\alpha$. Ob ein Muster vermeidbar oder unvermeidbar ist, hängt dabei oft von der Alphabetgröße $|\Sigma|$ ab. Zahlreiche Aussagen zu vermeidbaren und unvermeidbaren Mustern ohne Involution finden sich in [19].

Wir benötigen für dieses Kapitel neben Σ ein weiteres Alphabet E. Die Elemente von E bezeichnen wir als *Variable* und verwenden die Bezeichnungen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ in diesem Kapitel für solche Variable. Die Wörter aus E^* nennen wir *Muster*. So ist beispielsweise $\alpha\beta\alpha \in E^*$ ein Muster aus den Variablen $\alpha, \beta \in E$. Wir ordnen nun jedem Muster eine *Mustersprache* über dem Alphabet Σ zu. Diese zugeordnete Sprache enthält alle Wörter, die durch Substitution der Variablen durch nichtleere Wörter aus Σ^+ entstehen. Für $\Sigma = \{a, b\}$ ist die Mustersprache des Musters $\alpha\alpha$ beispielsweise $\{aa, bb, aaaa, abab, baba, bbbb, \ldots\}$. Wir sagen ein Wort w *vermeidet* ein Muster, falls kein Faktor von w existiert, der Element der Mustersprache ist. Ist ein Faktor von w hingegen Element der Mustersprache, so sagen wir w *enthält* das Muster. Wir betrachten vorwiegend unendlich lange Wörter $w \in \Sigma^\omega$. Existiert zu gegebenem Muster und k–elementigem Alphabet Σ ein Wort $w \in \Sigma^\omega$ so, dass w das Muster vermeidet, so sagen wir das Muster ist *k–vermeidbar*. Andernfalls nennen wir das Muster *k–unvermeidbar*. Existiert ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass das Muster k–vermeidbar ist, so nennen wir das Muster auch einfach *vermeidbar* bzw. *unvermeidbar*, falls kein solches k existiert. Wir wollen nun zunächst einige bekannte Resultate aus [19] angeben.

Beobachtungen 8.1 ([19, Kapitel 3])

(a) *Es existiert genau dann ein Wort unendlicher Länge, das ein Muster vermeidet, wenn unendlich viele Wörter aus Σ^* das Muster vermeiden. Also ist ein Muster*

genau dann vermeidbar, wenn unendlich viele Wörter endlicher Länge existieren, die das Muster vermeiden.

(b) *Die Muster α^i für $i \geq 3$, $\alpha\beta\alpha\beta\alpha$, $\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha$, $\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta$, $\alpha\beta\alpha\alpha\beta$ und $\alpha\alpha\beta\beta\alpha$ sind 2–vermeidbar.*

(c) *Die Muster $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha\beta$, $\beta\alpha\alpha$, $\alpha\alpha\beta\alpha$, $\alpha\beta\beta\alpha$, $\alpha\alpha\beta\beta$, $\alpha\beta\alpha\beta$, $\alpha\alpha\beta\alpha\alpha$ und $\alpha\alpha\beta\alpha\beta$ sind 2–unvermeidbar und 3–vermeidbar.*

(d) *Die Muster α, $\alpha\beta$ und $\alpha\beta\alpha$ sind unvermeidbar.*

Wir betrachten nun einige dieser Aussagen in Bezug auf morphe und antimorphe Involutionen. Wir erweitern dazu die Menge der Muster E^*, indem wir für alle $\alpha \in E$ Elemente $\theta(\alpha)$ in E einfügen. Bei gegebener morpher oder antimorpher Involution erhalten wir dann die zugehörige Mustersprache durch Ersetzen der Variablen durch nichtleere Wörter und bei Variablen $\theta(\alpha)$ durch Ersetzen der Variablen und Anwenden der Involution. So ergibt sich beispielsweise für die morphe Involution mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und das Muster $\alpha\theta(\alpha)$ die Mustersprache $\{ab, ba, aabb, abba, baab, bbaa, \ldots\}$. Das Wort $w = (abba)^\omega$ enthält dann das Muster $\alpha\theta(\alpha)$ für die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$ für $\alpha = a$ oder $\alpha = ab$.

Beobachtung 8.2 *Sei θ eine morphe oder antimorphe Involution und nicht die Identität. Dann ist jedes Muster, das Variable α und $\theta(\alpha)$ enthält, vermeidbar.*

Beweis: Da θ nicht die Identität ist, existiert ein Zeichen $a \in \Sigma$ mit $\theta(a) \neq a$. Damit vermeidet das Wort $w = a^\omega$ jedes Muster, das Variable α und $\theta(\alpha)$ enthält. □

Auf Grund der vorangegangenen Beobachtung muss nicht weiter untersucht werden, ob Muster bei einer festen Involution vermeidbar oder unvermeidbar sind. Wir ändern daher nun die Fragestellung. Wir betrachten bei einem gegebenen Muster $e \in E^*$ entweder alle morphen oder alle antimorphen Involutionen $\Sigma^* \to \Sigma^*$ gleichzeitig. Wir untersuchen also z. B., ob ein unendlich langes Wort $w \in \Sigma^\omega$ so existiert, dass für alle morphen Involutionen das Wort w ein Muster e vermeidet. Wenn wir bei gegebenem Alphabet Σ im folgenden bei Mustern mit Variablen $\theta(\alpha)$ von deren k–Vermeidbarkeit oder k–Unvermeidbarkeit sprechen, so meinen wir stets entweder für alle morphen oder für alle antimorphen Involutionen. Wir führen nun die Begriffe *Vermeidbarkeitsindex* $\mathcal{V}(e)$, *morphen θ–Vermeidbarkeitsindex* $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e)$ und *antimorphen θ–Vermeidbarkeitsindex* $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(e)$ ein. Wir bezeichnen $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ als Vermeidbarkeitsindex $\mathcal{V}(e)$ eines Musters $e \in E^*$, falls das Muster k–vermeidbar ist und k dabei minimal ist. Ist ein Muster unvermeidbar, so ordnen wir als Vermeidbarkeitsindex ∞ zu. So hat nach Beobachtung 8.1 das Muster $\alpha\alpha\alpha$ den Vermeidbarkeitsindex $\mathcal{V}(\alpha\alpha\alpha) = 2$, $\alpha\alpha$ hat $\mathcal{V}(\alpha\alpha) = 3$ und $\alpha\beta\alpha$ besitzt den Vermeidbarkeitsindex $\mathcal{V}(\alpha\beta\alpha) = \infty$. Die Begriffe des morphen und antimorphen θ–Vermeidbarkeitsindex beziehen sich auf die durch Variable der Form $\theta(\alpha)$ erweiterte

Mustermenge. Wir bezeichnen $k \in \mathbb{N}$ als morphen θ–Vermeidbarkeitsindex $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e)$ eines Musters $e \in E^*$, falls ein unendlich langes Wort $w \in \Sigma^\omega$ über einem Alphabet Σ mit $|\Sigma| = k$ so existiert, dass w das Muster e für alle morphen Involutionen $\Sigma^* \to \Sigma^*$ vermeidet und k minimal ist. Existiert für kein k solch ein Wort, so ordnen wir ∞ als morphen θ–Vermeidbarkeitsindex zu. Der antimorphe θ–Vermeidbarkeitsindex wird analog definiert.

