Institut für Parallele und Verteilte Systeme
Abteilung Simulation Großer Systeme
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D–70569 Stuttgart

Studienarbeit Nr. 2156

Vergleich von Adaptionsstrategien für elliptische partielle Differentialgleichungen

Alexander Lauser

Studiengang:	Informatik
Prüfer:	Prof. Dr. Peter Bastian
Betreuer:	Dipl.-Math. Sven Marnach
begonnen am:	23. Januar 2008
beendet am:	24. Juni 2008
CR-Klassifikation:	G.1.0, G.1.2, G.1.8

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Elliptische Gleichungen und die Methode der Finiten Elemente **7**
2.1 Elliptische Gleichungen 7
2.2 Schwache Formulierung 8
2.3 Die Methode der Finiten Elemente 9
2.3.1 Konstruktion und Eigenschaften von Finite-Element-Räumen 9
2.3.2 Approximation in Finite-Element-Räumen 10
2.3.3 Gitterverfeinerung 11

3 Adaptive Lösungsverfahren **15**
3.1 Das Framework 16
3.2 Fehlerschätzer und Fehlerindikatoren 17
3.2.1 Fehlerschätzer in Energienorm 18
3.2.2 Fehlerindikatoren nach Zienkiewicz-Zhu 19
3.2.3 Analytisches Energienormmaß und Energienormindikatoren 20
3.3 Verfeinerungsstrategien 21
3.3.1 Globale Verfeinerung 21
3.3.2 Adaptive Verfeinerungsstrategien 21
3.4 Unterteilungsverfahren 23
3.4.1 Bisektion von Simplizes 24
3.4.2 Reguläre Verfeinerung von Simplizes 25
3.4.3 Reguläre Verfeinerung von Quadrilateralen 26
3.4.4 Abschlussregeln 26

4 Ergebnisse **29**
4.1 Klassifikation der verwendeten Gittermanager 30
4.2 Modellproblem Wellen 31
4.3 Modellproblem Einspringende Ecke 35
4.4 Modellproblem Geschlitzter Würfel 44
4.4.1 Geschlitzter Würfel mit $\varepsilon = 1$ 46
4.5 Modellproblem Schachbrett 54

5 Zusammenfassung und Ausblick **57**

A Gitter **59**

B Notationen **63**

Abbildungsverzeichnis **65**

Literaturverzeichnis **67**

Kapitel 1

Einleitung

Bei der Modellierung physikalischer Vorgänge treten häufig partielle Differentialgleichungen auf, die meist nicht analytisch lösbar sind. Deshalb ist eine numerische Behandlung der Gleichungen unumgänglich, um zumindest näherungsweise eine Lösung zu erhalten und dadurch Rückschlüsse auf das Verhalten des durch die Gleichungen beschriebenen Systems zuzulassen. Das verwendete numerische Verfahren muss dabei zuverlässig und effizient sein, das heißt es muss verlässlich eine numerische Lösung von bestimmter Qualität liefern – und das mit möglichst wenig Zeit- und Speicheraufwand.

In dieser Arbeit wurde ein numerisches Verfahren implementiert, das versucht, diese Ziele zu erreichen, indem die numerische Lösung schrittweise adaptiv an die Merkmale des Problems angepasst wird. Dieses adaptive Verfahren gibt dabei einen Rahmen vor, der durch Vorgabe konkreter Teilbausteine eine Adaptionsstrategie zur Lösung des Problems festlegt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Kombinationen unterschiedlicher Implementierungen dieser Bausteine anhand von vier Modellproblemen verschiedener Regularität miteinander verglichen und bewertet. Die dadurch gewonnenen Ergebnisse können eventuell bei der Wahl einer Adaptionsstrategie für ein gegebenes Problem behilflich sein und dem Entwickler des Verfahrens eine grobe Orientierung bei der Wahl der Module und Parameter geben.

Kapitel 2

Elliptische Gleichungen und die Methode der Finiten Elemente

Viele in der Praxis relevante Probleme lassen sich durch elliptische partielle Differentialgleichungen beschreiben, die wir im nächsten Abschnitt einführen werden. Da für einige Gleichungen diesen Typs analytische Lösungen angegeben werden können, ermöglicht dies den Vergleich verschiedener adaptiver Lösungsstrategien, nicht nur untereinander, sondern auch mit der exakten Lösung.

2.1 Elliptische Gleichungen

Wir nehmen an, dass ein Raumgebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ gegeben ist, in dem das Problem gestellt ist. Wir beschränken uns dabei auf die Fälle $d = 2$ und $d = 3$ und nehmen ferner an, dass Ω offen, zusammenhängend und beschränkt ist und der Rand $\partial\Omega$ in zwei Teile aufgeteilt ist, den *Dirichletrand* Γ_D und den *Neumannrand* Γ_N.

Zu diesem Raumgebiet definieren wir nun die allgemeine *skalare elliptische Randwertaufgabe zweiter Ordnung*, in die sich alle im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Probleme in Kapitel 4 einordnen lassen: Finde $u \in \mathcal{W}$, sodass die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}u := -\nabla\cdot(K\nabla u) &= q \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ -\nu\cdot(K\nabla u) &= J \quad \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{2.1}$$

erfüllt sind, wobei ν die äußere Einheitsnormale an Γ_N bezeichnet. $\mathcal{W} := C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_N) \cap C^0(\Omega \cup \Gamma_D)$ ist der klassische Lösungsraum der in Ω zweimal, auf $\Omega \cup \Gamma_N$ einmal stetig differenzierbaren und auf $\Omega \cup \Gamma_D$ stetigen Funktionen, die auf Γ_D mit g übereinstimmen[1]. Es sind Funktionen $q \in C^0(\overline{\Omega})$, $g \in C^0(\Gamma_D)$, $J \in C^0(\Gamma_N)$, sowie $K \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^{d\times d}$

[1] Die Notation ist dabei der Lesbarkeit halber formal nicht korrekt. Mit der Schreibweise $C^i(\omega)$ für ein $\omega \subset \overline{\Omega}$ sind hier diejenigen Funktionen über $\overline{\Omega}$ gemeint, deren Einschränkung auf ω in ω i-mal stetig differenzierbar sind.

gegeben, wobei $K(x)$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ eine symmetrische, positiv definite $d \times d$-Matrix ist, die mit einer *Elliptizitätskonstanten* $m \in \mathbf{R}$, $m > 0$ und einer *Stetigkeitskonstanten* $M \in \mathbf{R}$ die Abschätzungen

$$m\, y \cdot y \leq y^{\mathsf{T}} K(x) y \leq M\, y \cdot y \quad \text{für alle} \quad y \in \mathbf{R}^d \tag{2.2}$$

unabhängig von x erfüllt. Damit ist der Differentialoperator $\mathcal{D}$ gleichmäßig elliptisch. Ein $u \in \mathcal{W}$, dass die Bedingungen (2.1) erfüllt heißt *klassische Lösung* oder *starke Lösung* des Problems.

Alle in Kapitel 4 betrachteten Probleme unterscheiden sich in der Wahl des Gebietes Ω (in der Dimension, der Aufteilung des Randes und der geometrischen Form), der rechten Seiten q, g und J, sowie der matrixwertigen Funktion K.

2.2 Schwache Formulierung

Im Allgemeinen existiert keine starke Lösung zu Problem (2.1) [Bas08]. Über die korrespondierende *schwache Formulierung* erreichen wir jedoch die eindeutige Existenz einer sogenannten *schwachen Lösung* in einem erweiterten Funktionenraum. Die schwache Formulierung erhält man nach Multiplikation mit einer Testfunktion v und partieller Integration. Für Problem (2.1) lautet sie: Finde $u \in \mathcal{V}$, sodass

$$a(u,v) := \int_\Omega (K\nabla u)\cdot\nabla v = \int_\Omega q\, v - \int_{\Gamma_N} J\, v \quad \text{für alle} \quad v \in \mathcal{V}_0 \tag{2.3}$$

gilt [Alt06, EEHJ96].

$\mathcal{V} := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_{\Gamma_D}(v) = g\}$ ist der *Ansatzraum*, $\mathcal{V}_0 := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_{\Gamma_D}(v) = 0\}$ der *Testraum*, wobei $\gamma_{\Gamma_D}(\bullet)\colon H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_D)$, $v \mapsto \gamma_{\Gamma_D}(v)$, die *Spur* von v auf dem Dirichletrand ist.

An die Parameter der Gleichungen können geringere Anforderungen gestellt werden, so wird nunmehr gefordert, dass $q \in L^2(\Omega)$, $g \in C^0(\Gamma_D)$, $J \in L^2(\Gamma_N)$ und $K \in (L^\infty(\Omega))^{d\times d}$ gilt. Die auftretenden Integrale sind im Lebesgue'schen Sinne zu verstehen, ebenso die Gleichheit zweier Funktionen (die sich hierbei auf einer Nullmenge des Definitionsbereichs unterscheiden dürfen). Außerdem soll K weiterhin Bedingung (2.2) erfüllen. Damit ist $a(u,v)$ eine elliptische Bilinearform und durch $(u,v)_E := a(u,v)$ ist ein Skalarprodukt definiert, welches wiederum die sogenannte *Energienorm*[2] $\|v\|_E := \sqrt{(v,v)_E}$ induziert.

Unter gewissen Voraussetzungen an den Rand $\partial\Omega$ des Gebiets und der zusätzlichen Forderung, dass Γ_D keine Nullmenge in $\partial\Omega$ ist, gibt es dann nach dem Satz von Lax-Milgram eine eindeutige Lösung u in $\mathcal{V}$ zu Problem (2.3) [Alt06]. Diese nennen wir *schwache Lösung* des ursprünglichen Problems (2.1).

[2] Bei vielen physikalisch motivierten Problemen misst diese Norm die Energie einer Funktion, daher der Name.

2.3 Die Methode der Finiten Elemente

Die Methode der Finiten Elemente ist ein Spezialfall des Galerkin-Verfahrens, das direkt auf der schwachen Formulierung aufsetzt. Die Idee dabei ist, Gleichung (2.3) nicht im unendlichdimensionalen Raum $\mathcal{V}$ zu lösen, sondern in einem endlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{S}$.

Das Finite-Element-Verfahren zeichnet sich durch eine spezielle Wahl des Raumes $\mathcal{S}$ aus. Das Gebiet Ω wird dazu zunächst in Teilgebiete einfacher Form zerlegt (zum Beispiel Dreiecke, Vierecke, Tetraeder oder Hexaeder). Funktionen in $\mathcal{S}$ werden dann auf jedem dieser Elemente als Polynome mit maximalem Grad t angesetzt. Wir nennen die Funktionen deshalb auch *stückweise polynomial* oder *elementweise polynomial*. Einen Funktionenraum $\mathcal{S}$, der durch diese Methode erzeugt wird, nennen wir *Finite-Element-Raum*.

Die Zerlegung des Gebietes wird durch sogenannte Gitter bewerkstelligt, die wir in Anhang A einführen. Darauf aufbauend beschreiben wir nun die Konstruktion eines Finite-Element-Raumes mittels elementweise polynomialem Ansatz.

2.3.1 Konstruktion und Eigenschaften von Finite-Element-Räumen

Im Folgenden sei eine Zerlegung des Gebietes durch ein Gitter $\mathcal{T}$ gegeben. Wir wollen den stückweise polynomialen Ansatz etwas formaler fassen. Für Funktionen $f \in \mathcal{S}$ wählen wir den Ansatz $f|_T \in \mathcal{P}_t(T)$ für alle Elemente $T \in \mathcal{T}$. Dabei ist

$$\mathcal{P}_t(X) \coloneqq \{u\colon X \to \mathbf{R} \mid u(x) = \sum_{|\mu| \leq t} c_\mu x^\mu,\ x \in X,\ c_\mu \in \mathbf{R}\} \quad \text{für simpliziales } \mathcal{T},$$
$$\mathcal{P}_t(X) \coloneqq \{u\colon X \to \mathbf{R} \mid u(x) = \sum_{\mu_i \leq t} c_\mu x^\mu,\ x \in X,\ c_\mu \in \mathbf{R}\} \quad \text{für quadrilaterales } \mathcal{T},$$

wobei $\mu \in \mathbf{N}^d$ einen *Multiindex* bezeichnet. Wir nennen t die *Ordnung* des Finite-Element-Raumes. Funktionen $f \in \mathcal{S}$ heißen *Finite Elemente*. Finite Elemente der Ordnung eins nennen wir *linear*.

Die Funktionen $f \in \mathcal{S}$ sind nur im Inneren der Elemente $T \in \mathcal{T}$ definiert. Wir definieren die *stetige Fortsetzung* von $f|_T\colon T \to \mathbf{R}$ auf den Rand des Elements T als $\gamma_T(f)\colon \overline{T} \to \mathbf{R}$. Man beachte, dass für zwei benachbarte Elemente T und T' mit $\kappa \coloneqq \overline{T} \cap \overline{T'}$ durchaus $\gamma_T(f)|_\kappa \neq \gamma_{T'}(f)|_\kappa$ gelten kann, da keine globale Stetigkeit angenommen wurde; f kann also über eine Elementberandung einen Sprung haben.

Gibt es keine Funktion $f \in \mathcal{S}$, die einen Sprung auf einer Elementberandung hat, das heißt es gilt $\gamma_T(f)|_\kappa = \gamma_{T'}(f)|_\kappa$ für alle $T, T' \in \mathcal{T}$ und $\kappa \coloneqq \overline{T} \cap \overline{T'}$, dann gibt es eine eindeutige, global stetige Fortsetzung von f auf ganz $\overline{\Omega}$, die wir mit $\gamma(f)$ bezeichnen. In diesem Fall sagen wir auch f sei global stetig oder ein C^0-Element und identifizieren in dieser Sprechweise die Funktion mit ihrer global stetigen Fortsetzung. Den Raum der global stetig fortgesetzten Finite-Element-Funktionen bezeichnen wir dann mit $\gamma(\mathcal{S}) \coloneqq \{\gamma(f) \mid f \in \mathcal{S}\}$. Es gilt $\gamma(\mathcal{S}) \subset C^0(\overline{\Omega})$. Ist weiterhin $\gamma(\mathcal{S}) \subset C^i(\overline{\Omega})$ für ein $i \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, dann nennen wir die Funktionen in diesem Raum *global i-mal stetig differenzierbar*. Dies soll den globalen Charakter

der Aussage unterstreichen, da aufgrund des elementweise polynomialen Ansatzes klar ist, dass die Funktionen in jedem Element beliebig oft differenzierbar sind – aber eben nicht notwendigerweise auf Elementkanten.

Konforme Finite-Element-Räume In dieser Arbeit werden wir ausnahmslos global stetige, lineare Finite Elemente verwenden. Es lässt sich zeigen, dass dieser Ansatz zu *konformen* Finite-Element-Räumen $\mathcal{S}$ führt, das heißt es gilt $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ (siehe [Baso8]). Dabei ist $\mathcal{V}$ der zum Problem passende Funktionenraum in (2.3). Außerdem identifizieren wir den Raum der global stetigen Fortsetzungen $\gamma(\mathcal{S})$ mit dem ursprünglichen Raum $\mathcal{S}$, um die Notation einfach zu halten.

In der Praxis werden lineare Finite Elemente durch Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbf{R}$ zur *Knotenbasis* des Raumes $\mathcal{S}$ dargestellt. Die Basisfunktion ψ_j zu Knoten j ist dann diejenige lineare Funktion $\psi_j \in \mathcal{S}$, für die $\psi_j(x_i) = \delta_{j,i}$ für alle Knoten x_i gilt. $\delta_{j,i}$ ist dabei das Kroneckerdelta mit $\delta_{j,i} = 1$ für $j = i$ und $\delta_{j,i} = 0$ sonst. Das Finite Element $f \in \mathcal{S}$ lässt sich in dieser Basis dann als Linearkombination

$$f(x) = \sum_j \alpha_j \psi_j(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{\Omega} \tag{2.4}$$

schreiben, siehe Abbildung 2.1. Dadurch gilt $f(x_j) = \alpha_j$ für alle Knoten x_j. Durch die global stetige Wahl der Basisfunktionen ist die globale Stetigkeit von f sichergestellt. Dabei sind nicht alle α_j unbekannt: Liegt $x_j \in \Gamma_D$ auf dem Dirichletrand, so ist $\alpha_j = g(x_j)$ durch die Vorgabe des Randwertes festgelegt. Aber auch die verbleibenden Knoten sind eventuell nicht linear unabhängig (dies tritt ein, wenn es hängende Knoten gibt, siehe dazu Abschnitt 3.4.4).

2.3.2 Approximation in Finite-Element-Räumen

Das zu Problem (2.3) korresponierende endlichdimensionale Problem lautet dann: Finde $\tilde{u} \in \mathcal{S}_g$, sodass

$$a(\tilde{u}, v) = \int_\Omega (K\nabla\tilde{u})\cdot\nabla v = \int_\Omega q\, v - \int_{\Gamma_N} J\, v \quad \text{für alle} \quad v \in \mathcal{S}_0 \tag{2.5}$$

gilt. $\mathcal{S}_g := \{v \in \mathcal{S} \mid v(x_i) = g(x_i) \text{ für alle Knoten } x_i \in \Gamma_D\}$ ist der Raum aller Funktionen aus $\mathcal{S}$, die auf den Knoten auf dem Dirichletrand mit g übereinstimmen. $\mathcal{S}_0$ ist der analog dazu definierte Unterraum von $\mathcal{S}$ derjenigen Funktionen, die auf den Dirichletknoten verschwinden.

Durch Einsetzen des Basisansatzes (2.4) für $\mathcal{S}_g$ in Gleichung (2.5) und Testen mit der Basis von $\mathcal{S}_0$, erhalten wir ein äquivalentes lineares Gleichungssystem

$$Ax = b, \tag{2.6}$$

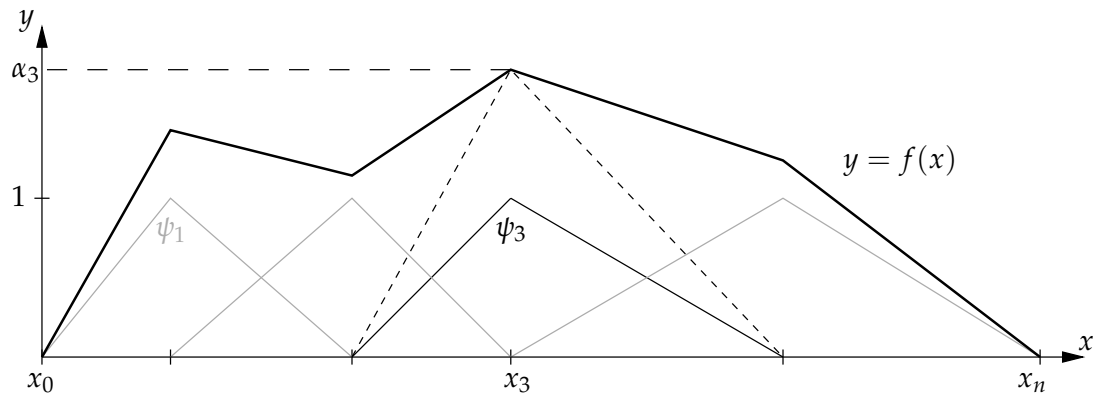


Abbildung 2.1: Illustration der Knotenbasis und einer Funktion $f(x)$ mit Dirichlet-0-Randbedingungen, die in dieser Basis als Linearkombination geschrieben ist, für ein eindimensionales Gitter. Für den Knoten x_3 ist die Basisfunktion ψ_3 als dünner, durchgezogener Linienzug dargestellt und der Wert des Koeffizienten α_3 in der Linearkombination an der y-Achse abgetragen. Der korrespondierende Term $\alpha_3\psi_3$ der Linearkombination ist als dünner, kurz gestrichelter Linienzug dargestellt.

wobei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbf{R}^n$ und $x \in \mathbf{R}^n$ mit

$$A_{i,j} \coloneqq \int_\Omega (K\nabla\psi_j)\cdot\nabla\psi_i \quad , \quad b_i \coloneqq \int_\Omega q\,\psi_i - \int_{\Gamma_N} J\,\psi_i \tag{2.7}$$

und $x_j \coloneqq \alpha_j$ für $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt. Die Dimension n des linearen Gleichungssystems entspricht der Anzahl an Freiheitsgraden $|\mathrm{FG}|$, also der Anzahl aller Knoten, die nicht hängend sind und nicht auf dem Dirichletrand liegen (siehe Anhang A). Bei dieser Formulierung wird angenommen, dass die Knoten $x_i \in \mathrm{FG}$ von 1 bis n nummeriert sind.

Bei Verwendung eines Mehrgitterverfahrens ist ein Zeitaufwand zum Lösen von Gleichung (2.6) in $\mathcal{O}(n)$ möglich. Zum Gesamtaufwand kommt noch die Zeit zum Aufstellen der Matrix A und der rechten Seite b hinzu. Die dabei auftretenden Integrale werden durch numerische Quadratur approximiert, für diese Arbeit wurde eine Gauß-Quadratur zweiter Ordnung verwendet. Abstrakt gesehen versuchen adaptive Verfahren eine möglichst gute Näherung bei möglichst kleinem n zu erreichen, um diesen Aufwand zu minimieren.