Beobachtung 8.3

(a) Sei $e \in E^*$ ein Muster, das die Variablen α und β enthält. Sei $e' \in E^*$ ein weiteres Muster, das durch Ersetzen jedes Auftretens von β in e durch $\theta(\alpha)$ entsteht. Falls e ein k–vermeidbares Muster ist, so ist für alle morphen und antimorphen Involutionen das Muster e' ebenfalls k–vermeidbar.

(b) Sei $e \in E$ ein Muster, das Variable α und $\theta(\alpha)$ enthält. Sei $e' \in E^*$ das Muster, das durch Ersetzen jedes Auftretens von $\theta(\alpha)$ in e durch eine neue Variable β entsteht. Falls e ein k–unvermeidbares Muster ist, so ist das Muster e' ebenfalls k–unvermeidbar.

(c) Das Muster $\alpha\theta(\alpha)$ ist sowohl für morphe als auch für antimorphe Involutionen unvermeidbar.

Beweis: (a), (b): klar. (c): Angenommen es existiert ein Wort $w \in \Sigma^\omega$, das $\alpha\theta(\alpha)$ vermeidet. Sei θ eine morphe bzw. antimorphe Involution mit $\theta(w_{[1]}) = w_{[2]}$. Dann enthält w das Muster $\alpha\theta(\alpha)$ für $\alpha = w_{[1]}$, im Widerspruch zur Annahme. □

Lemma 8.4 *Sei $e \in E^*$ ein Muster, das Variable α und $\theta(\alpha)$ enthält. Außerdem enthalte e keine weiteren Variablen der Form $\theta(\gamma)$. Es sei e' das Muster, das entsteht, wenn alle Vorkommen von $\theta(\alpha)$ in e durch α ersetzt werden. Das Muster e'' entstehe durch Ersetzen von $\theta(\alpha)$ in e durch eine neue Variable β. Dann gilt $\mathcal{V}(e') \leq \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e) \leq \mathcal{V}(e'')$ und $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(e) \leq \mathcal{V}(e'')$.*

Beweis: Die Beziehung $\mathcal{V}(e') \leq \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e)$ gilt, da beim morphen θ–Vermeidbarkeitsindex alle morphen Involutionen einschließlich der Identität betrachtet werden. Wegen 8.3 (b) gilt $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e) \leq \mathcal{V}(e'')$ und $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(e) \leq \mathcal{V}(e'')$. □

Die Aussage von Lemma 8.4 lässt sich auch intuitiv nachvollziehen. Angenommen wir wollen bei gegebenem Alphabet Σ und einem Wort $w \in \Sigma^\omega$ prüfen, ob w das Muster $e' = \alpha\alpha\alpha$ enthält. Wir können hierzu versuchen, die Variable α durch ein Wort $u \in \Sigma^+$ zu ersetzen und in w nach dem Faktor uuu suchen. Beim Muster $e'' = \alpha\beta\alpha$ bleiben uns hingegen nach Festlegen der Ersetzung von α immer noch unendlich viele Möglichkeiten zur Ersetzung von β. Das Muster $\alpha\beta\alpha$ bietet offensichtlich mehr Freiheitsgrade, es ist

daher leichter dieses Muster zu finden und man benötigt mehr Zeichen im Alphabet, um es zu verhindern (beim Muster $\alpha\beta\alpha$ sogar unendlich viele d. h. es ist unvermeidbar). Das Muster $e = \alpha\theta(\alpha)\alpha$ liegt bezüglich der Freiheitsgrade zwischen $\alpha\alpha\alpha$ und $\alpha\beta\alpha$. Nach Wahl von α bleiben für $\theta(\alpha)$ endlich viele Ersetzungsmöglichkeiten durch die Wahl der Involution. Der Vermeidbarkeitsindex gibt an, wie schwer es ist ein Muster zu vermeiden. Daher ist die Beziehung $\mathcal{V}(e') \leq \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e) \leq \mathcal{V}(e'')$ aus Lemma 8.4 nachvollziehbar. Interessanterweise existieren Muster so, dass im morphen Fall die Beziehung mit echter Kleiner–Relation gilt, also $\mathcal{V}(e') < \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e) < \mathcal{V}(e'')$. Dies zeigt der folgende Satz 8.9, zuvor benötigen wir noch drei Lemmata und definieren das *Thue–Morse Wort*.

Lemma 8.5 *Sei Σ ein zwei–elementiges Alphabet, $|\Sigma| = 2$. Dann existiert kein Wort $w \in \Sigma^{\omega}$ so, dass w das Muster $\alpha\theta(\alpha)\alpha$ für alle morphen Involutionen $\Sigma^* \to \Sigma^*$ vermeidet. Es gilt daher $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\alpha\theta(\alpha)\alpha) > 2$.*

Beweis: Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir versuchen ein Wort $w \in \Sigma^{\omega}$ zu konstruieren, das $e = \alpha\theta(\alpha)\alpha$ für alle morphen Involutionen vermeidet und führen dies zum Widerspruch. Dieses Wort darf also beispielsweise die Wörter aaa, bbb, aba und bab nicht als Faktor enthalten. Œ beginne w mit a. Fall 1: Angenommen das Wort w beginnt mit ab. Dann muss darauf ein b folgen, $abb <_{\mathrm{p}} w$. Darauf muss ein a folgen, das vierte Zeichen muss ebenfalls ein a sein. Damit ist $abbaa <_{\mathrm{p}} w$. Folgt nun ein a, so enthält w den Faktor aaa. Folgt hingegen ein b, so ist für die morphe Involution θ mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$ das Wort $ab\theta(ab)ab$ ein Faktor von w. Die Argumentation für Fall 2 mit $w = aa\ldots$ verläuft analog. □

Lemma 8.6 *Es gilt $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\alpha\theta(\alpha)\alpha) > 2$.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 8.5. □

Definition 8.7 *Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Dann definieren wir einen Homomorphismus $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ durch $a \mapsto ab$ und $b \mapsto ba$. So ist beispielsweise $f(a) = ab$ und $f^2(a) = abba$. Für f^{∞} ergibt sich $f^{\infty}(a) = abbabaab\ldots$ als Fixpunkt. Dieses Wort bezeichnen wir als* Thue–Morse Wort.

Lemma 8.8 ([19, Proposition 3.1.1.**])** *Das Thue–Morse Wort vermeidet die Muster $\alpha\alpha\alpha$ und $\alpha\beta\alpha\beta\alpha$.*

Satz 8.9 *Es gilt $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\alpha\theta(\alpha)\alpha) = 3$.*

Beweis: Sei Σ ein drei–elementiges Alphabet, $\Sigma = \{a, b, c\}$. Sei $u \in (\Sigma')^\omega$ das Thue–Morse Wort bestehend aus den Zeichen a' und b'. Sei $w \in \Sigma^\omega$ das Wort, das durch Ersetzen von a' in u durch $aacb$ und von b' durch $accb$ entsteht. Wir werden zeigen, das Wort w vermeidet das Muster $\alpha\theta(\alpha)\alpha$ für alle morphen Involutionen. Zur Vereinfachung der Darstellung definieren wir $x = aacb$ und $y = accb$.

Wir nehmen an, $\alpha\theta(\alpha)\alpha$ sei für eine morphe Involution θ und eine Ersetzung von α durch $u \in \Sigma^+$ ein Faktor von w und führen dies zum Widerspruch. Wir betrachten zunächst die Möglichkeiten, die Variable α durch Wörter $u \in \Sigma^+$ der Länge $|u| < 7$ zu ersetzen. Das Wort $u\theta(u)u$ hat dann maximal die Länge 18. Also muss das Wort $u\theta(u)u$ für eine morphe Involution θ ein Faktor eines Wortes $w' \in \{x, y\}^6$ sein. Die Wörter xxx, yyy, $xyxyx$ und $yxyxy$ dürfen dabei wegen Lemma 8.8 nicht Faktor von w' sein. Das Programm A.1 zeigt, dass keine Wörter u und w' existieren, die diese Bedingungen für eine morphe Involution θ erfüllen. Wir nehmen nun an, α werde durch $u \in \Sigma^+$ mit $|u| \geq 7$ ersetzt. Das Wort u enthält dann $aacb$ oder $accb$. Œ enthalte u das Wort $aacb$. Damit enthält $\theta(u)$ den Faktor $\theta(aac) = \theta(a)\theta(a)\theta(c)$. Weiter ist $\theta(u)$ und damit $\theta(a)\theta(a)\theta(c)$ ein Faktor von w. Es gibt in w nur zwei Möglichkeiten für zwei aufeinander folgende identische Zeichen. Entweder sind dies zwei Zeichen c gefolgt von einem Zeichen b, oder es sind zwei a gefolgt von einem c. Daraus folgt, dass $u\theta(u)u$ nur dann ein Faktor von w sein kann, wenn θ die Identität ist. Außerdem folgt, dass $|u| = 4 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt. Es ergibt sich Abbildung 21. Dabei gilt $w_i, w_{i'}, w_{i''} \in \{x, y\}$ für alle $0 \leq i \leq k$. Enthält das erste Auftreten von u in Abbildung 21 das Wort $(w_0)_{[2]}(w_0)_{[3]}(w_0)_{[4]}$ oder $(w_0)_{[1]}(w_0)_{[2]}(w_0)_{[3]}(w_0)_{[4]} = w_0$ als Präfix, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ccccc} w_0 & = & w_{0'} & = & w_{0''} \\ w_1 & = & w_{1'} & = & w_{1''} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{k-1} & = & w_{k-1'} & = & w_{k-1''} \end{array}$$

Damit ist $w_0 w_1 \ldots w_{k-1}\, w_{0'} w_{1'} \ldots w_{k-1'}\, w_{0''} w_{1''} \ldots w_{k-1''} = (w_0 w_1 \ldots w_{k-1})^3$ ein Faktor von w. Wegen $w_i \in \{x, y\}$ für alle $0 \leq i \leq k-1$ ist dies ein Widerspruch zu Lemma 8.8. Ist hingegen nur das Wort $(w_0)_{[3]}(w_0)_{[4]}$ oder $(w_0)_{[4]}$ ein Präfix von u, so ist $w_0 \neq w_{0'}$ möglich. Dafür ist in diesem Fall das Wort $(w_{k''})_{[1]}(w_{k''})_{[2]}$ oder $(w_{k''})_{[1]}(w_{k''})_{[2]}(w_{k''})_{[3]}$ ein Suffix des dritten Auftretens von u. Daraus folgt

$$\begin{array}{ccccc} w_1 & = & w_{1'} & = & w_{1''} \\ w_2 & = & w_{2'} & = & w_{2''} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_k & = & w_{k'} & = & w_{k''} \end{array}$$

und $w_1 w_2 \ldots w_k\, w_{1'} w_{2'} \ldots w_{k'}\, w_{1''} w_{2''} \ldots w_{k''} = (w_1 w_2 \ldots w_k)^3$ ist ein Faktor von w. Dies ist erneut ein Widerspruch zu Lemma 8.8. Mit Lemma 8.5 folgt die Aussage. $\square$

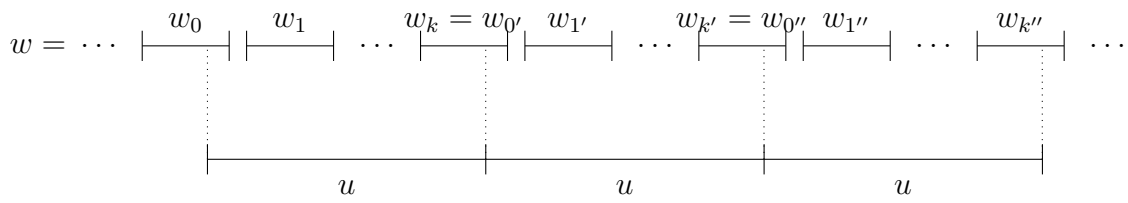

Abbildung 21: Ausschnitt von w zur Darstellung des Faktors uuu

Beobachtung 8.10 *Für die Muster $e = \alpha\theta(\alpha)\alpha$, $e' = \alpha\alpha\alpha$ und $e'' = \alpha\beta\alpha$ gilt $\mathcal{V}(e') < \mathcal{V}^{\theta}_{\mathrm{m}}(e) < \mathcal{V}(e'')$.*

Beweis: Es ist $\mathcal{V}(e') = 2$ und $\mathcal{V}(e'') = \infty$ nach Beobachtung 8.1. Nach Satz 8.9 gilt $\mathcal{V}^{\theta}_{\mathrm{m}}(e) = 3$. □

Wir zeigen nun, dass auch bei antimorphen Involutionen $\mathcal{V}^{\theta}_{\mathrm{a}}(\alpha\theta(\alpha)\alpha) = 3$ gilt.

Satz 8.11 *Es gilt $\mathcal{V}^{\theta}_{\mathrm{a}}(\alpha\theta(\alpha)\alpha) = 3$.*

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 8.9. Sei Σ ein drei–elementiges Alphabet, $\Sigma = \{a, b, c\}$. Sei $u \in (\Sigma')^{\omega}$ das Thue–Morse Wort bestehend aus den Zeichen a' und b'. Sei $w \in \Sigma^{\omega}$ das Wort, das durch Ersetzen von a' in u durch $aabbc$ und von b' durch $aaccb$ entsteht. Wir werden zeigen, das Wort w vermeidet das Muster $\alpha\theta(\alpha)\alpha$ für alle antimorphen Involutionen. Zur einfacheren Darstellung setzen wir $x = aabbc$ und $y = aaccb$.