2.3.3 Gitterverfeinerung

Damit ein numerisches Approximationsverfahren sinnvoll ist, sollte es gegen die exakte Lösung konvergieren. Um diese Aussage für die Finite-Element-Methode formalisieren zu können führen wir zunächst ein paar Notationen ein: Wir schreiben $\mathcal{S}_h$ für einen

Finite-Element-Raum, falls h der Diskretisierungsparameter des Gitters des Finite-Element-Raumes ist (siehe Anhang A). Wir betrachten nun nicht mehr nur einen Finite-Element-Raum $\mathcal{S}$, sondern eine Folge von geschachtelten Finite-Element-Räumen

$$\mathcal{S}_{h_1} \subset \mathcal{S}_{h_2} \subset \cdots \mathcal{S}_{h_i} \subset \cdots \text{ , } i \in \mathbf{N}, \tag{2.8}$$

wobei die Folge $(h_i)_{i\in\mathbf{N}}$ der zugehörigen Gitterweiten eine monoton fallende Nullfolge ist, das heißt es gilt $h_i \leq h_j$ für $i > j$ und $\lim_{i\to\infty} h_i = 0$. Für die Finite-Element-Approximation im Raum $\mathcal{S}_{h_i}$ schreiben wir dann u_i.

Mit diesen Bezeichnungen ist die Finite-Element-Methode konvergent, falls $\lim_{i\to\infty} u_i = u$ in $\mathcal{V}$ gilt. Falls also die Gitterweite beliebig klein wird (und damit die Dimension n des approximativen Problems und der Aufwand zum Lösen beliebig groß wird), muss sich die Approximation der exakten Lösung beliebig annähern lassen.

Die Folge der geschachtelten Räume S_{h_i} wird über eine Hierarchie von Gittern $\mathcal{T}_i$ erzeugt. Dabei wird ausgehend von einem vorgegebenen gröbsten Gitter $\mathcal{T}_0$ in jedem Schritt eine Teilmenge der Elemente unterteilt und die restlichen Elemente werden unverändert in das feinere Gitter übernommen. Bei diesem Vorgehen ist insbesondere sichergestellt, dass jeder Knoten des gröberen Gitters auch ein Knoten des feineren Gitters ist. Mit ein wenig Umsicht bei eventuell entstehenden hängenden Knoten (siehe dazu Abschnitt 3.4.4) führt dieser Ansatz dann automatisch zu geschachtelten konformen Finite-Element-Räumen $S_{h_i} \subset S_{h_{i+1}} \subset \mathcal{V}$ für alle $i \in \mathbf{N}$. Verfahren, wie die ausgewählten Elemente unterteilt werden und was dabei insbesondere für hängende Knoten zu beachten ist, werden wir im nächsten Kapitel über adaptive Lösungsverfahren in Abschnitt 3.4 erläutern.

Ein Vorteil der Forderung $S_{h_i} \subset S_{h_{i+1}}$ ist, dass sich aufbauend auf der zugrunde liegenden Gitterhierarchie relativ einfach schnelle Löser wie das Mehrgitterverfahren für die aus der Finite-Element-Methode resultierenden linearen Gleichungssysteme implementieren lassen [Bas94]. An dieser Stelle wollen wir erwähnen, dass es durchaus andere Ansätze gibt, die diese Annahme nicht treffen. Dadurch wird der Aufwand zur Implementierung eines Mehrgitterverfahrens aber zumindest erheblich erhöht.

Das adaptive Verfahren, wie es im Rahmen dieser Arbeit implementiert ist und im nächsten Kapitel detailliert beschrieben wird, versucht die Gitterweite nun nicht global gleichmäßig über das ganze Gitter zu verkleinern, sondern die Gitterweite lokal so anzupassen, dass dadurch der Fehler am meisten reduziert wird. Das Ziel ist es, eine höhere Konvergenzordnung zu erreichen als bei gleichmäßiger globaler Verkleinerung. Details klären wir im folgenden Kapitel.

Des Weiteren wollen wir feststellen, dass die Verkleinerung der Gitterweite nicht die einzige Möglichkeit ist, eine bessere numerische Approximation zu erhalten. Zum Beispiel besteht die Möglichkeit, die Ordnung des Finite-Element-Raumes zu erhöhen. Dadurch vergrößert sich die Dimension. Es sind dann mehr Freiheitsgrade als pro Knoten ein Koeffizient zu spezifizieren; für einen Überblick über verschiedene Ansätze siehe [Bra03]. Dies funktioniert im Allgemeinen allerdings nur, falls die exakte Lösung genügend regulär bezüglich des gewünschten Fehlermaßes ist. In der Praxis beschränkt sich eine „Irregularität“ der Lösung jedoch meist auf einen kleinen Teil des Gebietes, zum Beispiel auf eine Nullmenge wie

endlich viele Punkte oder eine Kante. Dies führt zur Idee der *hp-Methode*. Dieses adaptive Verfahren versucht Teilgebiete hoher Regularität zu bestimmen, um dort *lokal* die Ordnung des Ansatzes zu erhöhen. Auf dem restlichen Gebiet wird das Gitter verfeinert.

Kapitel 3

Adaptive Lösungsverfahren

Um partielle Differentialgleichungen effizient zu lösen, kommen adaptive Verfahren zum Einsatz. Das Ziel ist es, mit möglichst wenig Aufwand eine numerische Approximation der Lösung eines gegebenen Problems so zu finden, dass der Fehler in einem vorgegebenem Maß eine bestimmte Schranke unterschreitet. Im Folgenden werden wir diese obere Schranke *Toleranz* oder *Genauigkeit* nennen und in Formelzeichen TOL schreiben. An dieser Stelle merken wir an, dass im Rahmen dieser Arbeit grundsätzlich der Diskretisierungsfehler gemeint ist, wenn von „dem Fehler“ die Rede ist. Andere Fehlerquellen, etwa durch ein vereinfachtes Modell, Ungenauigkeiten in den Daten (zum Beispiel der rechten Seite f) oder bei der numerischen Lösung der auftretenden Gleichungssysteme, werden im Rahmen dieser Abhandlung nicht betrachtet. Für eine genauere Diskussion der unterschiedlichen Fehlerquellen sei auf [EEHJ96] verwiesen.

Es ist bekannt, dass es optimal ist, ein Gitter zu finden, sodass der Fehler gleichmäßig über das ganze Gitter verteilt wird, jedes Element also einen gleich großen Anteil zum Fehler im betrachteten Maß beiträgt (siehe [EEHJ96], [BR03], sowie [Rano8]). Formal bedeutet dies, dass ein Gitter $\mathcal{T}$ gesucht ist, für das

$$\|e\|_T \approx \frac{\mathrm{TOL}}{N} \quad \text{für alle} \quad T \in \mathcal{T} \tag{3.1}$$

gilt. Dabei bezeichnet e den *Fehler* der numerischen Approximation, $\|\bullet\|$ ein vorgegebenes Maß, in dem der Fehler gemessen werden soll und N die Anzahl der Elemente in $\mathcal{T}$. Der Index T des Maßes bedeutet das Maß des Fehlers auf dem Element T. Wir nennen Gleichung (3.1) auch *Äquilibrierungsbedingung*.

An Gleichung (3.1) sehen wir, dass ein solches Gitter im Allgemeinen nicht einfach analytisch berechnet werden kann, da sowohl die linke Seite – über die Wahl der Elemente –, als auch die rechte Seite – über die Anzahl der Elemente – vom Gitter abhängen, das es ja zu bestimmen gilt.

Adaptive Verfahren versuchen dieses Ziel durch einen iterativen Prozess zu erreichen, indem das Gitter Schritt für Schritt adaptiv an die Struktur der exakten Lösung angepasst wird.

3.1 Das Framework

In dieser Arbeit werden wir den Ansatz verfolgen, das Gitter durch sukzessives Unterteilen von Elementen zu verfeinern, um den Fehler so möglichst schnell zu verringern. Dazu nehmen wir an, dass bekannt ist, in welchem Maß der Fehler gemessen wird und welche Toleranz gewünscht ist.

Es wird dabei ausgehend von einem anfänglichen *Grobgitter* jeweils auf dem aktuellen Gitter eine numerische Approximation berechnet. Diese wird dann benutzt, um a posteriori den Fehler in dem gegebenen Maß abzuschätzen. Falls das Ziel auf dem aktuellen Gitter erreicht wurde, wird die aktuelle numerische Approximation auf dem zugehörigen Gitter angenommen und der Algorithmus beendet. Falls das Ziel nicht erreicht wurde, wird eine Teilmenge aller Elemente bestimmt, die anschließend unterteilt werden. Auf dem resultierenden feineren Gitter wird der Prozess dann so lange wiederholt, bis das Ziel erreicht wird.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es neben diesem Ansatz auch noch andere gibt. Ein Beispiel ist, eine sogenannte Gitterdichtefunktion zu bestimmen, die dann verwendet wird, um ein neues Gitter zu erzeugen, das nicht auf das aktuelle Gitter aufbaut, siehe dazu [EEHJ96].

In Algorithmus 3.1 ist in Pseudocode beschrieben, wie dieses Verfahren prinzipiell implementiert werden kann. Dabei bezeichnen $\mathcal{T}_k$, u_k und e_k das Gitter, die numerische Approximation und den Fehler jeweils im k-ten Schritt.

Algorithmus 3.1 Adaptive Lösung von Differentialgleichungen

Gegeben
  Ein grobes Anfangsgitter $\mathcal{T}_0$ zu Ω
  Ein Fehlermaß $\|\bullet\|$
  Eine Fehlertoleranz TOL $\in \mathbf{R}$
$k \leftarrow 0$
loop
  Berechne numerische Approximation u_k auf aktuellem Gitter $\mathcal{T}_k$
  Schätze Fehlermaß $\|e_k\|$ ab
  if $\|e_k\| \leq$ TOL **then**
    return $(\mathcal{T}_k, u_k)$
  else
    Wähle Menge von Elementen $\tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}_k$ zur Unterteilung
    Verfeinere $\mathcal{T}_k$ auf Basis von $\tilde{\mathcal{T}}$ zu $\mathcal{T}_{k+1}$
  end if
  $k \leftarrow k + 1$
end loop

Um ein konkretes, implementierbares Verfahren zu erhalten müssen die in Algorithmus 3.1 umgangssprachlich beschriebenen Bauteile spezifiziert werden. Die Berechnung der approximativen Lösung u_k ist vom Problem und der gewählten Diskretisierung abhängig. Hier

werden wir annehmen, dass diese durch das Verfahren der Finiten Elemente mit linearen Elementen bestimmt wird und die Lösung des zugehörigen linearen Gleichungssystems für die folgenden Schritte hinreichend genau ist.

Um bestimmen zu können, ob das Ziel erreicht wurde, muss ein Fehlermaß und ein Verfahren angegeben werden, wie mit Hilfe von u_k eine Abschätzung für dieses Fehlermaß berechnet werden kann. Dieses Verfahren nennen wir *Fehlerschätzer*. Die verschiedenen Fehlerschätzer werden in Abschnitt 3.2 behandelt.

Als Nächstes muss man auf Basis von u_k eine Teilmenge $\tilde{\mathcal{T}}$ aller Elemente im Gitter $\mathcal{T}_k$ auswählen, die es zu unterteilen gilt. Dazu wird pro Element ein sogenannter *Fehlerindikator* berechnet, der angibt, wie groß der Beitrag dieses Elements zum gesamten Fehler von u_k ist. Darauf aufbauend entscheidet eine *Verfeinerungsstrategie*, welche Elemente unterteilt werden. Fehlerindikatoren werden im Rahmen der Fehlerschätzer in Abschnitt 3.2 behandelt, da diese beiden Themen große Überschneidungen haben. Verschiedene Verfeinerungsstrategien werden in Abschnitt 3.3 behandelt.

Schließlich muss noch angegeben werden, wie die ausgewählten Elemente zu unterteilen sind, um das nächst feinere Gitter zu erhalten. Einige Möglichkeiten, dies zu tun, werden in Abschnitt 3.4 besprochen.

3.2 Fehlerschätzer und Fehlerindikatoren

Zunächst wenden wir uns den Fehlerschätzern und -indikatoren zu. Wir betrachten in dieser Arbeit *explizite Schätzer*. Diese versuchen unmittelbar aus den Gleichungsparametern und der berechneten Näherungslösung u_k die Güte der Approximation zu bestimmen, etwa über das Residuum. Oft setzen diese Schätzer auf *a posteriori* Abschätzungen auf, etwa der Energienormschätzer in Unterabschnitt 3.2.1. In Konvergenzbeweisen werden dagegen oft *a priori* Resultate gezeigt. Diese schätzen die Güte einer Näherung *a priori*, das heißt ohne Kenntnis der Näherungslösung u_k, in Abhängigkeit des Diskretisierungsparameters h ab. Dabei werden höhere Ableitungen von u verwendet, die jedoch unbekannt sind und deshalb weiter abgeschätzt werden müssen. Dies kann zu einer groben Überschätzung des Fehlers führen und macht diese Resultate für den Zweck der Fehlerschätzer unbrauchbar. Der Indikator nach Zienkiewicz und Zhu in Unterabschnitt 3.2.2 ist im Gegensatz zum Energienormschätzer rein heuristisch motiviert, liefert aber dennoch oft akzeptable Resultate.

Implizite Schätzer lösen hingegen für jedes Element des Gitters lokal, das heißt auf dem Element oder in einer kleinen Nachbarschaft davon, ein einfaches Problem und versuchen darüber Rückschlüsse auf die Güte von u_k zu ziehen. Für einen Überblick sei auf [Bra03] verwiesen.

Einen anderen Ansatz verfolgen *duale Schätzer*. Es wird das globale, sogenannte duale Problem (approximativ) gelöst. Mit Hilfe der Lösung des dualen Problems werden dann pro Element Faktoren berechnet, die angeben, wie groß der Beitrag des Elements zum Gesamtfehler ist. Dieses Konzept ist sehr allgemein, das Fehlermaß darf ein beliebiges

lineares Funktional sein, außerdem wird für jedes Element ein Einflussfaktor berechnet, der angibt, wie groß der Beitrag des Elements zum Fehler ist [BR03, Ran08, AO00, Ver96]. Der Fehler, der auf einem Element gemessen wird, muss nicht zwangsläufig innerhalb dieses Elements entstanden sein. Beispielsweise kann der Fehler bei parabolischen Gleichungen durch konvektive Strömungen transportiert werden und eine Verfeinerung des Gitters an der Stelle dieses Fehleranteils würde nicht die gewünschte Fehlerreduktion nach sich ziehen. Ein großer Nachteil dieser dualen Schätzer ist jedoch der nicht unerhebliche Aufwand: Es muss pro Iteration ein globales Problem gelöst werden, das je nach gegebenem Problem, in etwa denselben Rechen- und Speicherbedarf hat wie das ursprüngliche Problem. Bei den hier betrachteten elliptischen Gleichungen fällt dieser Punkt allerdings sowieso nicht allzu sehr ins Gewicht, da bei diesem Typ aufgrund der stark glättenden Eigenschaften der Fehler tatsächlich dort gemessen wird, wo er entsteht – zumindest bei den hier betrachteten Fehlermaßen.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ die analytische Lösung der partiellen Differentialgleichung und mit $e_k\colon \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto u(x) - u_k(x)$ den Fehler der numerischen Approximation u_k im k-ten Schritt. Man beachte, dass dabei die Finite-Elemente-Näherung mit ihrer global stetigen Fortsetzung auf die Elementberandungen identifiziert ist, wie in Abschnitt 2.3.1 vermerkt.

3.2.1 Fehlerschätzer in Energienorm

Ein kanonisches Maß für den globalen Fehler ist der Fehler in der in Abschnitt 2.2 eingeführten Energienorm, die gegeben ist als

$$\|v\|_{\mathrm{E}}^2 \coloneqq \int_\Omega (K\nabla v)\cdot\nabla v. \tag{3.2}$$

Den Fehler gemessen in der Energienorm $\|e_k\|_{\mathrm{E}}$ nennen wir *Energienormfehler*.

In [Bas08] wird eine a posteriori berechenbare obere Schranke für den Energienormfehler für das Problem 2.3 hergeleitet. Dort wird gezeigt, dass gilt

$$\|e_k\|_{\mathrm{E}}^2 \leq \eta_{\mathrm{EE}}^2 \coloneqq \frac{M}{m} \sum_{T\in\mathcal{T}_k} \eta_{\mathrm{EE},T}^2 \ , \tag{3.3}$$

wobei M die Stetigkeitskonstante und m die Elliptizitätskonstante in Gleichung (2.2) ist. Weiterhin lassen sich die $\eta_{\mathrm{EE},T}$ in Gleichung (3.3) durch

$$\eta_{\mathrm{EE},T} = h_T \left\|q + \nabla\cdot K\nabla u_k\right\|_{0,T} + \frac{1}{2} h_T^{\frac{1}{2}} \left\|[K\nabla u_k\cdot\nu]_{\partial T}\right\|_{0,\partial T\setminus\Gamma_{\mathrm{D}}} \tag{3.4}$$

berechnen. Dabei bezeichnet $h_T \coloneqq \operatorname{diam}(T)$ der Durchmesser von T (siehe Anhang A), $[K\nabla\bullet\cdot\nu]_{\partial T}\colon \partial T \to \mathbf{R}$, $v \mapsto [K\nabla v\cdot\nu]_{\partial T}$ den *Sprung* des Flusses $K\nabla v$ über die Elementberandung ∂T, sowie $\nu\colon \partial T \to \mathbf{R}^d$ die auf ∂T fast überall definierte äußere Einheitsnormale an ∂T.

Auf einer inneren Kante $\gamma = \overline{T} \cap \overline{T'}$, die T mit einem anderen Element T' gemeinsam hat, ist der Sprung definiert durch $[K\nabla v \cdot \nu]_{\partial T}|_\gamma := (K\nabla v)|_T \cdot \nu - (K\nabla v)|_{T'} \cdot \nu$. Für den Neumann-Gebietsrand $\gamma = \partial T \cap \Gamma_N$ von T definieren wir $[K\nabla v \cdot \nu]_{\partial T}|_\gamma := (K\nabla v)|_T \cdot \nu - J$. Dabei ist J die Vorgabe des Flusses auf dem Neumannrand aus Gleichung (2.1). Für $\gamma = \partial T \cap \Gamma_D$ können wir nach Gleichung (3.4) den Sprung beliebig wählen, da die rechte Seite unabhängig vom Sprung auf diesem Teil des Randes ist.

Aus Gleichung (3.3) ist auch die Wahl eines Fehlerindikators offensichtlich: Die $\eta^2_{EE,T}$ entsprechen demnach dem Beitrag des Elements T zur Fehlerschranke von $\|e_k\|_E$. Die Hoffnung liegt nahe, dass bei Unterteilung der Elemente mit großem $\eta^2_{EE,T}$ der tatsächliche Energienormfehler pro Freiheitsgrad schneller abnimmt als bei einer globalen Verfeinerung des ganzen Gitters (zur globalen Verfeinerung siehe Abschnitt 3.3.1). Es sei jedoch betont, dass dies ein heuristisches Argument ist; durch Verkleinern der $\eta^2_{EE,T}$ wird die obere Schranke für den Energienormfehler verkleinert, was jedoch nicht zwangsläufig zu einer Verkleinerung des tatsächlichen Energienormfehlers führen muss.

3.2.2 Fehlerindikatoren nach Zienkiewicz-Zhu

Im Folgenden wollen wir eine einfache Methode beschreiben, wie ein Fehlerindikator durch Mittelung des Flusses berechnet werden kann. Dieser wurde von Zienkiewicz und Zhu in [ZZ87] beschrieben und ist aufgrund seiner einfachen Implementierbarkeit und seiner guten Effizienz bei vielen Problemen, vor allem im Ingenieurbereich, weit verbreitet.

Wir beschränken uns hierbei auf eine Approximation durch lineare Finite Elemente und nehmen ferner an, dass K auf jedem Element des Grobgitters $\mathcal{T}_0$ konstant ist, für einen allgemeineren Ansatz sei auf [ZZ87, ZZ91, BR03] verwiesen. Wir definieren eine Interpolation $\mathcal{M}$ des pro Element konstanten Flusses $K\nabla u_k$ über eine volumengewichtete Mittelung auf die Knoten und linearer beziehungsweise bi-/trilinearer Interpolation dieser Werte auf den Elementen, wie in Abbildung 3.1 verbildlicht.

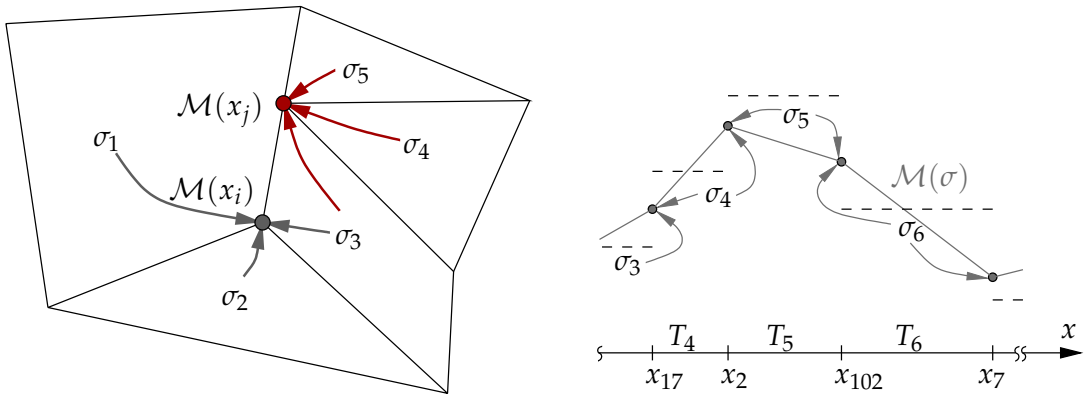
Der Mittelwert an den Knoten des Gitters x_i wird über die Formel

$$\mathcal{M}(x_i) := \frac{1}{\mathrm{vol}(N_i)} \sum_{T_j \in N_i} \mathrm{vol}(T_j)\, K\nabla u_k|_{T_j} \tag{3.5}$$

berechnet. $N_i := \{T \mid x_i \in \mathrm{knoten}(T)\}$ ist die Menge der benachbarten Elemente, für die x_i ein Knoten ist, $\mathrm{vol}(T_j)$ ist das d-dimensionale Volumen von T_j und $\mathrm{vol}(N_i) := \sum_{T \in N_i} \mathrm{vol}(T)$ das Gesamtvolumen aller Elemente in N_i. Außerdem ist $K\nabla u_k|_{T_j}$ der Wert des Flusses auf dem Element T_j. Insbesondere ist es nach dieser Definition für hängende Knoten x_i möglich, dass sie von einem angrenzenden Element keinen Beitrag bekommen.