Angenommen es existiert eine antimorphe Involution und eine Ersetzung von α durch $u \in \Sigma^{+}$ so, dass w das Wort $u\theta(u)u$ als Faktor enthält. Wir nehmen zunächst $|u| < 9$ an. Damit hat $u\theta(u)u$ maximal die Länge 24 und $u\theta(u)u$ ist Faktor eines Wortes $w' \in \{x, y\}^6$. Die Wörter xxx, yyy, $xyxyx$ und $yxyxy$ dürfen dabei wegen Lemma 8.8 nicht Faktor von w' sein. Es existieren jedoch keine Wörter u und w', die diese Bedingungen für eine antimorphe Involution θ erfüllen, wie das Programm A.1 zeigt. Also ist $|u| \geq 9$ und u enthält mindestens ein Wort x oder y komplett. Sei $w_1 w_2' \leq_{\mathrm{s}} u$ mit $w_1, w_2 \in \{x, y\}$, $w_2 = w_2' w_2''$ und $|w_2'| < 5$. Es ergibt sich Abbildung 22 mit $w_3, w_4 \in \{x, y\}$. Œ sei $w_1 = x = aabbc$. Dann enthält $\theta(u)$ und damit $w_2 w_3 w_4$ das Wort $\theta(aabbc) = \theta(c)\theta(b)\theta(b)\theta(a)\theta(a)$ der Länge 5 als Faktor. Wir betrachten daher die

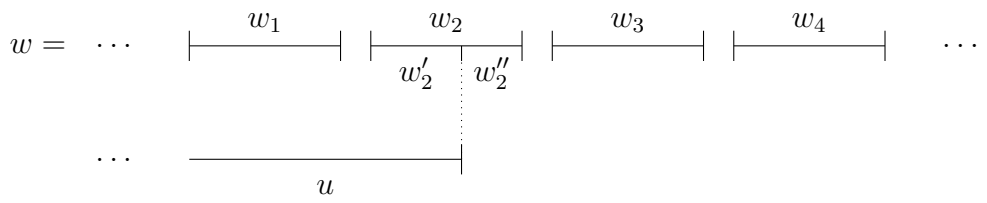

Abbildung 22: Ausschnitt von w und des Faktors u von w

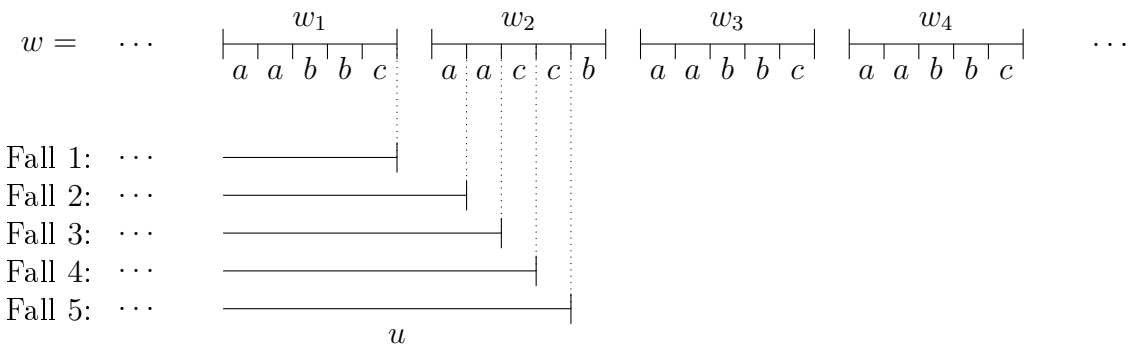

Abbildung 23: Ausschnitt von w und Darstellung der Möglichkeiten zur Position des Faktors u

folgenden Wörter:

$$\begin{aligned} xx &= aabbc\,aabbc \\ xy &= aabbc\,aaccb \\ yx &= aaccb\,aabbc \\ yy &= aaccb\,aaccb\ . \end{aligned}$$

Nur xx enthält $\theta(c)\theta(b)\theta(b)\theta(a)\theta(a)$ für die antimorphe Involution θ mit $a \mapsto b$, $b \mapsto a$ und $c \mapsto c$. Wegen $w_1 = x$ ist $w_2w_3 = xx$ ein Widerspruch zu Lemma 8.8. Es bleibt der Fall $w_2w_3w_4 = yxx$. Hier gibt es fünf Möglichkeiten für die Position von u, siehe Abbildung 23. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass in allen fünf Fällen $\theta(u) \leq_{\mathrm{p}} w_2''w_3w_4$ bzw. $w_2''w_3w_4 \leq_{\mathrm{p}} \theta(u)$ nicht gilt. Also ist die Annahme, es existiert eine antimorphe Involution θ und ein $u \in \Sigma^+$ mit $u\theta(u)u$ ist ein Faktor von w, falsch. Mit Lemma 8.6 folgt die Aussage. □

Beobachtung 8.12 *Für die Muster $e = \alpha\theta(\alpha)\alpha$, $e' = \alpha\alpha\alpha$ und $e'' = \alpha\beta\alpha$ gilt $\mathcal{V}(e') < \mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(e) < \mathcal{V}(e'')$.*

Lemma 8.13 *Es gilt $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)) = \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)) = 3$.*

Beweis: Nach der Bemerkung 8.1 (c) gilt $\mathcal{V}(\alpha\alpha\beta) = 3$. Das Lemma 8.4 impliziert $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)), \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)) \leq 3$. Wir zeigen nun durch Widerspruch, dass $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)) \neq 2$ gilt. Der Beweis für $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)) \neq 2$ verläuft analog. Angenommen es existiert ein Wort $w \in \Sigma^{\omega}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$ so, dass w das Muster $\alpha\alpha\theta(\alpha)$ für alle antimorphen Involutionen vermeidet. Dann darf w weder aa noch bb als Faktor enthalten. Œ beginne w mit a. Es folgt $w = (ab)^{\omega}$. Jedoch enthält $w = (ab)^{\omega}$ im Widerspruch zur Annahme das Muster $\alpha\alpha\theta(\alpha)$ für $\alpha = ab$ und die antimorphe Involution mit $a \mapsto b$ und $b \mapsto a$. Also ist $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)) \neq 2$ und analog $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)) \neq 2$. Damit ist $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)) = \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\alpha\alpha\theta(\alpha)) = 3$. □

Lemma 8.14 *Es gilt* $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\theta(\alpha)\alpha\alpha) = \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\theta(\alpha)\alpha\alpha) = 3$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 8.13. □

Für das nächste Lemma führen wir einen weiteren Begriff ein. Sei $e \in E^*$ ein Muster bestehend aus Variablen der Form α und $\theta(\alpha)$. Dann bezeichnen wir das Muster $e' \in E$ als *θ–komplementäres* Muster zu e, falls e' durch Vertauschen der Variablen α und $\theta(\alpha)$ entsteht. So ist beispielsweise das θ–komplementäre Muster zu $\alpha\alpha\theta(\alpha)\beta$ das Muster $\theta(\alpha)\theta(\alpha)\alpha\theta(\beta)$. Dies ist unabhängig davon, ob morphe oder antimorphe Involutionen betrachtet werden.

Lemma 8.15 *Sei $e \in E^*$ ein Muster und $e' \in E$ das θ–komplementäre Muster zu e. Dann gilt $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(e) = \mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(e')$ und $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e) = \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e')$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e) = \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e')$. Zur einfacheren Darstellung ersetzen wir im Muster e' die Variable α durch α' und $\theta(\alpha)$ durch $\theta(\alpha')$. Angenommen ein Wort $w \in \Sigma^{\omega}$ enthält das Muster e für eine morphe Involution indem α durch $u \in \Sigma^{+}$ ersetzt wird. Dann enthält w das Muster e' für die gleiche morphe Involution indem α' durch $\theta(u)$ ersetzt wird. Aus Symmetriegründen erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \text{Es existiert eine morphe Involution } \theta \text{ so, dass } w \text{ das Muster } e \text{ enthält.} \\ \Leftrightarrow\ & \text{Es existiert eine morphe Involution } \theta' \text{ so, dass } w \text{ das Muster } e' \text{ enthält.} \end{aligned}$$

Durch Negation erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \text{Das Wort } w \in \Sigma^{\omega} \text{ vermeidet das Muster } e. \\ \Leftrightarrow\ & \text{Das Wort } w \in \Sigma^{\omega} \text{ vermeidet das Muster } e'. \end{aligned}$$

Es folgt $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e) = \mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e')$. Der Beweis der Aussage $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(e) = \mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(e')$ verläuft identisch. □

Korollar 8.16

(a) Für das Muster $\theta(\alpha)\alpha\theta(\alpha) \in E^*$ *gilt* $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\theta(\alpha)\alpha\theta(\alpha)) = \mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\theta(\alpha)\alpha\theta(\alpha)) = 3$ *nach Satz 8.9 und 8.11.*

(b) Für das Muster $\theta(\alpha)\theta(\alpha)\alpha \in E^*$ *gilt* $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\theta(\alpha)\theta(\alpha)\alpha) = \mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\theta(\alpha)\theta(\alpha)\alpha) = 3$ *nach Lemma 8.13.*

(c) Für der Muster $\alpha\theta(\alpha)\theta(\alpha) \in E^*$ *gilt* $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(\alpha\theta(\alpha)\theta(\alpha)) = \mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(\alpha\theta(\alpha)\theta(\alpha)) = 3$ *nach Lemma 8.14.*

Kapitel 9

Zusammenfassung

In der vorliegenden Diplomarbeit wurden Wortgrenzen unter Involution untersucht. Im 2. Kapitel wurden zunächst grundlegende Begriffe definiert, sowie bekannte Eigenschaften angeführt. Zentral für die Arbeit sind die Begriffe Begrenztheit und Periodizität. Wir sagen ein Wort $w \in \Sigma^+$ ist begrenzt, falls $w = xu = uy$ für nichtleere Wörter $u, x, y \in \Sigma^+$ gilt. Wir sagen $p \in \mathbb{N}$ ist eine Periode von $w \in \Sigma^+$, falls $w <_{\mathrm{p}} u^\omega$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge p gilt. Die kleinste Periode bezeichnen wir mit $\pi(w)$. Wir übertragen die Begriffe Begrenztheit und Periodizität für Involutionen θ (Abbildungen so, dass θ^2 der Identität entspricht). Dabei betrachten wir sowohl morphe Involutionen, also Abbildungen mit $\theta(uv) = \theta(u)\theta(v)$ für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, als auch antimorphe Involutionen, also Abbildungen mit $\theta(uv) = \theta(v)\theta(u)$ für alle $u, v \in \Sigma^*$. Wir sagen $w \in \Sigma^+$ ist θ–begrenzt, falls $w = xu = \theta(u)y$ für nichtleere Wörter $u, x, y \in \Sigma^+$ gilt. Es ist $p \in \mathbb{N}$ eine θ–Periode von w, falls $w <_{\mathrm{p}} \{u, \theta(u)\}^\omega$ für ein Wort $u \in \Sigma^+$ der Länge p gilt. Der so definierte Begriff θ–Periode ist aus der Fachliteratur bekannt, wir haben in dieser Arbeit noch zwei weitere Begriffe von θ–Periodizität eingeführt. Gilt $w <_{\mathrm{p}} (u\theta(u))^\omega$ für Wörter $u, w \in \Sigma^+$, so sprechen wir von einer alternierenden θ–Periode $p = |u|$ von w. Es ist p eine schwache θ–Periode eines Wortes $w \in \Sigma^+$, falls für jedes $i \in \{1, \ldots, n-p\}$ die Gleichung $w_{[i]} = w_{[i+p]}$ oder $w_{[i]} = \theta(w_{[i+p]})$ gilt. Die minimale θ–Periode bezeichnen wir mit $\pi_\theta(w)$, die minimale alternierende θ–Periode mit $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}(w)$ und die minimale schwache θ–Periode mit $\pi_\theta^{\mathrm{s}}(w)$. Im 2. Kapitel geben wir wichtige Eigenschaften all dieser Begriffe an und stellen Zusammenhänge dar. Als Werkzeug für Beweise im weiteren Verlauf der Arbeit, haben wir im zweiten Kapitel außerdem Substitutionsabbildungen ψ eingeführt. Für eine gegebene morphe oder antimorphe Involution θ wird ψ mit Hilfe eines Alphabets Σ' definiert, für das gilt: Für alle $a \in \Sigma$ ist entweder $a \in \Sigma'$ oder $\theta(a) \in \Sigma'$ (falls $a = \theta(a)$ gilt, so ist $a = \theta(a) \in \Sigma'$). Die Abbildung ψ wird nun durch $\psi(a) = a$ falls $a \in \Sigma'$ und $\psi(a) = \theta(a)$ sonst, induziert.

Ein wichtiges Resultat dieser Arbeit ist das Übertragen des Satzes von Fine und Wilf auf θ–Perioden bei morpher und antimorpher Involution in Kapitel 3. Der Satz von Fine und Wilf besagt, dass falls p und q Perioden eines Wortes $w \in \Sigma^+$ sind und $|w| \geq p + q - ggT\{p, q\}$ gilt, dann ist $ggT\{p, q\}$ eine Periode von w. Wir zeigen, dass

falls p und q schwache θ–Perioden von $w \in \Sigma^+$ mit $|w| \geq p + q - ggT\,\{p, q\}$ sind, dann ist $ggT\,\{p, q\}$ eine schwache θ–Perioden von w. Dies gilt für morphe und antimorphe Involutionen θ. Weiter zeigen wir, dass die Aussage analog auch mit θ–Perioden bei morpher Involution gilt. Für alternierende θ–Perioden gilt die Aussage im morphen und antimorphen Fall mit der Bedingung $|w| \geq p + q$. Zur Vollständigkeit verweisen wir für den Fall der antimorphen θ–Periode auf [21, 6, 16].