Die Indikatorwerte $\eta_{ZZ,T}$ gewinnt man dann durch Anwenden der $L^2(\Omega)$-Norm auf die Differenz $K\nabla u_k - \mathcal{M}(K\nabla u_k)$:

$$\eta_{ZZ,T} := \|K\nabla u_k - \mathcal{M}(K\nabla u_k)\|_{0,T}\ . \tag{3.6}$$



(a) (b)

Abbildung 3.1: **(a)** Zweidimensionale Illustration der Mittelung $\mathcal{M}$ der Flüsse für die Knoten x_i und x_j. Die Abkürzung σ_s steht für den Fluss $K\nabla u_k|_{T_s}$ auf dem Element T_s. Ein Pfeil bedeutet einen volumengewichteten Beitrag des Flusses zur Mittelung. Der Knoten x_i ist nicht hängend und erhält von allen angrenzenden Elementen einen Beitrag, x_j ist hängend an Element T_1 und dementsprechend hat σ_1 keinen Anteil an $\mathcal{M}(x_j)$. **(b)** Ausschnitt eines eindimensionalen Gitters. Die Pfeile deuten die Mittelung der Steigung auf die Knoten an, $\mathcal{M}(\sigma)$ ist die lineare Interpolation dieser Knotenwerte auf den Elementen.

3.2.3 Analytisches Energienormmaß und Energienormindikatoren

Sofern die Lösung zu einem Problem analytisch bekannt ist und algebraisch vorliegt, kann man selbstverständlich die gewünschte Fehlernorm einfach ausrechnen. In diesem Fall bedarf es natürlich keiner numerischen Behandlung des Problems um eine approximative Lösung auszurechnen. In dieser Arbeit sind diese analytischen Fehlermaße aber dennoch sinnvoll, da sie einen Vergleich der Schätzer mit dem tatsächlichen Maß ermöglichen.

So benötigen wir das analytische Energienormmaß des Fehlers $\|e_k\|_{\mathrm{E}}$, um Aussagen über die Güte des Energienormfehlerschätzers machen zu können. Dieses ist nach Gleichung (3.2) gegeben als

$$\|e_k\|_{\mathrm{E}}^2 =: \eta_{\mathrm{EM}}^2 = \int_\Omega (K\nabla e_k)\cdot\nabla e_k \,. \tag{3.7}$$

Durch Aufspalten des Integrals auf die Elemente T im Gitter $\mathcal{T}_k$ ergeben sich Fehlerindikatoren

$$\eta_{\mathrm{EM,T}}^2 \coloneqq \int_T (K\nabla e_k)\cdot\nabla e_k \,, \tag{3.8}$$

die sich durch numerische Quadraturformeln berechnen lassen und aufsummiert das Energienormmaß ergeben:

$$\eta_{\mathrm{EM}}^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_k} \eta_{\mathrm{EM,T}}^2 \,. \tag{3.9}$$

3.3 Verfeinerungsstrategien

Wir kommen nun zur Beschreibung einiger Verfeinerungsstrategien, die festlegen, welche Elemente auf Basis der berechneten Indikatorwerte zur Unterteilung ausgewählt werden. In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass pro Element ein Indikatorwert gegeben ist – zum Beispiel durch Berechnung eines im vorigen Abschnitt behandelten Indikators.

Wir beschreiben zunächst die globale Verfeinerung und behandeln danach drei heuristische adaptive Strategien, die in der Praxis anzutreffen sind.

3.3.1 Globale Verfeinerung

Die offensichtlichste Verfeinerungsstrategie ist die *globale Verfeinerung* des ganzen Gitters, bei der in jedem Schritt jedes Element unterteilt wird. Tatsächlich werden wir in Kapitel 4 die betrachteten adaptiven Verfahren mit der globalen Verfeinerung vergleichen. Damit es sich lohnt, ein adaptives Vefahren einzusetzen, muss es signifikant besser sein.

Die globale Verfeinerung des Gitters ist eine gute Referenz für den Vergleich verschiedener Strategien, da sie sehr eng mit dem Konvergenzverhalten des numerischen Verfahrens bei gegebenem Problem zusammenhängt. Wird der Diskretisierungsparameter h durch die globale Verfeinerung auf $a \cdot h$ verkleinert, so erwartet man bei einer Konvergenzordnung[1] der Approximation von p, asymptotisch eine Reduktion des Fehlers um a^p. Ist die Konvergenzordnung beispielsweise quadratisch und h wird in jedem Schritt halbiert, so sollte der Fehler bei genügend feinem Gitter in jedem Schritt auf ein Viertel sinken.

Aussagen über das Konvergenzverhalten eines numerischen Verfahrens für ein bestimmtes Problem liefern a priori Abschätzungen, wie sie in Konvergenzbeweisen des betrachteten Verfahrens hergeleitet werden.

Wie wir beim Modellproblem Wellen in Abschnitt 4.2 sehen werden, ist die globale Verfeinerung eine gute Wahl, falls das Problem eine sehr reguläre Lösung erwarten lässt. Bei solchen Problemen ist dadurch bereits die Äquilibrierungsbedingung (3.1) hinreichend genau erfüllt und man kann sich den zusätzlichen Aufwand zur Berechnung der Fehlerindikatoren sparen.

3.3.2 Adaptive Verfeinerungsstrategien

Ist die Lösung des Problems jedoch nicht von hoher Regularität, so können adaptive Strategien einen großen Vorteil bieten. Diese versuchen, die Äquilibrierungsbedingung (3.1) möglichst gut zu erfüllen. Dabei treten zwei Probleme auf: Zum Einen muss eine Äquilibrierung der Indikatorwerte nicht bedeuten, dass der tatsächliche Fehler auch äquilibriert wird, zum Anderen gibt es ein Effizienzproblem, wie wir im Folgenden erläutern wollen.

[1] Eine Konvergenzordnung von p bedeutet, dass $\|e_h\| \in \mathcal{O}(h^p)$ gilt. e_h ist der Fehler, der zum Diskretisierungsparameter h gehört.

Der erste Punkt ist bei den hier betrachteten elliptischen Gleichungen kein Problem, wie in den einleitenden Worten zu Fehlerschätzer in Abschnitt 3.2 erläutert wurde. Um den zweiten Punkt einzusehen, wollen wir ein Beispiel anführen: Man könnte auf die Idee kommen, in jedem Schritt genau ein Element zu unterteilen, nämlich dasjenige, dass den größten Indikatorwert hat (wenn es mehrere Elemente gibt, die den maximalen Indikatorwert haben, unterteile man alle Elemente mit maximalem Indikatorwert). Dies führt auch tatsächlich zu einer guten Erfüllung der Äquilibrierungsbedingung (3.1), ist aber dennoch unpraktikabel. Nehmen wir an, dass die Äquilibrierung der Indikatorwerte tatsächlich eine Äquilibrierung des Fehlers nach sich zieht. Der Gesamtaufwand dieses Verfahrens ist dennoch sehr hoch, da pro Schritt normalerweise das Berechnen der numerischen Approximation das Gros des Aufwandes darstellt. In jedem Schritt wird aber immer nur ein Element unterteilt, also benötigt man sehr viele Schritte um die vorgegebene Genauigkeit zu erreichen.

Die heuristische Idee hinter den hier vorgestellten Strategien ist, dass es effizienter ist, pro Schritt eine größere Anzahl an Elementen zu unterteilen. Wie genau die Teilmenge $\tilde{\mathcal{T}}$ der zu unterteilenden Elemente bestimmt wird, ist dabei durch die Wahl der Verfeinerungsstrategie festgelegt. Im Folgenden werden die drei in der Praxis wichtigsten Strategien beschrieben.

Bei der Formulierung der drei folgenden Strategien seien ein Parameter $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ und pro Element T ein Indikatorwert η_T gegeben. Außerdem seien die Elemente so nummeriert, dass sie nach fallendem Indikatorwert geordnet sind, das heißt es gilt

$$\begin{aligned} \{T_0, \quad T_1, \quad \dots, \quad T_{N-1}\} &= \mathcal{T}_k, \\ \eta_0 \geq \quad \eta_1 \geq \quad \cdots \geq \quad \eta_{N-1}&. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dabei ist η_i eine abkürzende Schreibweise für η_{T_i}.

Strategie 1 Bei dieser Strategie legt α einen festen Anteil der Elemente mit größtem Indikatorwert fest. Die Menge $\tilde{\mathcal{T}}_{\text{Strat1}}$ der zu unterteilenden Elemente ist also gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\text{Strat1}} := \{T_i \in \mathcal{T}_k \mid i \leq \alpha(N-1)\}. \tag{3.11}$$

In der Praxis wählt diese Strategie zum Teil zu viele Elemente aus, sodass nicht die optimale Konvergenzordnung erreicht wird, vor allem bei zu großem α und Problemen niederer Regularität. Ein Beispiel hierfür ist Modellproblem Schachbrett in Abschnitt 4.5.

Strategie 2 Diese Strategie wählt alle Elemente zur Unterteilung aus, deren Indikatorwerte eine bestimmte Schwelle überschreiten. Die Menge $\tilde{\mathcal{T}}_{\text{Strat2}}$ der zu unterteilenden Elemente ist dann gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\text{Strat2}} := \{T_i \in \mathcal{T}_k \mid \eta_i \geq (1-\alpha)\eta_0\}. \tag{3.12}$$

Diese Strategie unterteilt nach wenigen Schritte oft nur noch sehr wenige Elemente und es tritt wieder das Effizienzproblem auf, siehe dazu Modellproblem Wellen in Abschnitt 4.2.

Strategie 3 Die letzte Strategie, die wir betrachten, verfeinert die Elemente mit dem höchsten Indikatorwert, sodass ein über α festgelegter Anteil des Fehlers $\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \eta_i^2$ überdeckt wird:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\text{Strat3}} := \left\{ T_i \in \mathcal{T}_k \mid \sum_{j=0}^{i} \eta_j^2 \leq \alpha \eta^2 \right\}. \tag{3.13}$$

3.4 Unterteilungsverfahren

In diesem Abschnitt werden wir uns mit Unterteilungsverfahren beschäftigen. Diese legen fest, wie die einzelnen Element, die zu unterteilen sind, in kleinere Teilelemente zerlegt werden. Zu den von der Verfeinerungsstrategie ausgewählten Elementen kommen dabei eventuell noch sogenannte Abschlusselemente hinzu, siehe dazu Unterabschnitt 3.4.4. Eine *Unterteilung* eines Elementes $T \in \mathcal{T}_k$ ist eine Menge von t Elementen $\{T_i \in \mathcal{T}_{k+1} \mid 1 \leq i \leq t\}$, die T partitioniert, das heißt es gilt

$$\overline{T} = \bigcup_{i=1}^{t} \overline{T_i} \tag{3.14}$$

und der Schnitt zweier verschiedener Elemente ist leer. Alle Elemente von $\mathcal{T}_k$, die nicht zu unterteilen sind, werden unverändert in $\mathcal{T}_{k+1}$ übernommen. Den Verlauf der Verfeinerungsgeschichte eines Gitters $\mathcal{T}_0$ wird dann durch eine Baumstruktur dargestellt, wie in Abbildung 3.2 veranschaulicht. T heißt *Vater* der T_i und die T_i werden als *Kinder* von T bezeichnet.

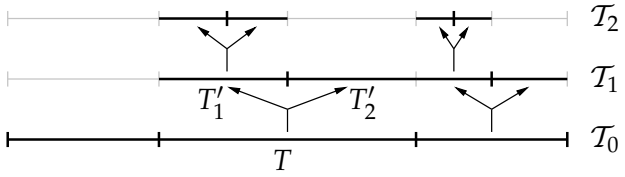


Abbildung 3.2: Graphische Darstellung der Baumstruktur eines eindimensionalen hierarchischen Gitters. Das Element T des Grobgitters $\mathcal{T}_0$ ist der Vater von T_1' und T_2' des feineren Gitters $\mathcal{T}_1$.

Wichtig ist dabei, dass die T_i Elemente der nächst feineren Triangulierung $\mathcal{T}_{k+1}$ sein müssen. Insbesondere muss sich jedes T_i wieder durch ein Referenzelement $T_i^{\text{ref}} \in \mathcal{T}^{\text{ref}}$ unter einer Transformation m_i: $T_i^{\text{ref}} \to \Omega$ darstellen lassen (siehe Anhang A):

$$T_i = m_i(T_i^{\text{ref}}) \text{ für alle } 1 \leq i \leq t. \tag{3.15}$$

Die Menge der Referenzelemente $\mathcal{T}^{\text{ref}}$ ist über alle Verfeinerungsstufen unveränderlich.

Ausgehend von einem Grobgitter $\mathcal{T}_0$ gelangt man durch sukzessive Unterteilung einer Teilmenge von Elementen zu einer Familie von Gittern

$$\mathscr{T} = \{\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k, \ldots\}, \tag{3.16}$$

die wir *quasi-uniform* nennen, falls sich für jedes Element T in jeder Stufe $\mathcal{T}_i$ das Verhältnis von Umkreis h_T zu Inkreis ρ_T nach oben abschätzen lässt, das heißt es gilt mit einem $\kappa \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$ die Abschätzung

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \kappa. \tag{3.17}$$

Es ist $h_T = \operatorname{diam}(T)$ und $\rho_T := \sup\{d \in \mathbf{R} \mid B_d(x) \subset T \text{ für ein } x \in T\}$. Für die Konvergenz des verwendeten Finite-Element-Verfahrens ist essentiell, dass die enstehende Familie der Triangulierungen quasi-uniform sind. Deshalb müssen die in den folgenden Unterabschnitten betrachteten Methoden zur Gitterunterteilung immer eine quasi-uniforme Familie von Gittern erzeugen und ein Augenmerk wird darauf liegen, diese Eigenschaft nachzuweisen.

Durch Unterteilung eines Elementes kann es an der Grenze zu benachbarten Elementen zu *hängenden Knoten* kommen, wie in Abbildung 3.3 illustriert. Wie mit diesen umgegangen wird, besprechen wir in Unterabschnitt 3.4.4.

Abbildung 3.3: Die Unterteilung des Elements T in T_1 bis T_4 führt zu einem hängenden Knoten an T'. Der hängende Knoten ist dabei durch einen schwarzen Punkt markiert.

Bei den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf die für uns wichtigen Fälle Simplizes und Quadrilaterale als Elemente des Gitters, das heißt Dreiecke beziehungsweise Vierecke im zweidimensionalen und Tetraeder beziehungsweise Würfel im dreidimensionalen. Außerdem konzentrieren wir uns auf den anschaulicheren zweidimensionalen Fall.

3.4.1 Bisektion von Simplizes

Es wird eine Kante des Elements ausgewählt, in deren Mitte ein neuer Knotenpunkt eingefügt wird. Durch diesen Knoten, jeweils einen Knoten der geteilten Kante und alle restlichen

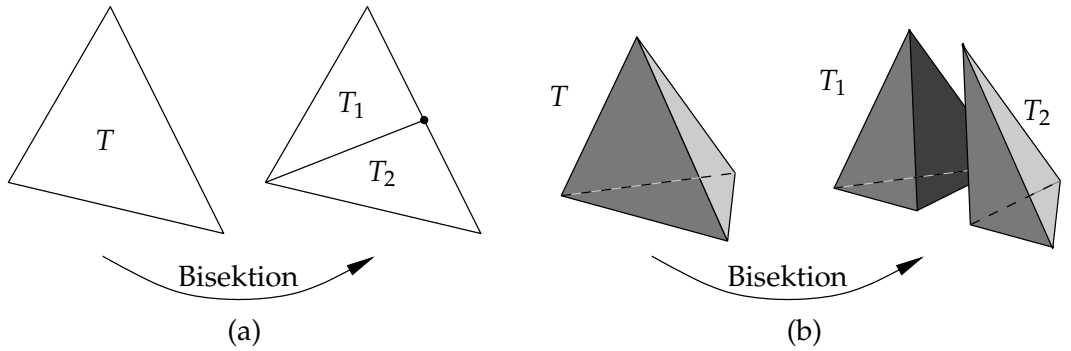


Abbildung 3.4: **(a)** Die Bisektion eines Dreiecks und **(b)** eines Tetraeders als Explosionszeichnung.

Knoten des Elements, das heißt ein beziehungsweise zwei Knoten in zwei beziehungsweise drei Raumdimensionen, entstehen zwei neue Elemente, wie in Abbildung 3.4 dargestellt.

Bei der Auswahl der zu unterteilenden Kante ist darauf zu achten, dass bei fortgesetzter Verfeinerung eine quasi-uniforme Familie von Gittern entsteht. Dies gilt trivialerweise, wenn in jedem Schritt die längste Kante unterteilt wird (*longest edge bisection*). Alternativ kann durch Vererbungsmethoden, sichergestellt werden, dass die Kanten zyklisch unterteilt werden und so keine allzu „spitzen“ Elemente entstehen.

3.4.2 Reguläre Verfeinerung von Simplizes

Im Zweidimensionalen lässt sich ein Dreieck in vier zu diesem ähnliche Dreiecke unterteilen, indem jede Kante in der Mitte unterteilt wird und die sechs Knoten vier Dreiecke nach Abbildung 3.5 festgelegen.

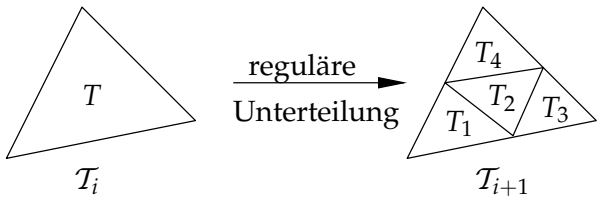


Abbildung 3.5: Reguläre Unterteilung eines Dreiecks T. Es werden die Kanten halbiert, durch die neu entstandenen Knoten wird T in vier kongruente Dreiecke T_1 bis T_4 zerteilt.

Im dreidimensionalen gestaltet sich die reguläre Verfeinerung dagegen deutlich schwerer, da sich ein Tetraeder nicht in zu diesem ähnliche kleinere Tetraeder unterteilen lässt.

In [Bey97] wird jedoch gezeigt, dass man bei fortgesetzter Unterteilung von Tetraedern mit acht Ähnlichkeitsklassen auskommen kann.

Da dann für zwei und drei Dimensionen nur endlich viele Ähnlichkeitsklassen existieren, ist Gleichung (3.17) trivialerweise erfüllt und die entstehende Gitterfamilie quasi-uniform.

3.4.3 Reguläre Verfeinerung von Quadrilateralen

Die reguläre Verfeinerung eines Vierecks in vier ähnliche Vierecke ist in Abbildung 3.6 (a) abgebildet. Jede Kante wird halbiert und im Schwerpunkt des Vierecks wird ein weiterer Knoten eingeführt. Die Vierecke sind dann jeweils gegeben durch einen Knoten des ursprünglichen Vierecks, die zwei Knoten, die auf Kanten dieses Knotens liegen, und dem Knoten im Schwerpunkt.

Ein Würfel wird analog dazu in acht ähnliche Würfel unterteilt. Dabei werden aus den acht Knoten des ursprünglichen Knotens insgesamt 27 Knoten im feineren Gitter.

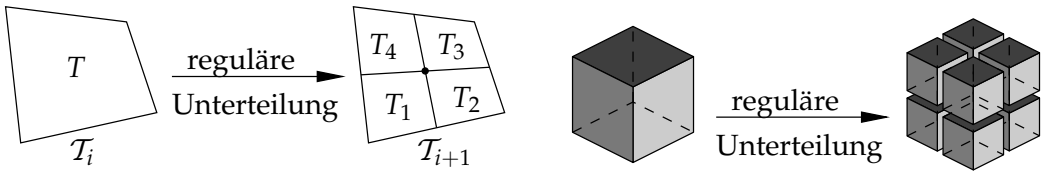


Abbildung 3.6: **(a)** Reguläre Unterteilung eines Vierecks in vier kongruente Vierecke. **(b)** Reguläre Unterteilung eines Würfels in acht kongruente Würfel, dargestellt als Explosionszeichnung.

3.4.4 Abschlussregeln

Wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben, wählen wir einen Ansatz über die Knotenbasis und möchten einen global stetigen Raum erhalten. Ohne spezielle Behandlung der hängenden Knoten wäre diese Eigenschaft jedoch nicht erfüllt.

Kein Abschluss In diesem Fall gibt es hängende Knoten im Gitter. Diese werden aber nicht als Freiheitsgrade aufgefasst, das heißt sie sind nicht in der Menge FG enthalten. Der Wert einer Unbekannten, die zu einem hängenden Knoten gehört, wird aus den benachbarten Unbekannten durch eine passende Interpolation gewonnen: Für den zu einem hängenden Knoten x_j gehörenden Koeffizienten α_j muss

$$\alpha_j = \sum_{i \in N} \alpha_i \psi_i(x_j) \tag{3.18}$$

gelten, wobei $N := \{i \in \mathbf{N} \mid i \neq j, \psi_i(x_j) \neq 0\}$ die Indexmenge der Nachbarknoten x_i ist, deren Basisfunktion ψ_i an der Stelle x_j nicht verschwindet. In unserem Fall ist dies eine lineare Interpolation der Werte der zwei benachbarten Knoten.

Konformer Abschluss Um einen sogenannten konformen Abschluss des Gitters zu erreichen werden hierbei in der Nachbarschaft des hängenden Knoten zusätzliche *Abschlusselemente* eingeführt, das heißt benachbarte Elemente werden unterteilt. Dadurch werden alle hängenden Knoten eliminiert und es entsteht ein konformes Gitter. Auf diesem führt der Ansatz über die Knotenbasis wie in Gleichung (2.4) automatisch zu einer globalen Stetigkeit.

Bei simplizialen Gittern kommt man dabei wieder mit Simplizes aus, wie in Abbildung 3.7 (a) beispielhaft für ein Dreiecksgitter veranschaulicht.

Bei quadrilateralen Gittern muss man jedoch zusätzliche Referenzelemente zulassen: So benötigt man Dreiecke für den zweidimensionalen Abschluss, im Dreidimensionalen Tetraeder, Prismen und Pyramiden. Will man also ein quadrilaterales Gitter mit konformem Abschluss, benötigt man ein Gitter mit gemischten Elementen. Für Viereckselemente ist dies in Abbildung 3.7 (b) dargestellt.

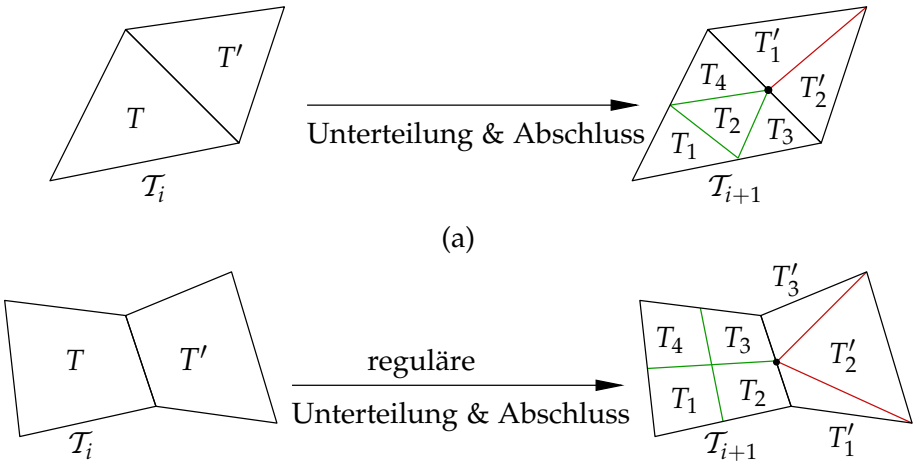


Abbildung 3.7: **(a)** Der Abschluss eines hängenden Knotens an einem Dreieck, ergibt zwei neue Dreiecke, **(b)** an einem Viereck ergeben sich drei Dreiecke.

Generell werden die für den Abschluss erzeugten Elemente markiert. Wird ein solches zur Unterteilung ausgewählt, wird der Abschluss rückgängig gemacht und das Vaterelement zur Verfeinerung ausgewählt. Aufgrund der unterschiedlichen Markierungen die dabei verwendet werden, nennt man dieses Verfahren *Rot-Grün Verfeinerung*.

Kapitel 4

Ergebnisse

In diesem Kapitel kommen wir zum praktischen Teil dieser Arbeit. Das Framework aus Abschnitt 3.1 wurde in C++ mit Hilfe der Numerikbibliothek **Dune** umgesetzt[1]. Dabei wurden verschiedene Implementierungen der Komponenten des Frameworks integriert, um einen Vergleich der Konvergenzordnung unter verschiedenen Parametern zu ermöglichen.

In den Abschnitten 4.2 bis 4.5 untersuchen wir für vier elliptische Probleme das Verhalten der linearen Finite-Element-Approximation unter Variation der folgenden Komponenten (vergleiche Kapitel 3):

Fehlerindikatoren,

Verfeinerungsstrategie und deren Parameter α,

Gitterbibliothek, die zur Repräsentation der $\mathcal{T}_k$ verwendet wird. Diese legt folgende in Abschnitt 3.4 beschriebenen Gittereigenschaften fest:

- Simpliziales oder quadrilaterales Gitter;
- Reguläre Unterteilung oder Bisektion;
- Konformer Abschluss oder hängende Knoten.

Die verwendeten Gitterbibliotheken und deren Eigenschaften beschreiben wir im folgenden Abschnitt 4.1. Da manche Gitterbibliotheken nur globale Verfeinerung zulassen, hat diese Wahl zum Teil auch Rückwirkung auf die zur Verfügung stehenden Verfeinerungsstrategien.

Es werden jedoch nicht alle Kombinationen besprochen, was aufgrund der riesigen Anzahl den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Deshalb werden wir für jedes Problem einige Kombinationen auswählen und vergleichend besprechen.

Die Betrachtung jedes Modellproblems ist in zwei Abschnitte aufgeteilt: Zunächst geben wir die Definition des Problems und erläutern dessen Eigenschaften. Anschließend folgt ein Abschnitt über die ermittelten numerischen Ergebnisse.

[1] **Dune** erlaubt durch generische Programmmierung in C++ die effiziente Benutzung diverser Gitterbibliotheken, bietet aber darüber hinausgehende Funktionalität, beispielsweise zum Lösen linearer Gleichungssysteme [Duno8].

Die Konvergenzverläufe des Fehlers werden dabei über der Anzahl der Knoten im Gitter aufgetragen, die im Wesentlichen den Aufwand zum Lösen des diskretisierten Problems bestimmt. Die Nummerierung der Abbildungen zu einem Problem bilden sich dabei im Gegensatz zu den restlichen Abschnitten durch Anhängen einer konsekutiven Nummerierung an die Abschnittsnummer des Problems.

4.1 Klassifikation der verwendeten Gittermanager

Es wurden die Gitterbibliotheken Alberta, ALUSimplex, ALUCube, UG und Yasp implementiert. Folgende Tabelle fasst die für uns relevanten Eigenschaften der Gitter zusammen:

Gitterbibliothek	Dimension	Typ	Verfeinerung	Konf. Abschluss
Alberta	2,3	Simplizial	Bisektion	Ja
ALUSimplex	2,3	Simplizial	Regulär	Nein
ALUCube	3	Quadrilateral	Regulär	Nein
UG	2,3	Simpl. & Quadril.	Regulär	Ja
Yasp	n	Quadrilateral	Regulär (global)	*Entfällt*

Alberta ist die einzige Gitterbibliothek, die eine Bisektion zur Unterteilung implementiert. Bei den restlichen Gitterbibliotheken wird regulär unterteilt. Deshalb erzeugt Alberta kleinere Schritte bei gleicher Anzahl unterteilter Elemente.

ALUCube ist nur in drei Raumdimensionen verfügbar. Sowohl ALUCube, als auch ALUSimplex haben im Gegensatz zu Alberta und UG keinen konformen Abschluss, sorgen aber dafür, dass es pro Kante maximal einen hängenden Knoten gibt.

UG ist die Gitterbibliothek mit größtem Funktionsumfang und unterstützt sowohl simpliziale als auch quadrilaterale Gitter. Falls UG mit einem quadrilateralen Gitter verwendet wird schreiben wir UGCube, wobei durch den Abschluss ein Gitter mit gemischten Elementen entstehen kann. Falls UG ausschließlich mit simplizialen Elementen verwendet wird, schreiben wir von nun an UG. Es ist jedoch zu betonen, das dies keine unterschiedlichen Gitterbibliotheken bezeichnet.

Yasp ist ein sogenanntes strukturiertes Gitter und für beliebige Dimensionen $n \geq 1$ einsetzbar. Allerdings ist damit keine adaptive Verfeinerung des Gitters möglich, das heißt es unterstützt nur globale Verfeinerung, weshalb das Gitter automatisch konform ist und ein Abschluss entfällt. Außerdem sind durch Yasp nur Hyperwürfel in n Dimensionen darstellbar.

4.2 Modellproblem WELLEN

Das erste Modellproblem, das wir betrachten wollen, ist auf dem zweidimensionalen Rechtecksgebiet $\Omega := (0, 2\pi)^2 \subset \mathbf{R}^2$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= q \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D := \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dabei ist $q\colon \Omega \to \mathbf{R}$ so gewählt, dass $u(x, y) := \sin(x)\,\sin(y)$ die Bedingungen (4.1) erfüllt, das heißt es gilt für alle $(x, y) \in \Omega$

$$\begin{aligned} q(x,y) &= -\Delta u(x,y) \\ &= -\left(\partial_x^2(\sin(x)\,\sin(y)) + \partial_y^2(\sin(x)\,\sin(y))\right) \\ &= -\left((-\sin(x))\,\sin(y) + \sin(x)\,(-\sin(y))\right) = 2u(u,y) \\ &= 2\,\sin(x)\,\sin(y). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Lösung $u \in C^\infty(\Omega)$ zu diesem Problem ist in Abbildung 4.2.1 dargestellt. Aufgrund der hohen Regularität der Lösung ist zu erwarten, dass ein adaptives Verfahren keinen oder zumindest keinen nennenswerten Vorteil gegenüber globaler Verfeinerung bietet. Diese Annahme wird sowohl durch das adaptiv verfeinerte Gitter in Abbildung 4.2.2 (b) unterstützt, dass sich optisch kaum von einem entsprechend global verfeinerten Gitter unterscheidet, als auch durch die Betrachtungen der Konvergenzgeschwindigkeiten im nächsten Abschnitt.

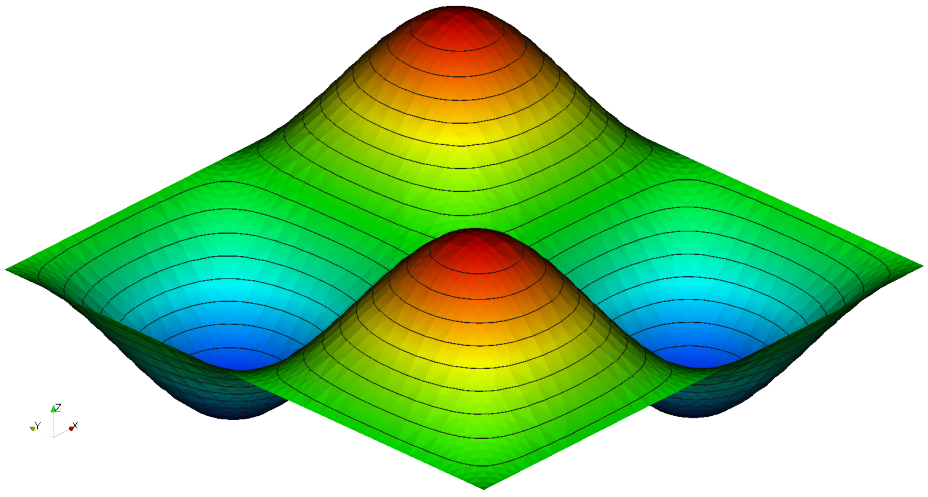
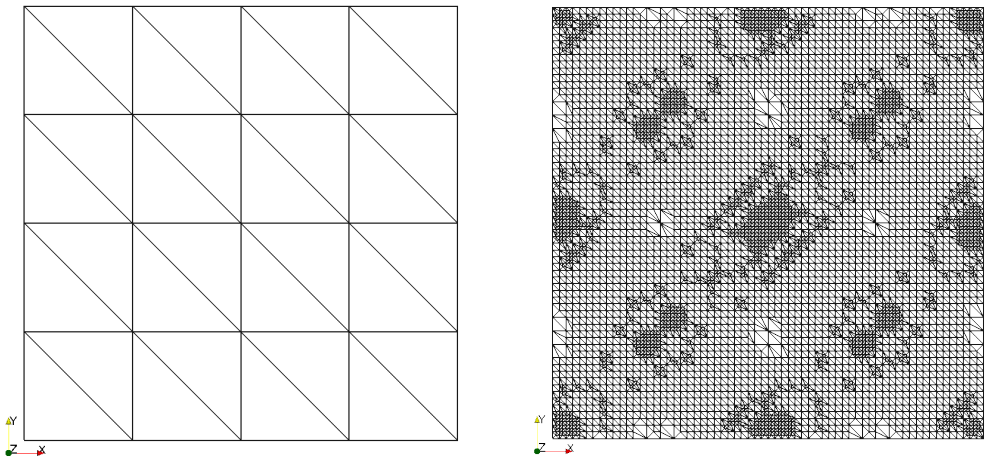


Abbildung 4.2.1: Die Lösung des Modellproblems WELLEN.



(a) **(b)**

Abbildung 4.2.2: Das Grobgitter $\mathcal{T}_0$ zu Modellproblem WELLEN **(a)**, sowie ein mit Strategie 1, $\alpha = 50\%$ und $\eta_{\mathrm{EE},T}$ adaptiv verfeinertes Gitter nach sechs Schritten **(b)**.

Numerische Ergebnisse

Vergleich der Gitterbibliotheken

Zunächst wollen wir die Konvergenzgeschwindigkeit der Approximation bei Verwendung der verschiedenen Gitterbibliotheken vergleichen. Wie Abbildung 4.2.3 zeigt, sind die Unterschiede zwischen den Gitterbibliotheken sowohl bei globaler, als auch bei lokaler Verfeinerung marginal. Die quadrilateralen Gitter von UGCube und Yasp sind ein wenig besser als die simplizialen Gitter. Die folgenden Betrachtungen werden exemplarisch mit der Gitterbibliothek UG durchgeführt.

Bewertung Energienormschätzer & Vergleich Verfeinerungsstrategien

An Abbildung 4.2.4 (oben) ist ersichtlich, dass der Energienormschätzer die Konvergenzordnung sehr gut wiederspiegelt. Der Fehler wird sehr zuverlässig mit etwa dem Faktor $3,8$ überschätzt.

Wie der untere Teil der Abbildung zeigt, lohnt sich bei diesem Problem ein adaptives Lösungsverfahren nicht. Bei Verwendung der Indikatoren nach Zienkiewicz-Zhu ist eine adaptive Strategie sogar echt schlechter als eine globale Verfeinerung. In den Abbildungen ist eine Wahl für eine adaptive Strategie dargestellt, bei anderer Wahl der Komponenten ist der prinzipielle Verlauf der Kurven jedoch gleich.

Dies lässt darauf schließen, dass bei regulären Problemen eine globale Verfeinerung eine gute Wahl ist – was sich auch mit Aussagen der Regularitätstheorie deckt. Vor allem sollte man dann jedoch den Indikator nach Zienkiewicz-Zhu meiden.

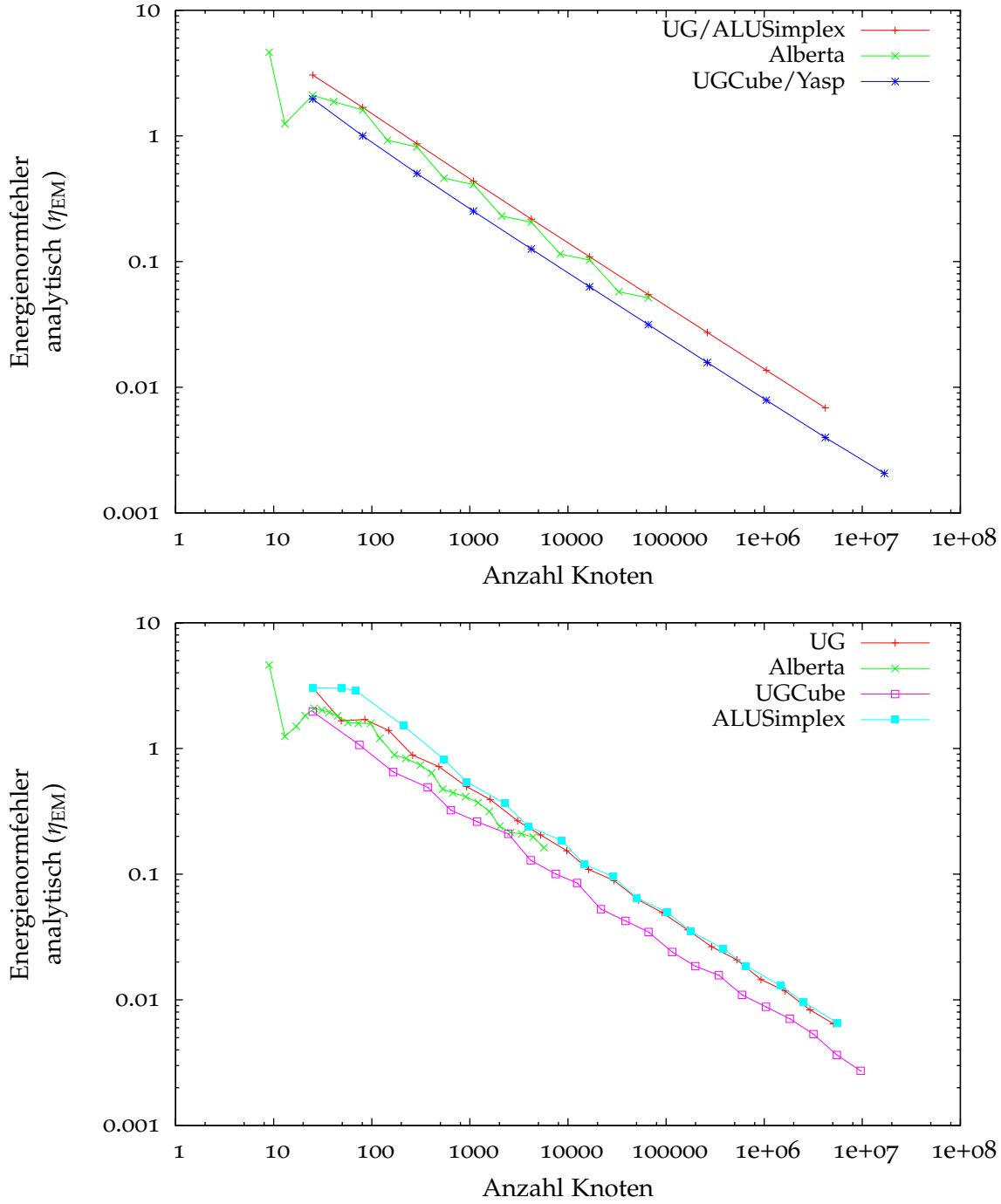


Abbildung 4.2.3: Vergleich von Gitterbibliotheken bei globaler Verfeinerung **(oben)** und adaptiver Verfeinerung mit Strategie 1, $\alpha = 25\%$ und Indikator $\eta_{EE,T}$ **(unten)**.

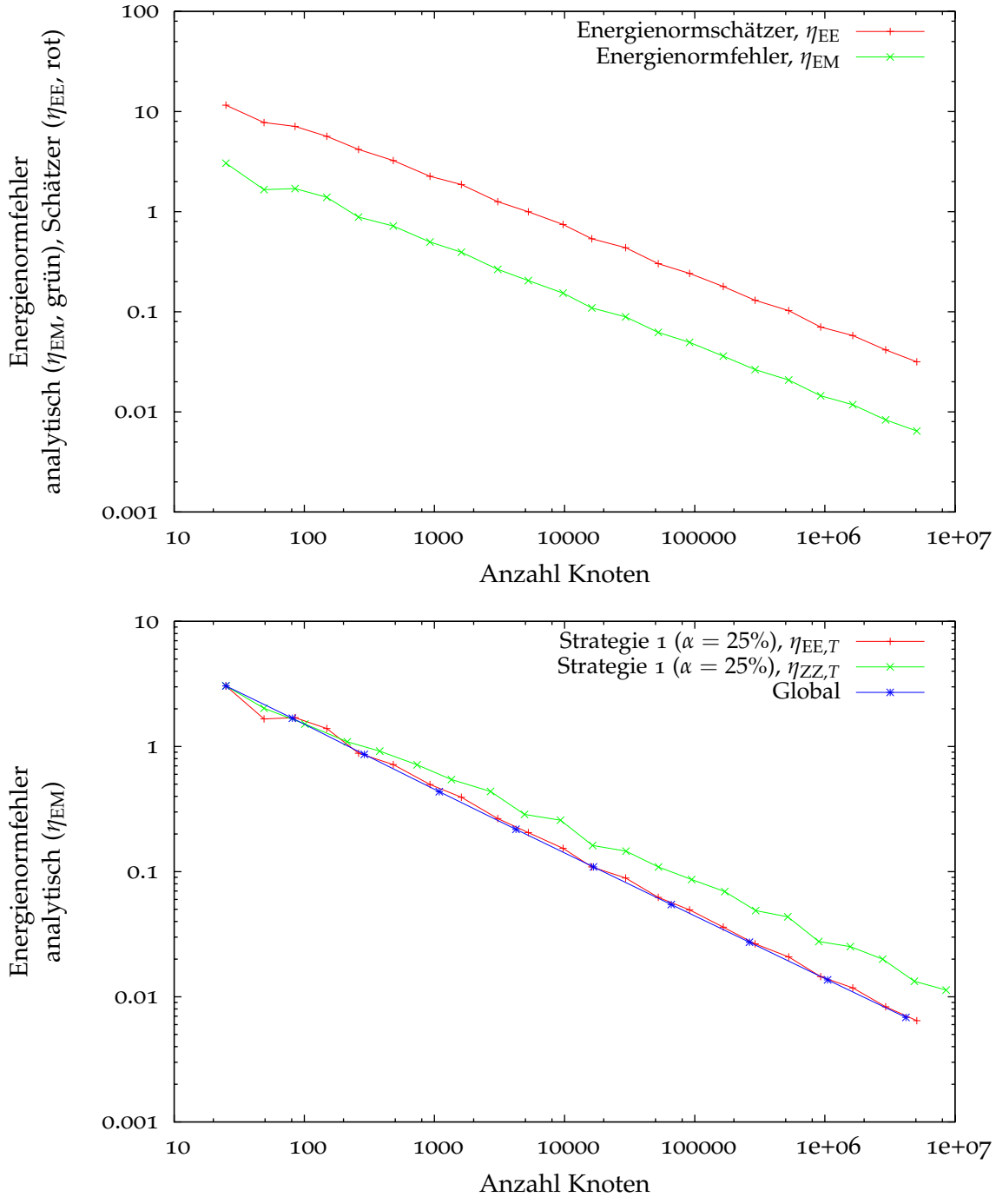


Abbildung 4.2.4: Vergleich des Energienormschätzers mit dem analytischen Fehler bei adaptiver Verfeinerung mit Strategie 1, $\alpha = 25\%$ und $\eta_{EE,T}$-Indikator **(oben)**. Vergleich globaler Verfeinerung und adaptiver Verfeinerung mit Energienormindikator und Indikator nach Zienkiewicz-Zhu **(unten)**.