Die Betrachtung von kritischen Faktorisierungen steht in engem Zusammenhang zur Periodizität eines Wortes. Eine Faktorisierung eines Wortes $w \in \Sigma^+$ ist eine Aufteilung von w in zwei nichtleere Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^+$ mit $w = w_1 w_2$. Wir betrachten bei einer solchen Faktorisierung (w_1, w_2) die Länge des kürzesten Wortes $v \in \Sigma^+$ so, dass $v \leq_{\mathrm{s}} w_1$ (bzw. $w_1 \leq_{\mathrm{s}} v$ falls $|w_1| < |v|$) und $v \leq_{\mathrm{p}} w_2$ (bzw. $w_2 \leq_{\mathrm{p}} v$ falls $|w_2| < |v|$) gilt. Ist die Länge dieses Wortes v gleich der Periode $\pi\,(w)$ von w, so heißt die Faktorisierung kritisch. Das kritische Faktorisierungstheorem besagt, dass unter $\pi\,(w) - 1$ aufeinander folgenden Faktorisierungen immer eine kritische Faktorisierung ist. In Kapitel 4 haben wir diese Aussage für Wörter unter Involution betrachtet. Wir haben gezeigt, dass sich das kritische Faktorisierungstheorem nur in der folgenden Version auf Involutionen übertragen lässt und ansonsten nicht gilt. Ein Wort $v \in \Sigma^+$ wird als schwacher θ–Kreuzfaktor einer Faktorisierung (w_1, w_2) bezeichnet, falls $\psi(v) \leq_{\mathrm{p}} \psi(w_2)$ bzw. $\psi(w_2) \leq_{\mathrm{p}} \psi(v)$ und $\psi(v) \leq_{\mathrm{s}} \psi(w_1)$ bzw. $\psi(w_1) \leq_{\mathrm{s}} \psi(v)$ für eine Substitutionsabbildung ψ gilt. Die Länge des kürzesten schwachen θ–Kreuzfaktors bezeichnen wir als die schwache lokale θ–Periode der Faktorisierung (w_1, w_2). Mit diesen Definitionen konnten wir ein kritisches Faktorisierungstheorem aufstellen: Für ein nichtleeres Wort $w \in \Sigma^+$ mit $\pi_\theta^{\mathrm{s}}\,(w) = p$ existiert unter allen $p - 1$ aufeinander folgenden Faktorisierungen von w eine Faktorisierung (w_1, w_2) mit schwacher lokaler θ–Periode p.

In Kapitel 5 haben wir das Problem von Ehrenfeucht und Silberger in Bezug auf Involutionen untersucht. Bei diesem Problem geht es um die Frage, welche Bedingung an die Wortlänge n gestellt werden muss, so dass die Länge eines längsten unbegrenzten Faktors $\tau\,(w)$ gleich der Periode $\pi\,(w)$ ist. Aus dem kritischen Faktorisierungstheorem aus Kapitel 4 lässt sich ableiten, dass $n \geq 2\pi\,(w) - 2$ die Aussage $\tau\,(w) = \pi\,(w)$ impliziert und dass diese Grenze asymptotisch optimal ist. Lange offen war hingegen, welche Bedingung an die Wortlänge relativ zu $\tau\,(w)$ optimal ist. Holub und Nowotka haben dies in [12] mit dem Beweis der folgenden Aussage gelöst: Gilt $n \geq 7/3 \cdot \tau\,(w)$, so folgt $\tau\,(w) = \pi\,(w)$. Die Bedingung an die Wortlänge n ist scharf. Wir haben in dieser Arbeit die Vermutung formuliert, dass $n \geq 3 \cdot \tau\,(w)$ bei einer morphen Involution θ die Aussage $\tau_\theta\,(w) = \pi_\theta^{\mathrm{alt}}\,(w)$ impliziert. Dabei ist $\tau_\theta\,(w)$ die Länge eines längsten Faktors von w, der θ–unbegrenzt ist. Für antimorphe Involutionen haben wir gezeigt, dass $2 \cdot \tau_\theta\,(w) \geq n$ gilt. Einzige Voraussetzung für diese Aussage ist, dass w Zeichen $w_{[i]}$ und $w_{[j]}$ mit $1 \leq i \neq j \leq n$ und $\theta(w_{[i]}) \neq w_{[j]}$ enthält. Für alternierende θ–Perioden bei einer morphen Involution haben wir bewiesen, dass $w \geq 2 \cdot \pi_\theta^{\mathrm{alt}}\,(w)$ die Aussage $\pi_\theta^{\mathrm{alt}}\,(w) = \tau_\theta\,(w)$ impliziert. Zum Schluss des Kapitels haben wir noch Wörter $u, v, w \in \Sigma^+$ mit $u_1 u_2 <_{\mathrm{p}} v_1 v_2 <_{\mathrm{p}} w_1 w_2$ für $u_1, u_2 \in \{\, u, \theta(u) \,\}$, $v_1, v_2 \in \{\, v, \theta(v) \,\}$ und $w_1, w_2 \in \{\, w, \theta(w) \,\}$ betrachtet. Unter der

Voraussetzung u ist ein θ–primitives Wort, haben wir $|u| + |v| \leq |w|$ gefolgert.

Gilt $u^\ell = v^m w^n$ für Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ und Zahlen $\ell, m, n \geq 2$, so sind die Wörter u, v, w Potenzen eines Wortes $\alpha \in \Sigma^+$. In Kapitel 6 haben wir diese Aussage von Lyndon und Schützenberger auf morphe Involutionen erweitert. Die folgende Aussage ist dabei das Hauptresultat. Sei θ eine morphe Involution, $u, v, w \in \Sigma^+$ nichtleere Wörter und $\ell, m, n \geq 2$ natürliche Zahlen. Gilt für Wörter $u_1, \ldots, u_\ell \in \{ u, \theta(u) \}$, $v_1, \ldots, v_m \in \{ v, \theta(v) \}$ sowie $w_1, \ldots, w_n \in \{ w, \theta(w) \}$ die Aussage $u_1 \ldots u_\ell = v_1 \ldots v_m \, w_1 \ldots w_n$, so existiert ein Wort $\alpha \in \Sigma^+$ mit $u, v, w \in \{ \alpha, \theta(\alpha) \}^*$.

Eine lineare Ordnung $\lhd$ auf dem Alphabet Σ, bzw. die daraus auf Σ^* induzierte lexikographische Ordnung, kann ein Hilfsmittel sein, um im Bereich Kombinatorik auf Wörtern Aussagen zu beweisen. Für Wörter unter Involution ist dieses Werkzeug aber zunächst wenig geeignet, weshalb wir in Kapitel 7 neue Ordnungen $\lhd_\psi$ und $\lhd_\chi$ definiert haben. Die Ordnung $\lhd_\psi$ haben wir mit Hilfe einer Substitutionsabbildung ψ durch $u \lhd_\psi v :\Leftrightarrow \psi(u) \lhd \psi(v)$ definiert. Diese Ordnung eignet sich vor allem zur Betrachtung von schwachen θ–Perioden. Die Ordnung $\lhd_\chi$ eignet sich hingegen besser für alternierende θ–Perioden. Für die Definition dieser Ordnung haben wir zunächst die Funktion $\chi : \Sigma^* \to \Sigma^*$ definiert, durch $\chi(w) = w$ falls $\theta(w) \lhd w$ und $\chi(w) = \theta(w)$ sonst. Mit Hilfe dieser Abbildung ergibt sich die Ordnung $\lhd_\chi$ durch $u \lhd_\chi v :\Leftrightarrow \chi(u) \lhd \chi(v)$. Für beide neu definierten Ordnungen haben wir wichtige Eigenschaften, die bei einer linearen Ordnung auf Wörtern ohne Involution gelten, gezeigt.