4.3 Modellproblem EINSPRINGENDE ECKE

Dieses zweidimensionale Problem ist durch die Gleichungen in Polarkoordinaten (r, ϕ)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= r^{2/3} \sin(2/3\,\phi) && \text{auf } \Gamma_D := \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.3}$$

auf dem L-förmigen Gebiet $\Omega := (-1,1)^2 \setminus [0,1] \times [-1,0]$ gegeben. Das Gebiet Ω ist in Abbildung 4.3.2 mit einem Grobgitter und einem adaptiv verfeinerten Gitter nach neun Schritten dargestellt.

Es ist $u(r,\phi) = r^{2/3} \sin(2/3\,\phi)$ die Lösung dieses Problems wie in Abbildung 4.3.1 abgebildet. Aufgrund der einspringenden Ecke im Ursprung hat u eine Singularität im Gradienten bei $x = y = 0$, ist aber in allen Sobolevräumen $H^s(\Omega)$ enthalten, für die $s < 1 + 2/3$ gilt [Hac86]. Wie das adaptiv verfeinerte Gitter zeigt, wird dies von dem Verfahren auch gut erkannt, und es wird hauptsächlich um den Ursprung herum verfeinert.

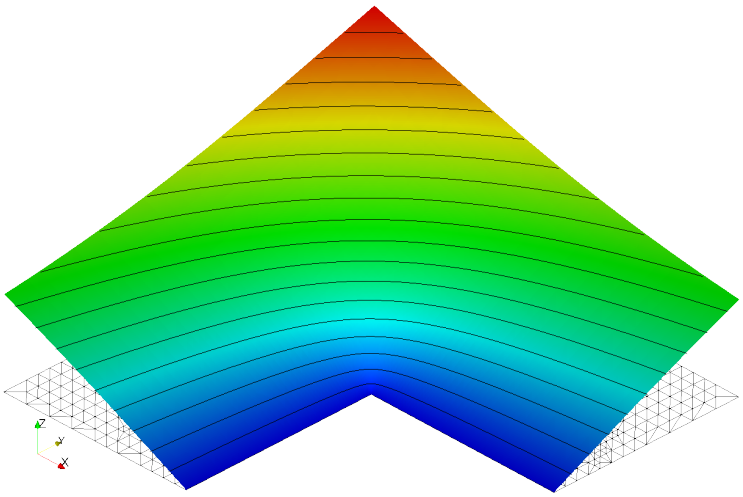
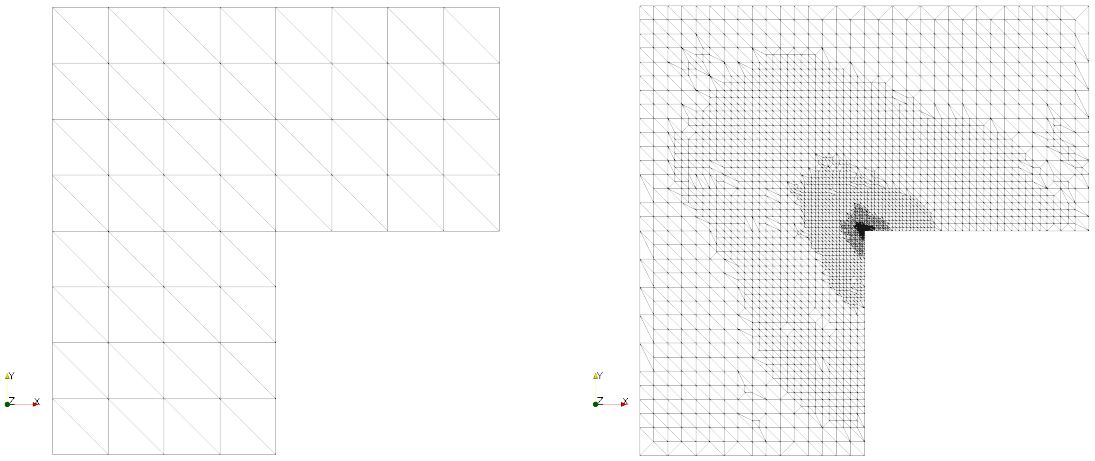


Abbildung 4.3.1: Die Lösung des Modellproblems EINSPRINGENDE ECKE.

Numerische Ergebnisse

Vergleich der Gitterbibliotheken

Wie auch beim vorigen Problem, gibt es sowohl bei globaler als auch bei adaptiver Verfeinerung kaum Unterschiede zwischen den Gitterbibliotheken, und UGCube ist ein wenig besser als die simplizialen Gitter, wie wir an Abbildung 4.3.3 sehen. Im Weiteren beschränken wir uns daher wieder auf UG, die folgenden Diagramme haben für andere Gitterbibliotheken den gleichen prinzipiellen Verlauf.



(a) **(b)**

Abbildung 4.3.2: Das Grobgitter $\mathcal{T}_0$ zu Modellproblem Einspringende Ecke **(a)**, sowie ein adaptiv verfeinertes Gitter nach neun Schritten **(b)**, berechnet mit Strategie 3, $\alpha = 50\%$ und $\eta_{\mathrm{EE},T}$.

Bewertung Energienormschätzer

Abbildung 4.3.4 (oben) zeigt den Verlauf des Wertes des Energienormschätzers in Vergleich zum analytischen Maß bei adaptiver Verfeinerung. Auch hier ist der Schätzer wie im vorigen Modellproblem sehr zuverlässig, der Überschätzungsfaktor beträgt rund $3,5$.

Wie Abbildung 4.3.4 (unten) zeigt, ist der Schätzer auch als Indikator $\eta_{\mathrm{EE},T}$ sehr effizient: Der analytische Indikator $\eta_{\mathrm{EM,T}}$ erzielt keine bessere Konvergenz.

Einfluss des Parameters der Verfeinerungsstrategie

Wir untersuchen nun die Konvergenzordnung für den residualen Energienormindikator $\eta_{\mathrm{EE},T}$ und den Indikator $\eta_{\mathrm{ZZ},T}$ nach Zienkiewicz-Zhu mit jeder Verfeinerungsstrategie bei Variation des Parameters α.

Mit dem Energienormindikator hat die Wahl von α bei allen Strategien nahezu keinen Einfluss auf die Konvergenzordnung, wie Abbildung 4.3.5 zu entnehmen ist. Bei der Betrachtung des Gesamtaufwands ist der Parameter α jedoch so zu wählen, dass er bei voller Konvergenzordnung möglichst groß ist. Dadurch wird vermieden, dass sehr viele kleine Probleme zu lösen sind, was den Gesamtaufwand zum Erreichen einer gegebenen Genauigkeit erhöht.

Mit dem Indikator nach Zienkiewicz-Zhu sollte man jedoch bei Strategie 2 den Wert für den Parameter α nicht zu hoch ansetzen: Wie Abbildung 4.3.6 zeigt, läuft es für $\alpha = 90\%$ auf eine globale Verfeinerung heraus. Für $\alpha = 80\%$ beginnt sich die Kurve erst ab

circa hunderttausend Knoten von der globalen Verfeinerung abzuheben und erreicht erst dann eine deutlich höhere Konvergenzrate. Das lässt darauf schließen, dass der Indikator nach Zienkiewicz-Zhu insbesondere bei grobem Gitter die Singularität des Gradienten schlecht quantitativ erfasst; so unterscheiden sich im betrachteten Bereich so gut wie alle Indikatorwerte um weniger als 10%.

Vergleich der Verfeinerungsstrategien

Abbildung 4.3.7 (oben) zeigt einen Vergleich der Verfeinerungsstrategien 1 bis 3 für den residualen Energienormindikator. Abbildung 4.3.7 (unten) zeigt das Gleiche für den Indikator nach Zienkiewicz-Zhu. Dabei wurde für α jeweils ein geeigneter Wert gewählt.

Daraus ist zu entnehmen, dass sich die Strategien bei geeigneter Wahl des Parameters α nur wenig bezüglich der Konvergenzordnung unterscheiden. Allerdings tendieren Strategie 2 und Strategie 3 dazu, unnötig viele kleine Schritte zu erzeugen, was den Gesamtaufwand erhöht.

Abschließend für dieses Modellproblem wollen wir nun noch globale und adaptive Verfeinerung vergleichen. Dazu greifen wir jeweils für den residualen Energienormindikator und den Indikator nach Zienkiewicz-Zhu eine adaptive Strategie heraus, die sich in den vorangegangenen Betrachtungen als effizient herausgestellt hat und vergleichen diese in Abbildung 4.3.8 untereinander und mit einer globalen Verfeinerung.

Darin ist gut ersichtlich, dass ein adaptives Verfahren für dieses Problem sehr lohnenswert ist. So hat das adaptive Verfahren mit $\eta_{\mathrm{EE},T}$-Indikator eine Konvergenzordnung von beinahe $1,1$ wohingegen die globale Verfeinerung nur eine Konvergenzordnung von etwa $0,66$ erreicht – was sich auch gut mit der theoretischen Konvergenzordnung von $2/3$ deckt [Hac86]. Bei Verwendung des Indikators nach Zienkiewicz-Zhu wird immerhin eine Konvergenzordnung von circa $0,9$ erreicht.

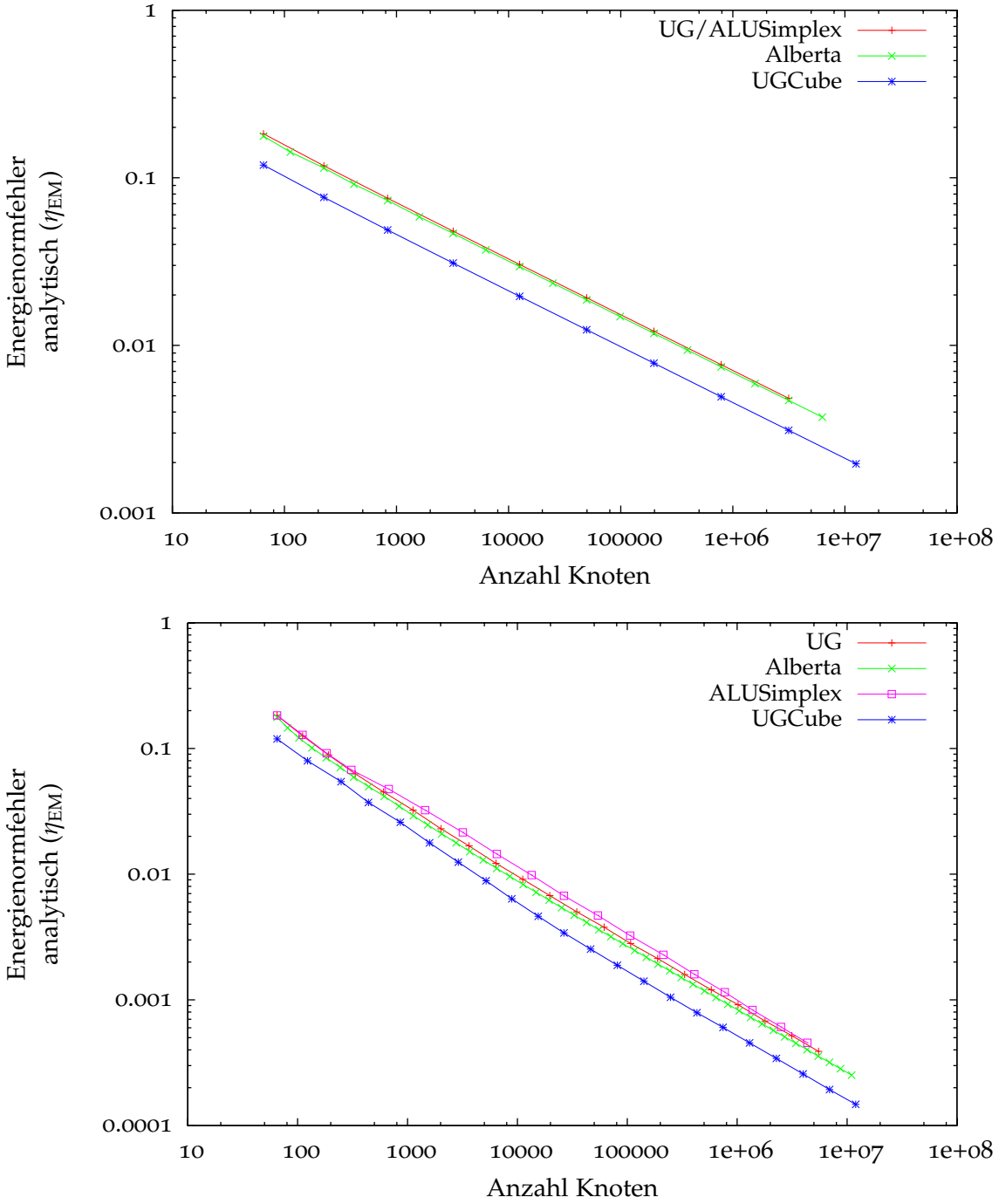


Abbildung 4.3.3: Vergleich von Gitterbibliotheken bei globaler Verfeinerung **(oben)** und adaptiver Verfeinerung mit Strategie 1, $\alpha = 25\%$ und Indikator $\eta_{EE,T}$ **(unten)**.

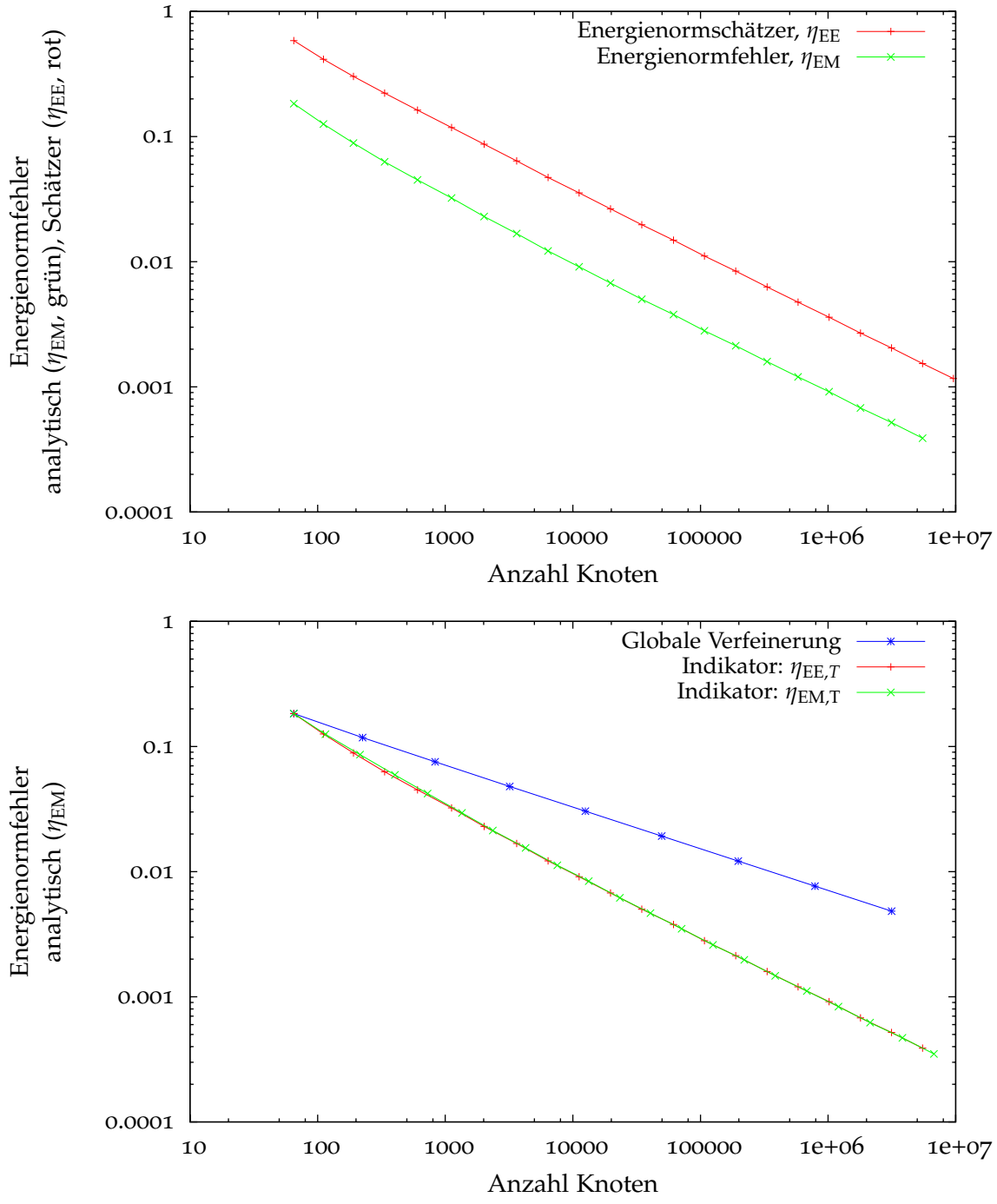


Abbildung 4.3.4: Vergleich des Energienormschätzers mit dem analytischen Fehler bei adaptiver Verfeinerung mit Strategie 1, $\alpha = 25\%$ und $\eta_{EE,T}$-Indikator **(oben)**. Vergleich des Energienormindikators $\eta_{EE,T}$ mit dem analytischen $\eta_{EM,T}$-Indikator für Strategie 1 mit $\alpha = 25\%$ **(unten)**.

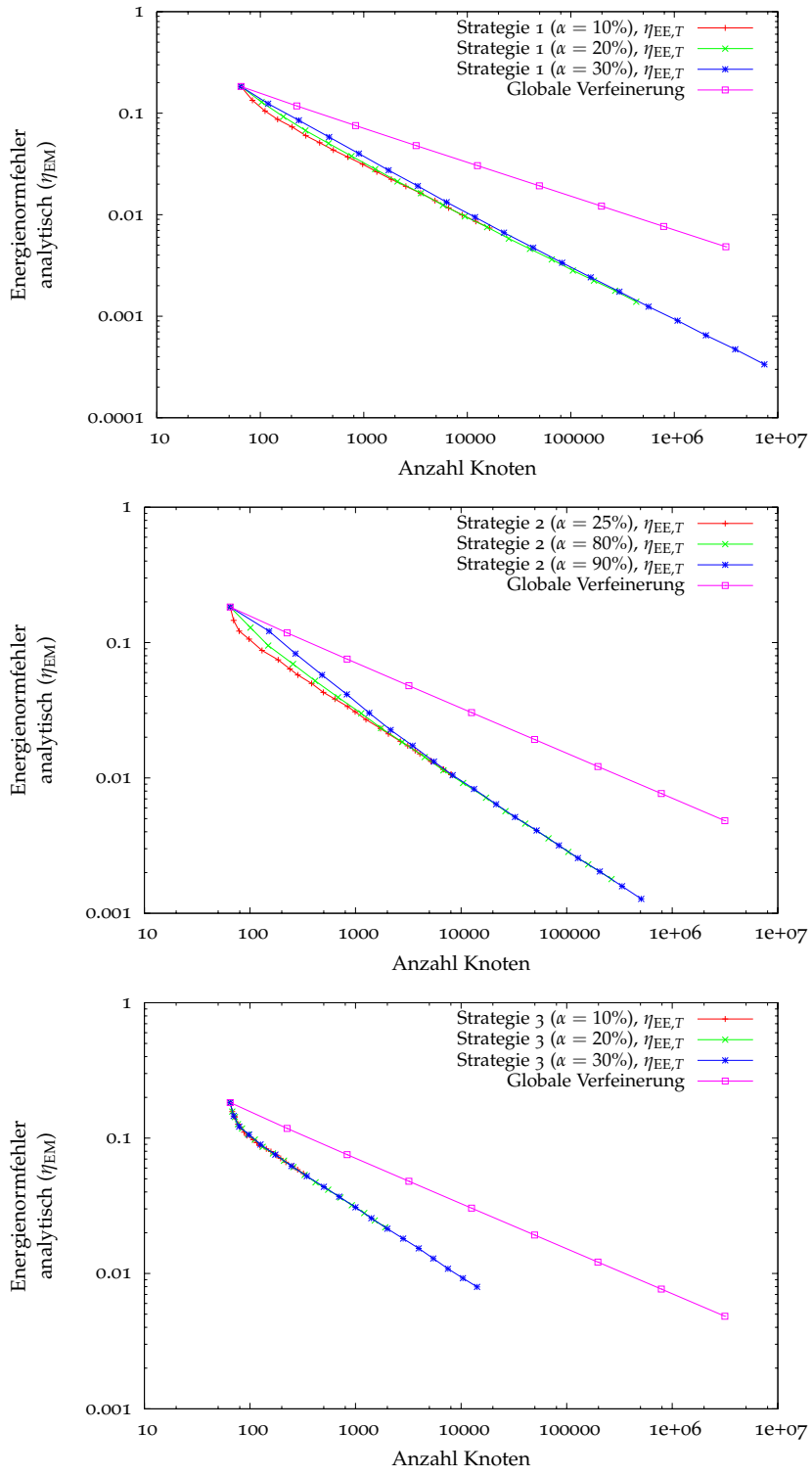


Abbildung 4.3.5: Vergleich von Parameterwerten α mit Energienormindikator $\eta_{EE,T}$ für Strategie 1 **(oben)**, für Strategie 2 **(Mitte)** und für Strategie 3 **(unten)**.

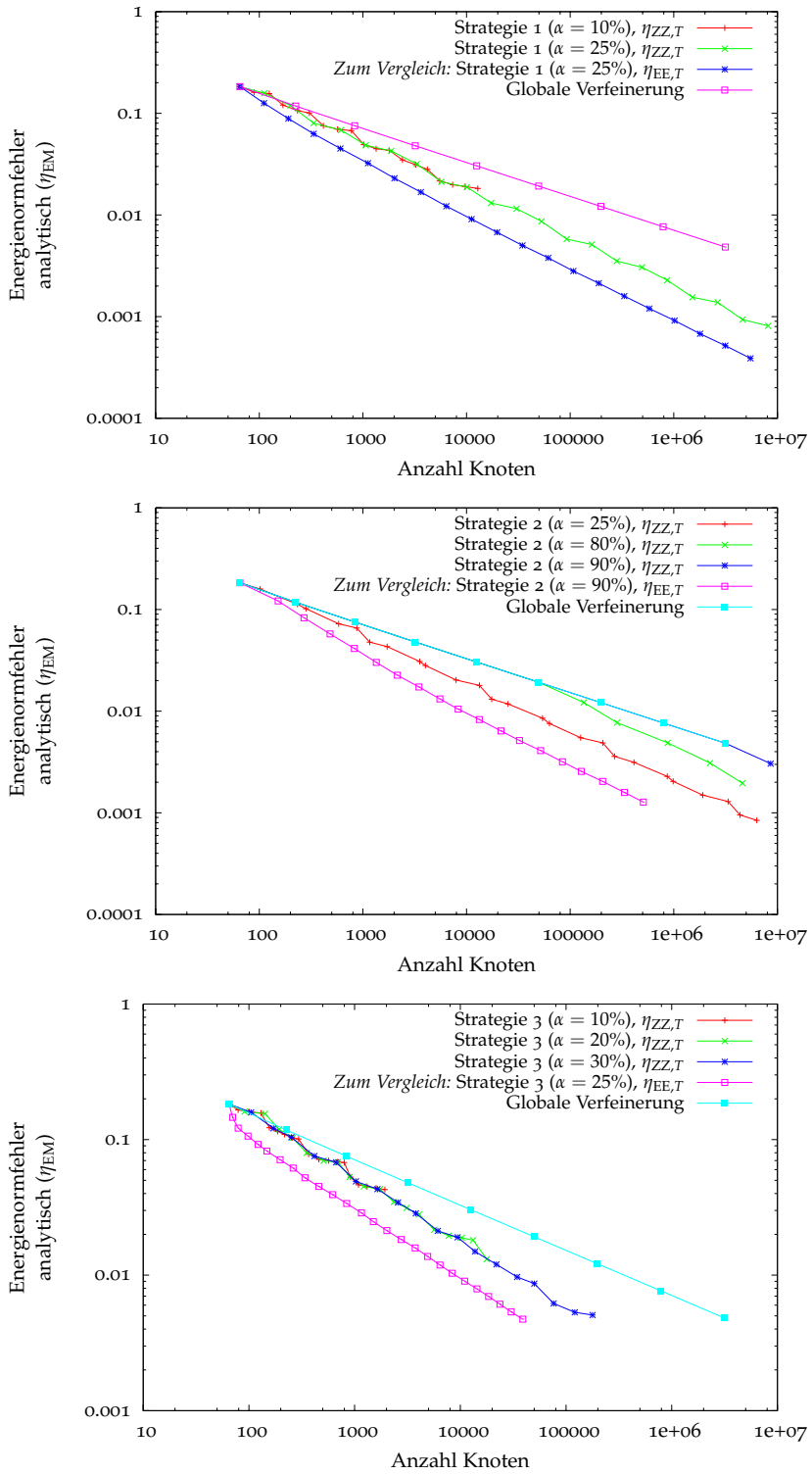


Abbildung 4.3.6: Vergleich von Parameterwerten α mit Indikator $\eta_{ZZ,T}$ nach Zienkiewicz-Zhu für Strategie 1 **(oben)**, für Strategie 2 **(Mitte)** und für Strategie 3 **(unten)**.

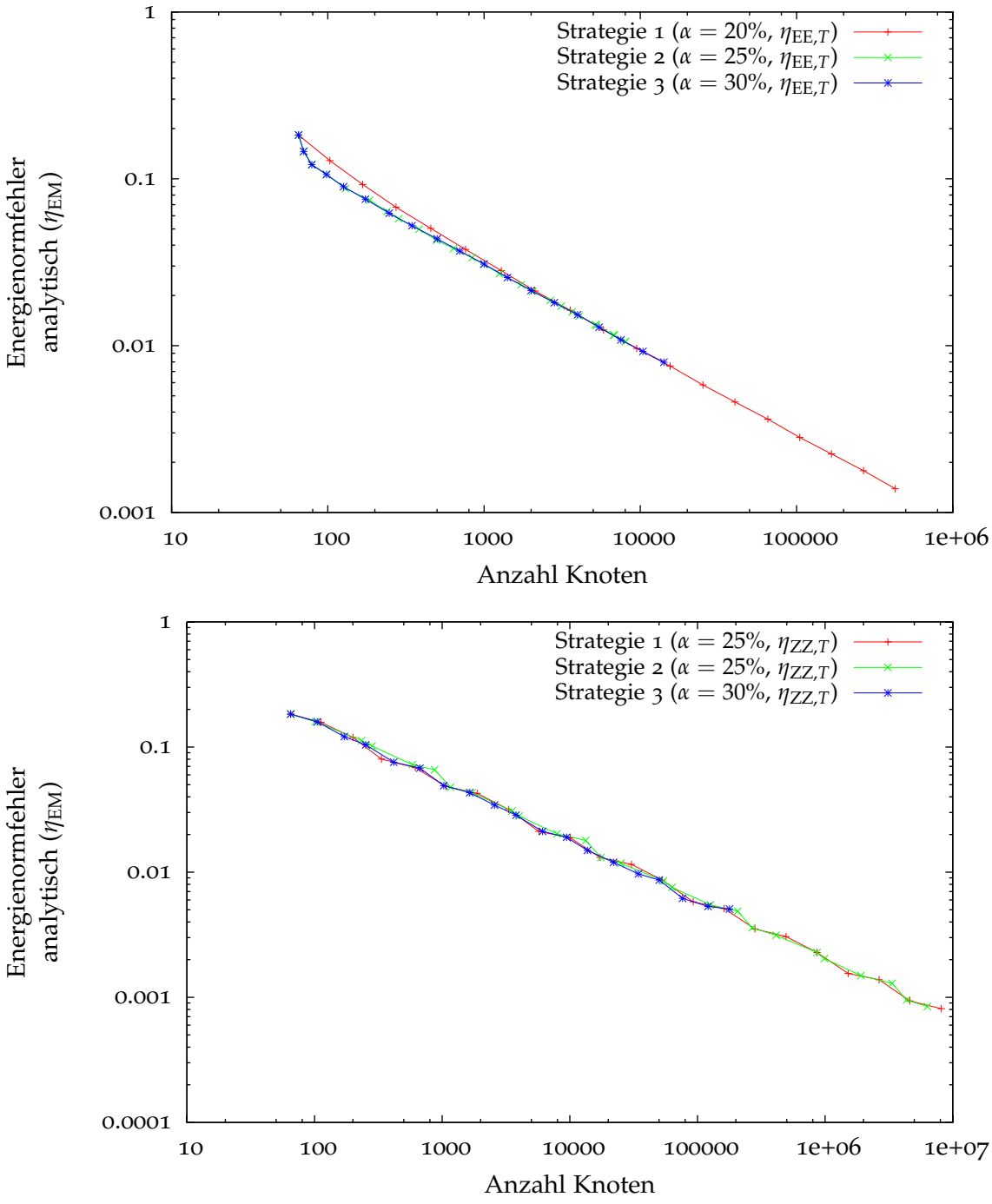


Abbildung 4.3.7: Vergleich der Strategien 1 bis 3 für den residualen Energienormindikator **(oben)** und den Indikator nach Zienkiewicz-Zhu **(unten)**.

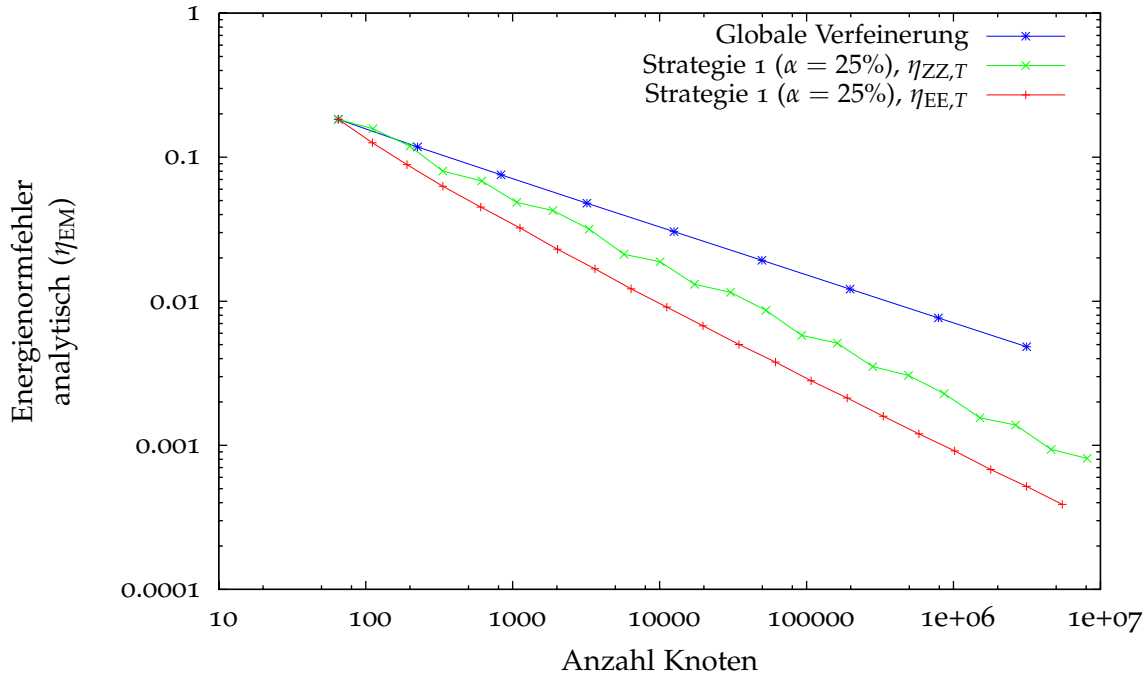


Abbildung 4.3.8: Vergleich adaptiver Verfeinerung mit globaler Verfeinerung

4.4 Modellproblem GESCHLITZTER WÜRFEL

Dieses dreidimensionale Problem ist auf dem Würfel $\Omega := (-1/2, 1/2)^3$ in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) gegeben durch

$$\begin{aligned} -\Delta u &= q && \text{in } \Omega, \\ u &= r^{1/2} \sin(1/2\,\phi)\, h(z) && \text{auf } \Gamma_D := \partial\Omega \setminus \Gamma_N, \\ -\nu \cdot \nabla u &= 0 && \text{auf } \Gamma_N := \{(x, y, z) \mid y = -1/2 \text{ und } x < 0\}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei die rechte Seite q so gewählt wird, dass $u(r, \phi, z) = r^{1/2} \sin(1/2\,\phi)\, h(z)$ die Lösung des Problems ist. Die Funktion h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ in z-Richtung wurde als quadratisches Polynom so gewählt, dass $h(-1/2) = h(1/2) = 1 - \varepsilon$ und $h(0) = 1$ gelten, das heißt in Monomdarstellung gilt $h(z) = -4\varepsilon z^2 + 1$. Für ε wurde der Wert $1/5$ gewählt, in Abschnitt 4.4.1 weisen wir jedoch auf eine Besonderheit bei der Wahl von $\varepsilon = 1$ hin.

Durch Einsetzen der vorgegebenen Lösung u in $q = -\Delta u$ erhalten wir für die rechte Seite

$$q = 8\varepsilon\, r^{1/2} \sin(1/2\,\phi). \tag{4.5}$$

Dabei wird ausgenutzt, dass $k(r, \phi) := r^{1/2} \sin(1/2\,\phi)$ Lösung eines zweidimensionalen Problems mit Schlitz ist, für das $-\Delta k = 0$ mit dem zweidimensionalen Laplaceoperator gilt [Baso8]. Durch die homogenen Neumannrandbedingungen ist dieses Problem äquivalent zu einem an der Ebene $y = -1/2$ gespiegelten Dirichletproblem mit einem Schlitz, der durch Γ_N wie oben gegeben ist.

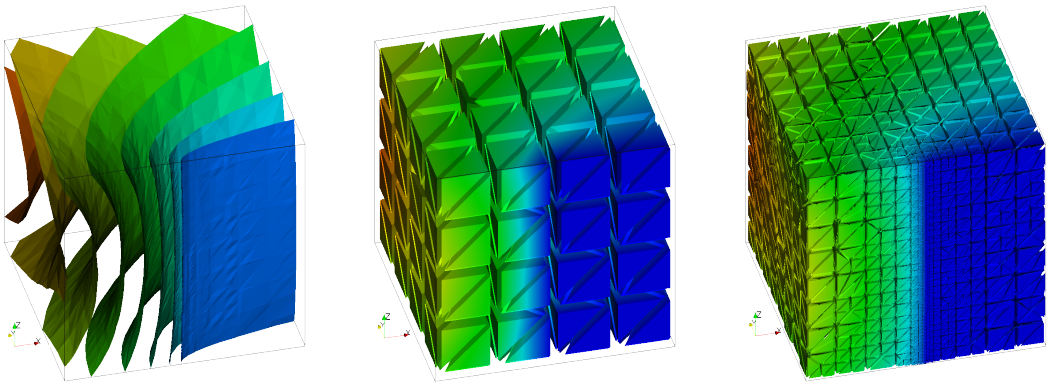
Die Lösung u hat auf der Kante $\{(0, -1/2, z) \mid -1/2 \leq z \leq 1/2\}$ eine Singularität im Gradienten ∇u. In Abbildung 4.4.1 (a) sind einige Isoflächen von u dargestellt. Wie das adaptiv verfeinerte Gitter in Teil (c) zeigt, wird um diese Kante auch stärker verfeinert als im Rest des Gebiets. Der Neumannrand ist in der Abbildung die linke Hälfte der vorderen Seitenfläche des Gebiets.

Numerische Ergebnisse

Vergleich der Gitterbibliotheken

Auch im Dreidimensionalen bestätigt sich, dass es kaum einen Unterschied zwischen den Gitterbibliotheken gibt, wie Abbildung 4.4.2 zeigt. Dass die Kurve von UGCube zu Beginn ein wenig flacher verläuft als die von ALUCube könnte an den Abschlusselementen liegen, die im Vergleich zum Würfel schlechtere numerische Eigenschaften haben.

Die folgenden Analysen wurden mit Hilfe von UG durchgeführt sind jedoch prinzipiell auch für die anderen Gitterbibliotheken gültig.



(a) **(b)** **(c)**

Abbildung 4.4.1: Einige Isoflächen der numerischen Lösung des Problems GESCHLITZTER WÜRFEL **(a)**. Das Grobgitter $\mathcal{T}_0$ zu Modellproblem GESCHLITZTER WÜRFEL **(b)**, sowie ein adaptiv verfeinertes Gitter nach fünf Iterationen **(c)**, berechnet mit Strategie 3, $\alpha = 50\%$ und $\eta_{\mathrm{EE},T}$.

Bewertung Energienormschätzer

Wie in den vorangegangenen Modellproblemen, stellt sich der Energienormschätzer laut Abbildung 4.4.3 auch für das Problem GESCHLITZTER WÜRFEL als sehr zuverlässig sowohl zur Messung, als auch zur Indikation des Fehlers heraus. Der Überschätzungsfaktor beträgt circa $3,75$.

Einfluss des Parameters der Verfeinerungsstrategie

Für den Energienormindikator sehen wir an Abbildung 4.4.4, dass die Wahl von α bei den Strategien 2 und 3 wenig Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit hat. Da bei diesen Strategien die Indikatorwerte quantitativ einfließen, lässt dies darauf schließen, dass der Energienormindikator $\eta_{\mathrm{EE},T}$ den Fehler auch quantitativ gut erfasst.

Bei Strategie 1 konvergiert das adaptive Verfahren jedoch deutlich langsamer, wenn man einen zu großen Anteil an Elementen zur Unterteilung auswählt. Außerdem hat Strategie 1 anfänglich mehr Probleme als die beiden anderen Strategien, das Gitter an die Lokalität der Irregularität anzupassen.

Für den Indikator nach Zienkiewicz-Zhu ist im Gegensatz dazu in Abbildung 4.4.5, vor allem an Strategie 2 ersichtlich, dass dieser Indikator den Fehler nicht sonderlich gut quantitativ fassen kann. An Strategie 1 sehen wir, dass es dem Indikator aber immerhin gelingt, den Fehler qualitativ besser anzuzeigen als bei globaler Verfeinerung.

Vergleich der Verfeinerungsstrategien

Abbildung 4.4.6 zeigt einen Vergleich unter den Strategien, jeweils mit geeignet gewähltem α. Für den Energienormschätzer wird bei Strategie 1 am Anfang zu viel verfeinert, sodass sie gegen die Strategien 2 und 3 ein wenig abfällt, dann aber dennoch die volle Konvergenzgeschwindigkeit erreicht. Strategie 2 und Strategie 3 sind für dieses Problem geeigneter und unterscheiden sich für diesen Indikator kaum – vorausgesetzt, der Parameter α wurde richtig gewählt.

Für den Indikator nach Zienkiewicz-Zhu ist die Wahl von α sehr heikel – speziell bei Strategie 2, sodass diese Strategie für diesen Indikator nicht zu empfehlen ist. Die anderen Strategien unterscheiden sich bei passender Wahl von α dagegen kaum, Strategie 1 scheint mit diesem Indikator jedoch robuster gegenüber der Wahl von α zu sein.

Zuletzt vergleichen wir wieder globale und adaptive Verfeinerung. In Abbildung 4.4.7 ist der Konvergenzverlauf für eine globale Verfeinerung und eine ausgewählte adaptive Verfeinerung dargestellt, jeweils mit Energienormindikator und Indikator nach Zienkiewicz-Zhu.

Auch hier zeigt sich, dass sich ein adaptives Verfahren lohnt, egal welcher Indikator verwendet wird. Der Mehraufwand für den etwas aufwendigeren Energienormindikator lohnt sich jedoch bei diesem Problem; vor allem ist dafür die Wahl der Strategie und von α deutlich einfacher.

4.4.1 Geschlitzter Würfel mit $\varepsilon = 1$

Schließlich wollen wir noch auf eine Kuriosität hinweisen, die bei der Untersuchung des Problems Geschlitzter Würfel mit dem Parameterwert $\varepsilon = 1$ für die Funktion h aufgetreten ist: Wie Abbildung 4.4.8 zeigt, ist dann eine adaptive Verfeinerung lange Zeit schlechter als eine globale Verfeinerung. Erst bei circa hunderttausend Knoten wird die selbe Fehlerreduktion wie bei globaler Verfeinerung erreicht. Die Abbildung zeigt dies am Beispiel von ALUSimplex unter Verwendung von Strategie 1 mit $\alpha = 20\%$ und dem residualen Energienormindikator $\eta_{\mathrm{EE},T}$. Für andere Kombinationen aus Gitterbibliotheken, Strategien und Parameterwerten für α ergeben sich jedoch ähnliche Konvergenzverläufe.

Dies könnte an den Abschlusselementen liegen, die für $\varepsilon = 1$ stärker ins Gewicht fallen und schlechtere numerische Eigenschaften haben. Dies könnte daran liegen, dass h hierfür die Singularität des Gradienten zum Rand hin stärker „ausblendet“ und die Adaptionsstrategie deshalb länger braucht, um das Gitter an die Singularität des Gradienten anzupassen.