Im 8. Kapitel haben wir Muster unter morphen und antimorphen Involutionen betrachtet. Wir haben untersucht, ob ein Wort $w \in \Sigma^+$ existiert, das ein Muster, wie beispielsweise $\alpha\theta(\alpha)\alpha$, für alle morphen (oder antimorphen) Involutionen vermeidet. Wir haben hierzu die Begriffe morphen und antimorphen θ–Vermeidbarkeitsindex eingeführt. Eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ heißt morpher θ–Vermeidbarkeitsindex $\mathcal{V}_{\mathrm{m}}^{\theta}(e)$ eines Musters $e \in E^*$, falls ein unendlich langes Wort $w \in \Sigma^\omega$ über einem k–elementigen Alphabet Σ existiert, das e für alle morphen Involutionen $\Sigma^* \to \Sigma^*$ vermeidet und k minimal ist. Der antimorphe θ–Vermeidbarkeitsindex $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}^{\theta}(e)$ wurde analog definiert. Für die Muster $\alpha\alpha\theta(\alpha), \alpha\theta(\alpha)\alpha, \alpha\theta(\alpha)\theta(\alpha), \theta(\alpha)\alpha\alpha, \theta(\alpha)\alpha\theta(\alpha), \theta(\alpha)\theta(\alpha)\alpha$ haben wir gezeigt, dass sie den morphen und antimorphen θ–Vermeidbarkeitsindex 3 besitzen.

Literaturverzeichnis

[1] Appel, Kenneth I. ; Djorup, Frans M.: On the equation $z_1^n z_2^n \dots z_k^n = y_n$ in a free semigroup. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 134 (1968), S. 461–470 54

[2] Berstel, Jean ; Karhumäki, Juhani: Combinatorics on words—A Tutorial. In: *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS* 79 (2003), S. 178–228 18, 21, 23

[3] Bundschuh, Peter: *Einführung in die Zahlentheorie*. Springer–Verlag, 2008 26

[4] Crochemore, Maxime ; Rytter, Wojciech: Sqares, Cubes, and Time-Space Efficient String Searching. In: *Algorithmica* 13 (1995), Nr. 5, S. 405–425 48

[5] Czeizler, Elena ; Czeizler, Eugen ; Kari, Lila ; Seki, Shinnosuke: An Extension of the Lyndon Schützenberger Result to Pseudoperiodic Words. In: *Developments in Language Theory*, 2009, S. 183–194 6, 53

[6] Czeizler, Elena ; Kari, Lila ; Seki, Shinnosuke: On a special class of primitive words. In: *Theor. Comput. Sci.* 411 (2010), Nr. 3, S. 617–630 6, 29, 74

[7] Halava, Vesa ; Harju, Tero ; Ilie, Lucian: Periods and binary words. In: *J. Comb. Theory Ser. A* 89 (2000), Nr. 2, S. 298–303 29

[8] Harju, Tero ; Nowotka, Dirk: Density of critical factorizations. In: *Theor. Inform. Appl* 36 (2002), S. 2002 33, 34, 57

[9] Harju, Tero ; Nowotka, Dirk: On the equation $a^M = b^N c^P$ in a free semigroup. In: *Theor. Comput. Sci.* 330 (2005), Nr. 1, S. 117–121 53

[10] Harju, Tero ; Nowotka, Dirk: On the equation $x^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}$ in a free semigroup. In: *Theor. Comput. Sci.* 330 (2005), Nr. 1, S. 117–121 45, 54

[11] Harju, Tero ; Nowotka, Dirk: On unique factorizations of primitive words. In: *Theor. Comput. Sci.* 356 (2006), Nr. 1, S. 186–189

[12] Holub, Stepan ; Nowotka, Dirk: The Ehrenfeucht-Silberger Problem. In: *ICALP (1)*, 2009, S. 537–548 6, 40, 74

[13] Kari, Lila ; Mahalingam, Kalpana: Involutively Bordered Words. In: *Int. J. Found. Comput. Sci.* 18 (2007), Nr. 5, S. 1089–1106 11, 14, 16, 17

[14] Kari, Lila ; Mahalingam, Kalpana: Watson-Crick conjugate and commutative words. In: *DNA13'07: Proceedings of the 13th international conference on DNA*

computing, 2008, S. 273–283 15

[15] Kari, Lila ; Mahalingam, Kalpana: Watson-Crick palindromes in DNA computing. In: *Natural Computing* 9 (2010), Juni, Nr. 2, S. 297–316 15, 16

[16] Kari, Lila ; Seki, Shinnosuke: An improved bound for an extension of Fine and Wilf's theorem and its optimality. In: *Fundamenta Informaticae* 101 (2010), Nr. 3, S. 215–236 6, 29, 74

[17] Lentin, Andre: Sur l'équation $a^M = b^N c^P d^Q$ dans un monoid libre. In: *C. R. Acad. Sci.* 260 (1965), S. 3242–3244 54

[18] Lothaire, M.: *Combinatorics on Words.* 2. Cambridge University Press, 1997 33, 34

[19] Lothaire, M.: *Algebraic Combinatorics on Words.* 1. Cambridge University Press, 2002 48, 49, 51, 63, 66

[20] Lyndon, Roger C. ; Schützenberger, Marcel-Paul: The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group. In: *Mich. Math. J.* 9 (1962), S. 289–298 14, 53

[21] Seki, Shinnosuke: *DNA Watson-Crick complementarity in computer science*, University of Western Ontario, Diss., August 2010 6, 29, 53, 74