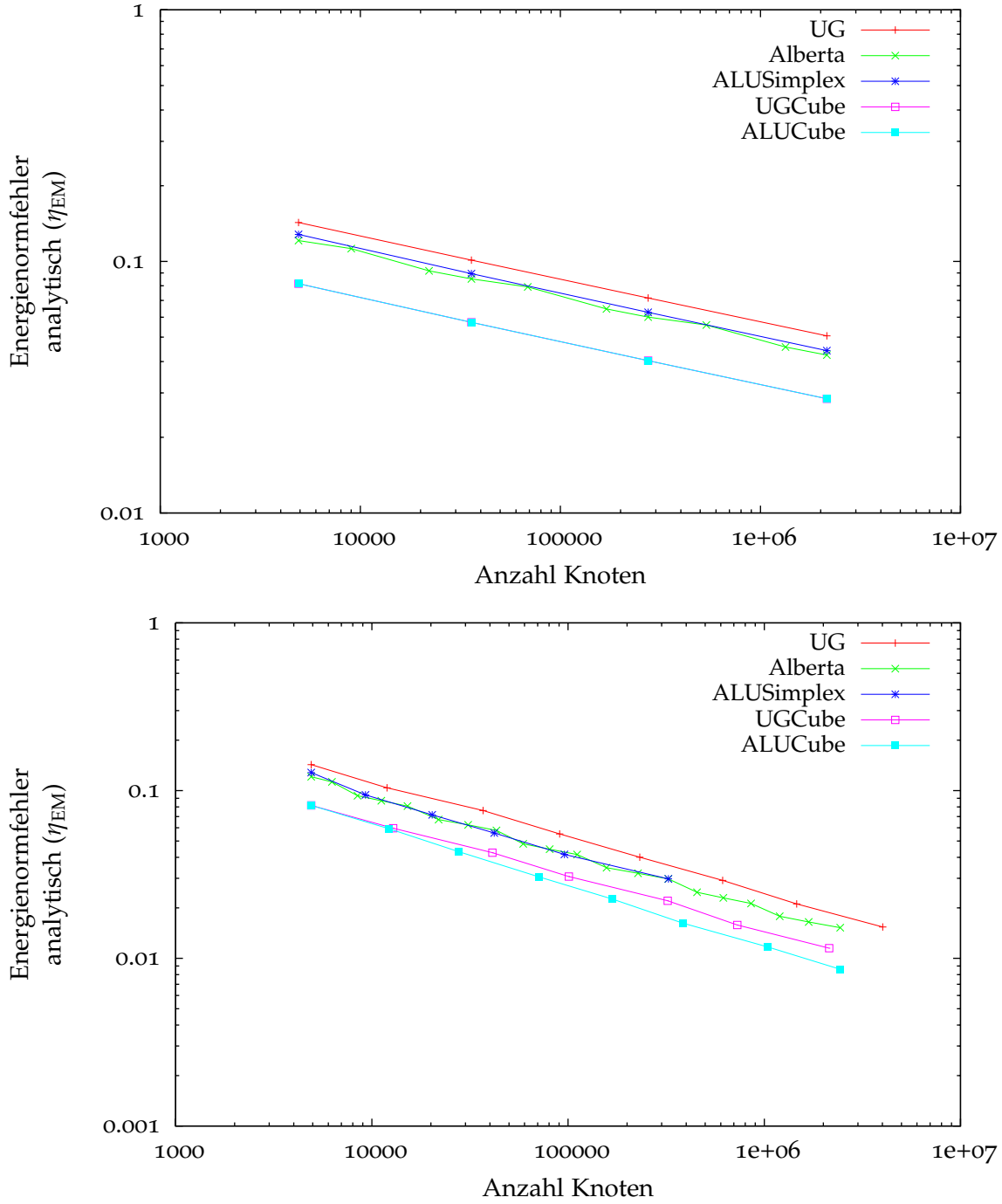


Abbildung 4.4.2: Vergleich von Gitterbibliotheken bei globaler Verfeinerung **(oben)** und adaptiver Verfeinerung mit Strategie 1 und Indikator $\eta_{EE,T}$ **(unten)**.

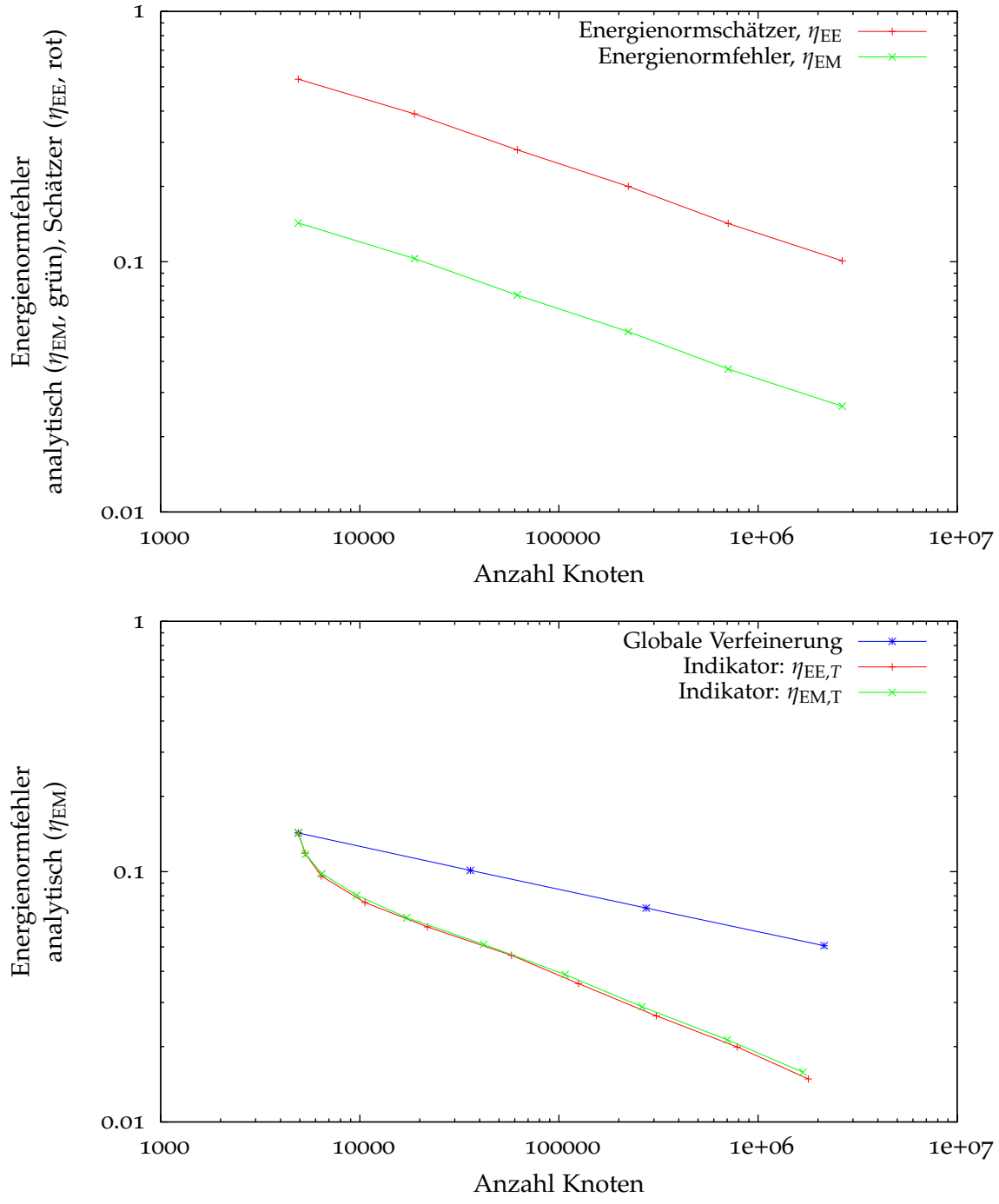


Abbildung 4.4.3: Vergleich des Energienormschätzers mit dem analytischen Fehler bei adaptiver Verfeinerung mit Strategie 1, $\alpha = 20\%$ und $\eta_{EE,T}$-Indikator **(oben)**. Vergleich des Energienormindikators $\eta_{EE,T}$ mit dem analytischen $\eta_{EM,T}$-Indikator für Strategie 1 mit $\alpha = 20\%$ **(unten)**.

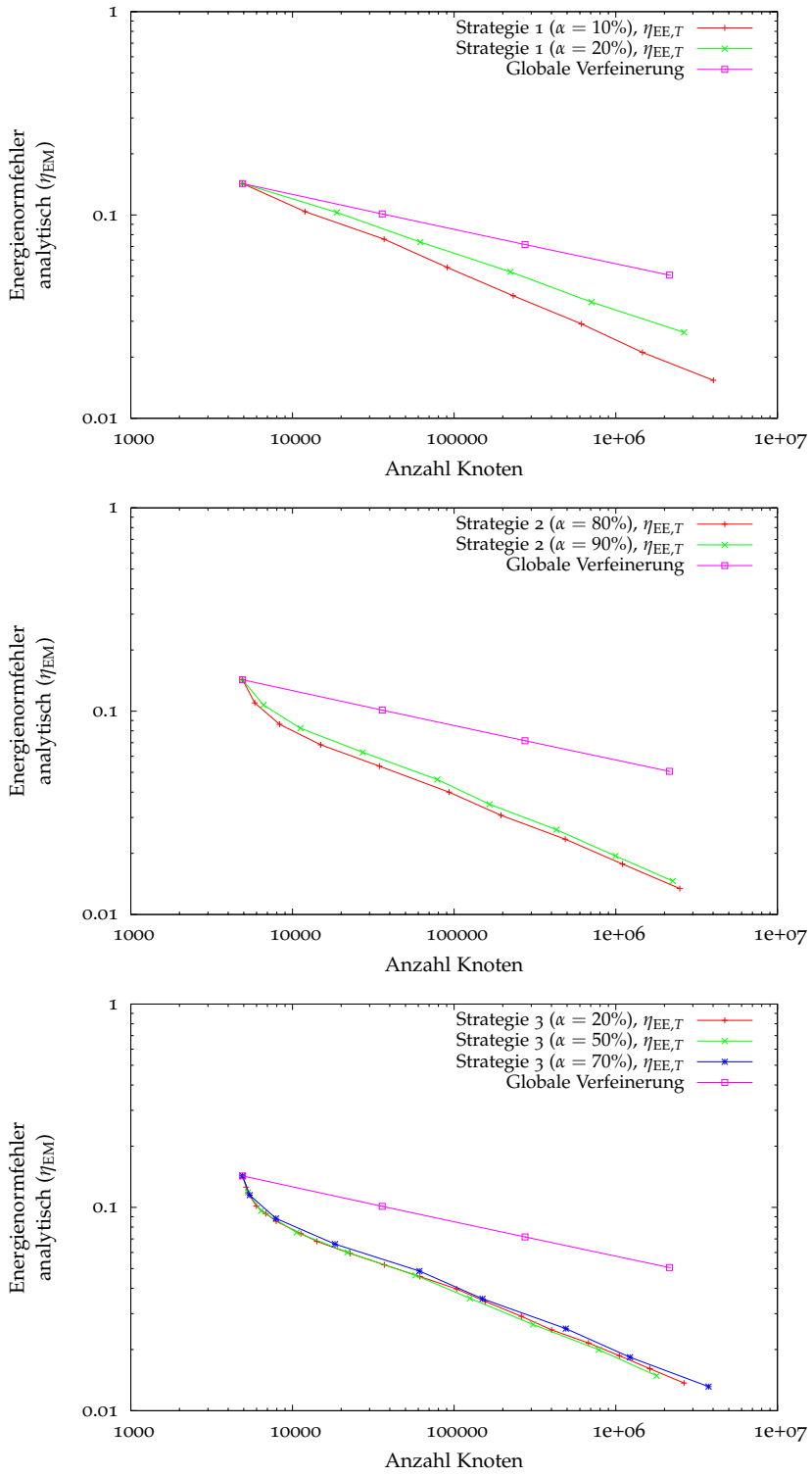


Abbildung 4.4.4: Vergleich von Parameterwerten α mit Energiennormindikator $\eta_{EE,T}$ für Strategie 1 **(oben)**, für Strategie 2 **(Mitte)** und für Strategie 3 **(unten)**.

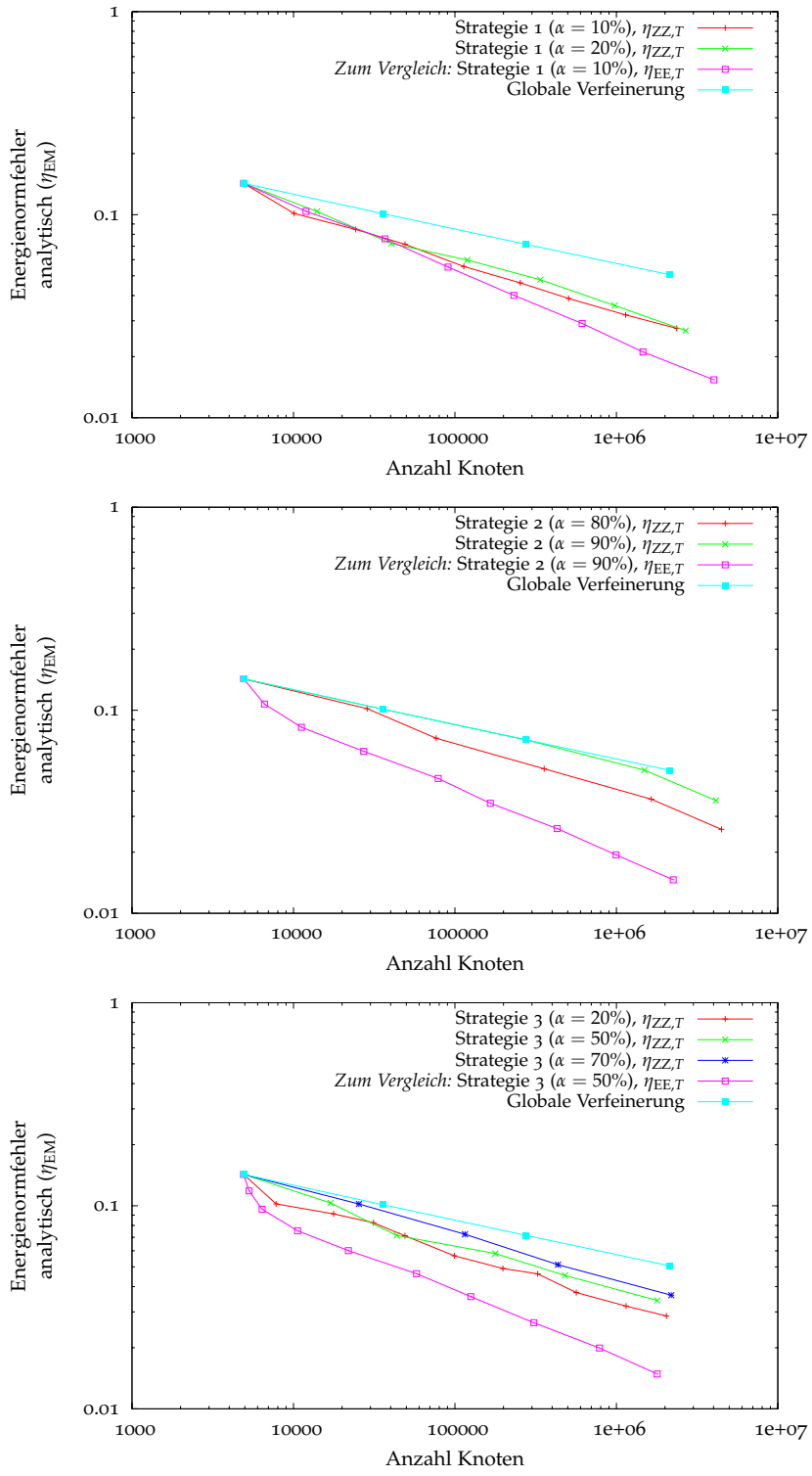


Abbildung 4.4.5: Vergleich von Parameterwerten α mit Indikator $\eta_{ZZ,T}$ nach Zienkiewicz-Zhu für Strategie 1 **(oben)**, für Strategie 2 **(Mitte)** und für Strategie 3 **(unten)**.

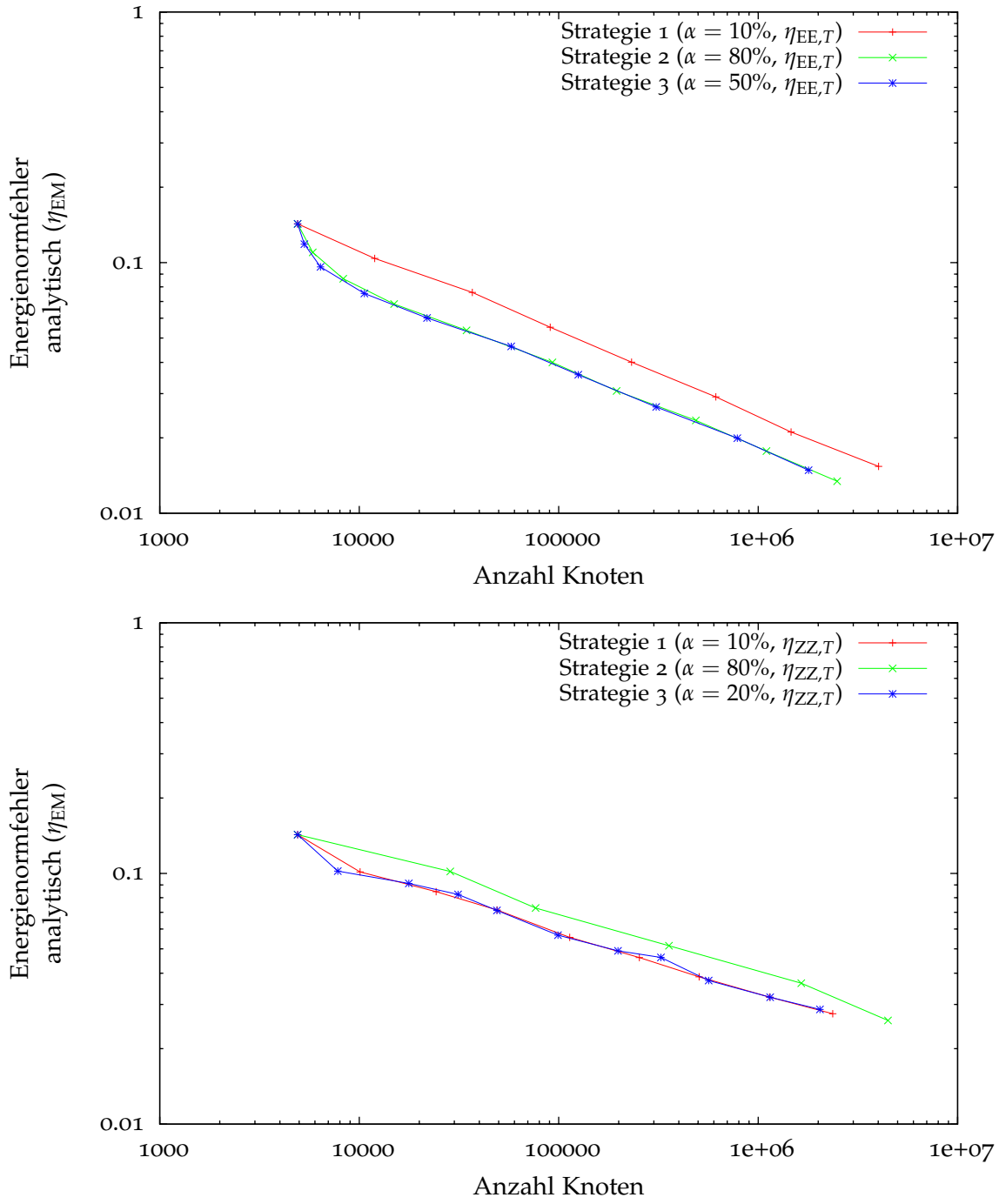


Abbildung 4.4.6: Vergleich der Strategien 1 bis 3 für den residualen Energienormindikator **(oben)** und den Indikator nach Zienkiewicz-Zhu **(unten)**.