Anhang A

Quellcode

Listing A.1: Das Programm zeigt, dass ein spezielles Wort $w \in \Sigma^\omega$ das Muster $\alpha\theta(\alpha)\alpha$ für keine morphe Involution θ und Ersetzungen von α durch $u \in \Sigma^+$ mit $|u| < 7$ enthält, sowie, dass ein Wort $w' \in \Sigma^\omega$ das Muster $\alpha\theta(\alpha)\alpha$ für keine antimorphe Involution θ und Ersetzungen von α durch $u \in \Sigma^+$ mit $|u| < 9$ enthält.

```
#include <iostream>
#include <string>
using namespace std;

/*
Funktion ersetzt alle Vorkommen des Strings 'ersetzen_von' im String 'in'
durch 'ersetzen_durch' und gibt den so entstandenen String zurueck
*/
string string_austauschen (string ersetzen_von, string ersetzen_durch,
  string in) {

  int pos;
  while (in.find(ersetzen_von) != -1) {
    pos = in.find(ersetzen_von);
    in.erase(pos, ersetzen_von.length());
    in.insert(pos, ersetzen_durch);
  }
  return in;
}

/*
Die folgenden Funktionen sind die Grundlage fuer die Berechnung
aller morphen und antimorphen Involutionen ueber dem Alphabet {a,b,c}
*/
string theta1(string eingabe){
  if (eingabe=="a")  return "a";
  if (eingabe=="b")  return "b";
    return "c";
}
```

```
30 string theta2(string eingabe){
31   if (eingabe=="a")  return "a";
32   if (eingabe=="b")  return "c";
33     return "b";
34 }
35 string theta3(string eingabe){
36   if (eingabe=="a")  return "b";
37   if (eingabe=="b")  return "a";
38     return "c";
39 }
40 string theta4(string eingabe){
41   if (eingabe=="a")  return "c";
42   if (eingabe=="b")  return "b";
43     return "a";
44 }
45
46 /*
47 Die Funktion prueft, ob der String 'wort' das Muster
48 alpha theta(alpha) alpha enthaelt. Ist der Paramter morph==true,
49 so werden hierbei alle morphen Involutionen betrachtet. Ist der
50 Paramter morph==false, so werden alle antimorphen Involutionen
51 betrachtet. Gibt true zurueck, falls ein Auftreten von
52 alpha theta(alpha) alpha gefunden wurde, sonst wird false zurueck gegeben.
53 */
54 bool enthaeltATAA (string wort, bool morph){
55   string alpha, talpha1, talpha2, talpha3, talpha4;
56   string gesucht1, gesucht2, gesucht3, gesucht4;
57
58   // Durchlaeuft die moeglichen Laengen der Ersetzung von alpha.
59   // Da geprueft werden soll, ob alpha theta(alpha) alpha im
60   // String 'wort' enthalten ist, muss diese Laenge kleinergleich
61   // der Laenge des Strings 'wort' / 3 sein
62   for (int alphaLaenge = 1; alphaLaenge <= wort.length()/3; alphaLaenge++){
63
64     // Durchlaeuft die moeglichen Positionen von alpha
65     for (int pos = 0; pos + 3 * alphaLaenge <= wort.length(); pos++){
66       // Legt das zu betrachtende Wort alpha fest
67       alpha = wort.substr(pos, alphaLaenge);
68       talpha1 = ""; talpha2 = ""; talpha3 = ""; talpha4 = "";
69
70       // Erstellt die Woerter theta(alpha) fuer alle morphen bzw.
71       // fuer alle antimorphen Involutionen
72       if (morph){
73         for (int i = 0; i < alpha.length(); i++){
74           talpha1.append (theta1 (alpha.substr(i,1)) );
75           talpha2.append (theta2 (alpha.substr(i,1)) );
76           talpha3.append (theta3 (alpha.substr(i,1)) );
77           talpha4.append (theta4 (alpha.substr(i,1)) );
78         }
79       }
```

```
80        else{
81          for (int i = alpha.length() - 1; i >= 0 ; i--){
82            talpha1.append (theta1 (alpha.substr(i,1)) );
83            talpha2.append (theta2 (alpha.substr(i,1)) );
84            talpha3.append (theta3 (alpha.substr(i,1)) );
85            talpha4.append (theta4 (alpha.substr(i,1)) );
86          }
87        }
88
89        // Erstellt die Woerter alpha theta(alpha) alpha fuer alle morphen
90        // bzw. fuer alle antimorphen Involutionen
91        gesucht1 = alpha; gesucht1.append(talpha1); gesucht1.append(alpha);
92        gesucht2 = alpha; gesucht2.append(talpha2); gesucht2.append(alpha);
93        gesucht3 = alpha; gesucht3.append(talpha3); gesucht3.append(alpha);
94        gesucht4 = alpha; gesucht4.append(talpha4); gesucht4.append(alpha);
95
96        // Prueft ob fuer eine morphe bzw. antimorphe Involution
97        // alpha theta(alpha) alpha ein Faktor des Strings 'wort' ist
98        if (wort.find(gesucht1) != -1 || wort.find(gesucht2) != -1
99          || wort.find(gesucht3) != -1 || wort.find(gesucht4) != -1){
100
101         return true;
102       }
103     }
104   }
105   return false;
106 }
107
108 /*
109 Erstellt alle moeglichen Woerter ueber den Zeichen 'e','d' mit der
110 Wortlaenge 'wortlaenge'. Die Funktion verwirft diesen String 'wort' und
111 gibt 'false' zurueck, falls 'eee' 'ddd', 'deded' oder 'edede'
112 enthalten sind. Andernfalls werden 'e' und 'd' im String 'wort'
113 abhaengig vom Schalter 'morph' durch Woerter ersetzt.
114 morph==true: Die Funktion prueft, ob der String 'wort' fuer eine
115   morphe Involution theta das Muster alpha theta(alpha) alpha enthaelt.
116 morph==false: Die Funktion prueft, ob der String 'wort' fuer eine
117   antimorphe Involution theta das Muster alpha theta(alpha) alpha enthaelt.
118 Wird alpha theta(alpha) alpha fuer eine Involution gefunden, so wird
119 'true' zurueck gegeben, sonst 'false'.
120 */
121 bool rek(string wort, int wortlaenge, bool morph){
122   if (wortlaenge == wort.length()){
123     if (wort.find("ddd") == -1 && wort.find("eee") == -1
124       && wort.find("deded") == -1 && wort.find("edede") == -1){
125
126       if(morph){
127         wort = string_austauschen("d", "aacb", wort);
128         wort = string_austauschen("e", "accb", wort);
129       }
```

```
130         else{
131           wort = string_austauschen("d", "aabbc", wort);
132           wort = string_austauschen("e", "aaccb", wort);
133         }
134         if(enthaeltATAA(wort, morph)){
135           return true;
136         }
137         else{
138           return false;
139         }
140       }
141       else{
142         return false;
143       }
144     }
145     else
146     {
147       return (rek(wort+"d", wortlaenge, morph)
148         || rek(wort+"e", wortlaenge, morph));
149     }
150 }
151
152
153 int main() {
154   // Aufruf um morphen Fall zu pruefen:
155   if(rek("", 6, true)){
156     cout << "ACHTUNG: alpha theta(alpha) alpha gefunden" << endl;
157   }
158   else{
159     cout << "alpha theta(alpha) alpha fuer keine "
160       << "morphe Involution gefunden" << endl;
161   }
162
163   cout << endl;
164
165   // Aufruf um antimorphen Fall zu pruefen:
166   if(rek("", 6, false)){
167     cout << "ACHTUNG: alpha theta(alpha) alpha gefunden" << endl;
168   }
169   else{
170     cout << "alpha theta(alpha) alpha fuer keine "
171       << "antimorphe Involution gefunden" << endl;
172   }
173 }
```

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit
selbständig verfasst und nur die
angegebenen Quellen benutzt zu haben.

(Bastian Bischoff)