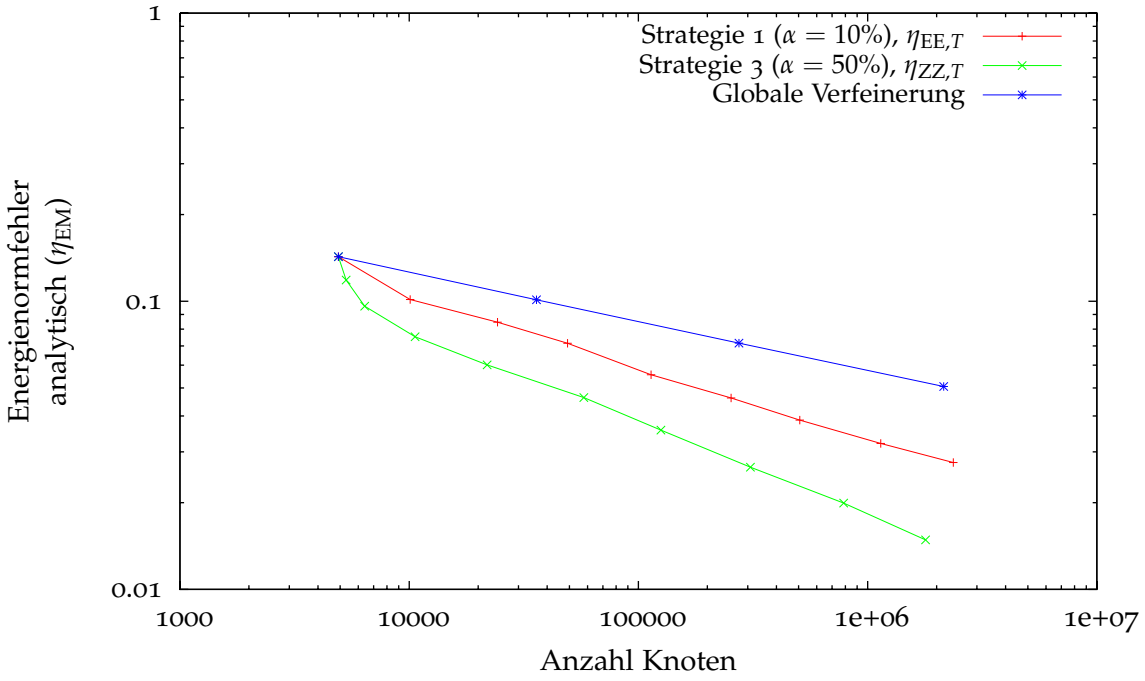


Abbildung 4.4.7: Vergleich adaptiver Verfeinerung mit globaler Verfeinerung.

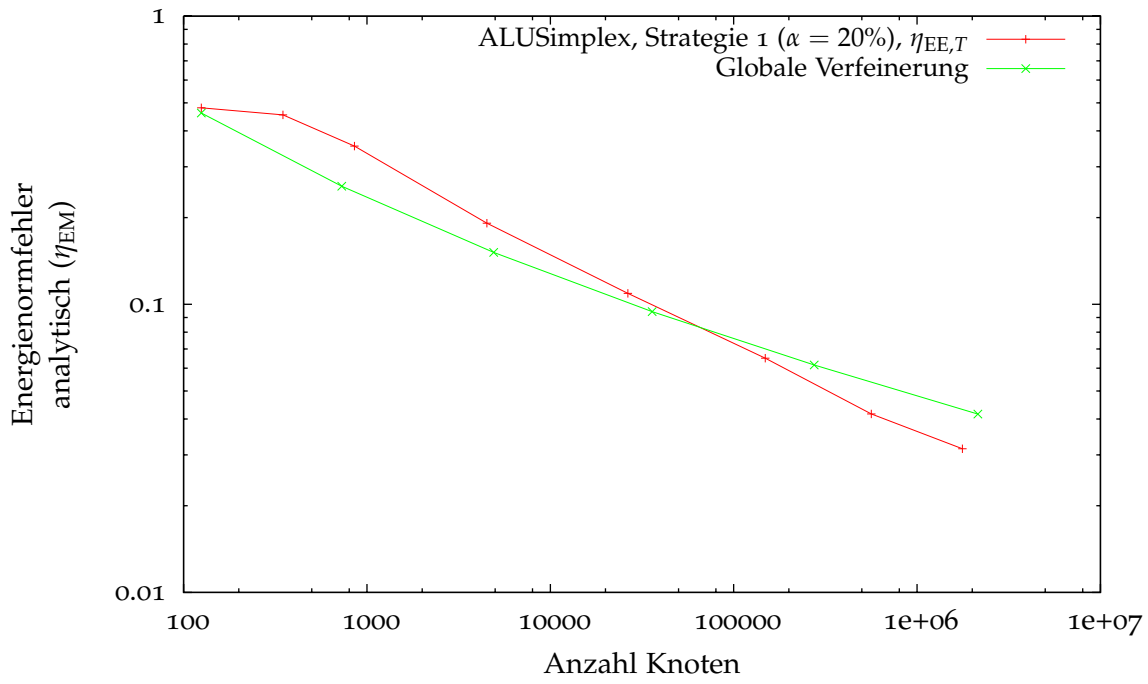


Abbildung 4.4.8: Vergleich adaptiver Verfeinerung mit globaler Verfeinerung für GESCHLITZTER WÜRFEL mit Parameter $\varepsilon = 1$.

4.5 Modellproblem SCHACHBRETT

Als letztes Modellproblem wollen wir folgendes Problem betrachten, dessen Besonderheit nicht in der rechten Seite oder der Gebietsform von Ω liegt, sondern in der Matrix K:

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(K\nabla u) &= 2 \quad \text{in } \Omega := (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D := \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dabei ist die Matrix K als eine 4×4-Schachbrettstruktur definiert, das heißt für einen Punkt $(x, y) \in \Omega$ gilt

$$K(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 4(x+y) \bmod 2 < 1, \\ \varepsilon & \text{sonst,} \end{cases} \tag{4.7}$$

wobei $\varepsilon \ll 1$ gewählt wird. In diesem Abschnitt wurde $\varepsilon = 10^{-2}$ gesetzt.

Für dieses Problem ist keine analytische Lösung bekannt, in Abbildung 4.5.1 ist jedoch eine numerisch berechnete Approximation abgebildet. An den Stellen der inneren Sprünge von K hat der Fluss $K\nabla u$ zum Teil eine sehr starke Singularität, die sich über ε kontrollieren lässt, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$ ist und außerdem gilt $\delta \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Wie man an dem adaptiv verfeinerten Gitter in Abbildung 4.5.2 (b) sehen kann, wird dies von dem adaptiven Verfahren aber sehr gut erkannt und es wird beinahe nur an diesen Stellen verfeinert – vorausgesetzt, die Parameter der adaptiven Strategie werden richtig gewählt.

In Abbildung 4.5.3 ist der Konvergenzverlauf verschiedener Strategien abgebildet. Da für dieses Problem keine analytische Lösung bekannt ist, wird darin der Fehlerwert des Energienormschätzers aufgetragen. Wie an den vorangegangenen Modellproblemen deutlich wird, sollte dieser den Fehler in Energienorm jedoch bis auf einen konstanten Faktor sehr gut erfassen. Es ist gut ersichtlich, dass eine globale Verfeinerung bei diesem Problem eine äußerst schlechte Wahl ist. Wir sehen aber auch, dass bei schlecht gewählter adaptiver Verfeinerung sehr viel gegenüber einer guten adaptiven Strategie zu verlieren ist. Die Berechnungen wurden mit der Gitterbibliothek UGCube durchgeführt.

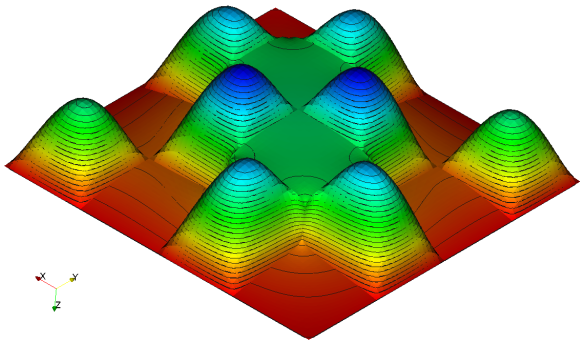
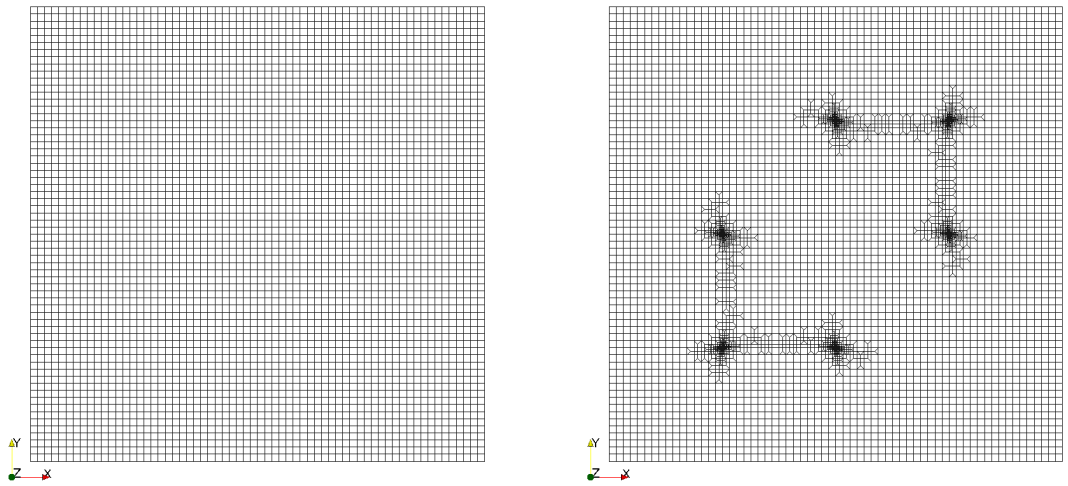


Abbildung 4.5.1: Die numerische Lösung zu Modellproblem SCHACHBRETT.



(a) **(b)**

Abbildung 4.5.2: Das Grobgitter $\mathcal{T}_0$ zu Modellproblem SCHACHBRETT **(a)**, sowie ein adaptiv verfeinertes Gitter nach 28 Iterationen **(b)**, berechnet mit Strategie 3, $\alpha = 25\%$ und $\eta_{\mathrm{EE},T}$.

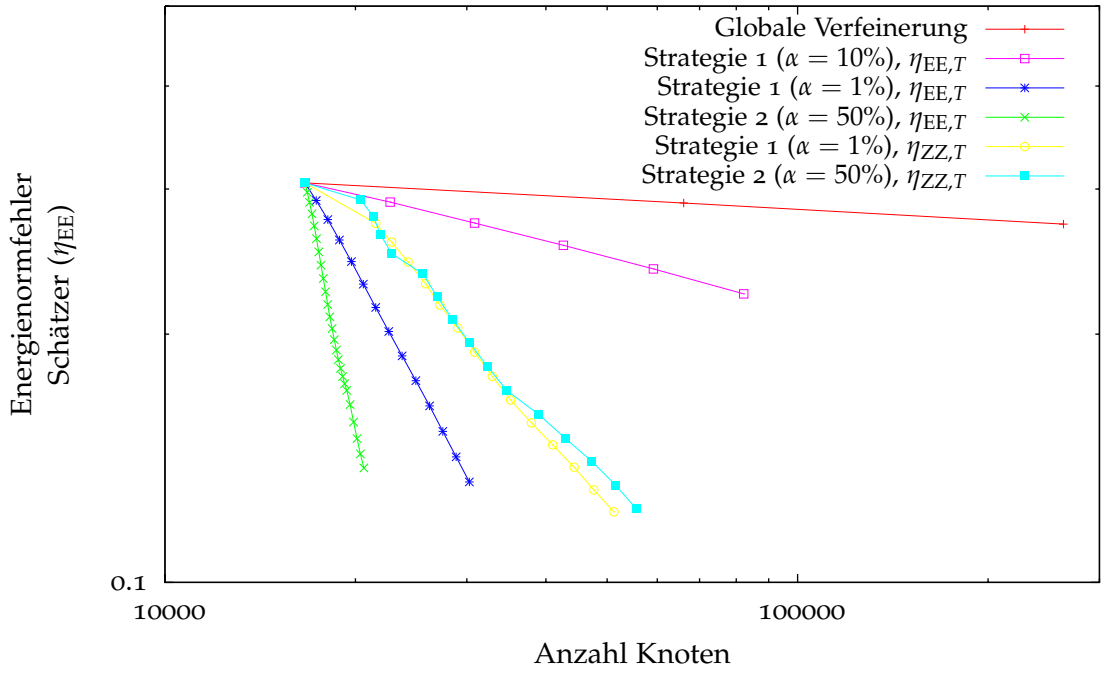


Abbildung 4.5.3: Vergleich globaler Verfeinerung und diverser adaptiver Strategien.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein numerisches Verfahren zur Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen implementiert und der Verlauf des Fehlers bei Verwendung unterschiedlicher Adaptionsstrategien zur Gitterverfeinerung anhand einiger Modellprobleme untereinander verglichen.

Wir haben uns dabei auf den Fehler in der Energienorm beschränkt und einen residualen Schätzer kennengelernt, der sich im Vergleich mit dem tatsächlichen Energienormfehler an den betrachteten Modellproblemen als sehr zuverlässig herausgestellt hat.

Des Weiteren haben wir zwei verschiedene Fehlerindikatoren untersucht: Den residualen Energienormindikator, der sich auf natürliche Weise aus dem Energienormschätzer ergeben hat und einen heuristisch motivierten Indikator nach Zienkiewicz-Zhu, der sich jedoch durchweg als deutlich unzuverlässiger als der Energienormindikator herausgestellt hat. Insbesondere scheint er für sehr regulär Probleme unbrauchbar, da hierfür die Konvergenz für ein adaptives Verfahren mit Indikator nach Zienkiewicz-Zhu zum Teil sogar schlechter ist als bei globaler Verfeinerung – wobei bei derlei Problemen auch kein Vorteil durch ein adaptives Verfahren zu erwarten ist. Allerdings ist dieser Indikator relativ einfach zu implementieren und bei singulären Problemen ist er bei geeignet gewählten Rahmenbedingungen eventuell hinreichend effizient.

Darüber hinaus wurden drei Verfeinerungsstrategien untersucht, die auf Basis des berechneten Fehlerindikators eine Menge von Elementen zur Unterteilung auswählt. Hier lässt sich keine eindeutige Aussage treffen, welche Strategie am besten ist. Es hat sich jedoch gezeigt, dass es bei Verwendung des Indikators nach Zienkiewicz-Zhu nicht ratsam ist, eine der beiden Strategien 2 oder 3 zu verwenden, bei denen die Indikatorwerte quantitativ in die Auswahl eingehen. Die Wahl des Parameters α der Strategie muss allerdings für jedes Problem speziell angepasst werden. Vor allem bei „stark singulären“ dreidimensionalen Problemen scheinen jedoch die Strategien 2 und 3, jeweils mit dem resdiualen Energienormindikator eine gute Wahl zu sein; es ist aber darauf zu achten, dass nicht durch eine zu kleine Wahl des Verfeinerungsparameters zu viele Schritte gemacht werden.

Schließlich wurde noch der Einfluss der Gitterbibliothek untersucht, die zur Repräsentation des Gitters verwendet wird. Diese legt insbesondere den Elementtyp und die Art der

Unterteilung fest. Hier haben wir festgestellt, dass es nahezu keinen Unterschied macht, welche Gitterbibliothek benutzt wird. Einzig die quadrilateralen Gitter waren um einen kleinen konstanten Faktor besser, sind jedoch in numerischen Verfahren auch aufwendiger – zum Beispiel ist eine numerische Quadratur auf einem Viereck zeitaufwendiger als auf einem Dreieck.

Es ist jedoch zu betonen, dass die getroffenen Aussagen eigentlich nur für die untersuchten Probleme gültig sind. Es besteht aber die begründete Hoffnung, dass sich diese zumindest teilweise auf andere Probleme ähnlicher Art übertragen lassen.

Ausblick

Raum für Erweiterung gibt es bei dieser Arbeit nahezu beliebig. Zum Einen wäre es natürlich wünschenswert, die Betrachtungen auf mehr Probleme zu erweitern, um so eine breitere Basis für Entscheidungen zu einem konkreten Problem an die Hand zu geben. Auch andere sinnvolle Verfeinerungsstrategien sind durchaus denkbar.

Außerdem haben wir in dieser Arbeit nur den Fehler in Energienorm betrachtet. Es ist naheliegend andere Zielmaße zu betrachten, zum Beispiel den L^2-Fehler oder ganz allgemein ein beliebiges lineares Fehlerfunktional.

Damit zusammenhängend könnte man duale oder implizite Schätzer implementieren und für verschiedene Zielmaße miteinander vergleichen. Speziell die dualen Schätzer könnten durch Berechnung und Auswertung des dualen Problems die Implementierung von Schätzern und Indikatoren zu beliebigen linearen Fehlerfunktionalen erlauben. Implizite Schätzer könnten über die Lösungen kleiner, lokaler Probleme eventuell dazu beitragen, den Überschätzungsfaktor zu verringern.

Weiterhin könnte man noch andere Typen als elliptische partielle Differentialgleichungen integrieren und beispielsweise für parabolische und hyperbolische Probleme eine gekoppelte Raum- und Zeitadaptivität untersuchen. Hierfür würden sich wieder duale Schätzer anbieten, da diese insbesondere auch im zeitabhängigen Fall, etwa bei konvektiven Strömungen, die Fehlerquelle zu einem gemessenen Fehler zuverlässig lokalisieren können.

Schließlich wäre eine Untersuchung des Gesamtaufwandes an Speicher und Zeit bei gegebenem Ziel wünschenswert. Diese Arbeit hatte zum Ziel qualitative Aussagen über die Konvergenz der Verfahren zu machen. Dazu wurde als Basis die Anzahl der Knoten verwendet, für eine aussagekräftige Zeitmessung wäre eine Optimierung der vorliegenden Implementierung unerlässlich. Im Zuge dieser Optimierung wäre auch eine Parallelisierung des Programmes denkbar, um insbesondere Aussagen über die Leistung der Gitterbibliotheken für den parallelen Fall treffen zu können.

Anhang A

Gitter

Unter einem *allgemeinen Gitter* $\mathcal{T}$ zu einem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ verstehen wir eine endliche Partition

$$\mathcal{T} := \{T_i \mid 1 \leq i \leq N, T_i \text{ offen}\} \text{ mit } N < \infty, \tag{A.1}$$

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \overline{T_i}\,, \tag{A.2}$$

$$i \neq j \implies T_i \cap T_j = \emptyset \tag{A.3}$$

von Ω. Wir nennen die $T_i \subset \mathbf{R}^d$ *Elemente* des Gitters $\mathcal{T}$.

Wir wollen dieses sehr allgemeine Konzept eines Gitters ein wenig einschränken und verfolgen einen Ansatz, der in der Gitterbibliothek **Dune** Verwendung findet, die für die Realisierung des praktischen Teils in Kapitel 4 verwendet wurde.

Wir nehmen an, dass eine – über alle Verfeinerungsschritte[1] feste – endliche Menge $\mathcal{T}^{\text{ref}}$ sogenannter *Referenzelemente* $T^{\text{ref}} \in \mathcal{T}^{\text{ref}}$ bekannt ist mit $T^{\text{ref}} \subset \mathbf{R}^d$. Als Referenzelemente lassen wir d-dimensionale Körper zu, die sich als innerer Kern eines beliebigen konvexen Polytops darstellen lassen. Ein konvexes Polytop ist dabei eine Teilmenge des $\mathbf{R}^d$, die sich als konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten darstellen lässt, oder, äquivalent dazu, eine beschränkte Teilmenge des $\mathbf{R}^d$, die sich als Schnitt einer endlichen Anzahl abgeschlossener Halbräume schreiben lässt. Insbesondere sind die Referenzelemente also offen.

Sei $K = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ die Menge der definierenden Eckpunkte des konvexen Polytops, das heißt es gilt $\text{conv}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \overline{T^{\text{ref}}}$. Wir definieren induktiv *Entitäten* eines Elements. Zunächst ist das Element selbst eine *Kodimension*-0-*Entität* von T^{ref} und es gibt keine weiteren Entitäten dieser Kodimension. Für $0 < c \leq d$ ist eine $(d-c)$-dimensionale Menge M mit $M = \text{conv}\, K'$ für ein $K' \subset K$, die auf der Berandung einer Kodimension-$(c+1)$-Entität des Referenzelements liegt, ein *Kodimension-c-Entität* von T^{ref}. Eine Kodimension-1-Entität heißt auch *Facette*, eine Kodimension-$(d-1)$-Entität *Kante* und eine Kodimension-d-Entität *Knoten* des Referenzelements.

[1] Zu Gitterverfeinerung siehe Abschnitt 3.4 über Unterteilungsverfahren.

Ein *Gitter* oder eine *Triangulierung* ist eine Partitionierung (A.1) von Ω, sodass die Elemente T_i durch Instanzen der Referenzelemente festliegen. Eine *Instanz* (T_i^{ref}, m_i) ist dabei durch ein Referenzelement $T_i^{\text{ref}} \in \mathcal{T}^{\text{ref}}$ und eine invertierbare Transformation m_i: $T^{\text{ref}} \to \Omega$ definiert. Die Transformation m_i bestimmt, wie das Referenzelement in das Gebiet Ω eingebettet ist. Das Element $T_i := m_i(T_i^{\text{ref}})$ ist dann durch das Bild des Referenzelementes T_i^{ref} unter der Transformation m_i gegeben. Zusammenfassend ist ein Gitter $\mathcal{T}$ also eine Menge, die Gleichung (A.1) erfüllt und für die gilt

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{1 \le i \le N} \overline{m_i(T_i^{\text{ref}})}\,, \tag{A.4}$$

$$i \neq j \implies m_i(T_i^{\text{ref}}) \cap m_j(T_j^{\text{ref}}) = \emptyset. \tag{A.5}$$

Falls die Menge der Referenzelemente $\mathcal{T}^{\text{ref}}$ ausschließlich aus einem Simplex[2] besteht, dann heißt das zugehörige Gitter $\mathcal{T}$ *simplizial*. Besteht $\mathcal{T}^{\text{ref}}$ ausschließlich aus einem Hyperwürfel[3], so heißt das Gitter *quadrilateral*. Enthält $\mathcal{T}^{\text{ref}}$ verschiedene Elemente, beispielsweise Würfel, Pyramiden, Prismen und Tetraeder, dann ist $\mathcal{T}$ ein Gitter mit *gemischten Elementen*.

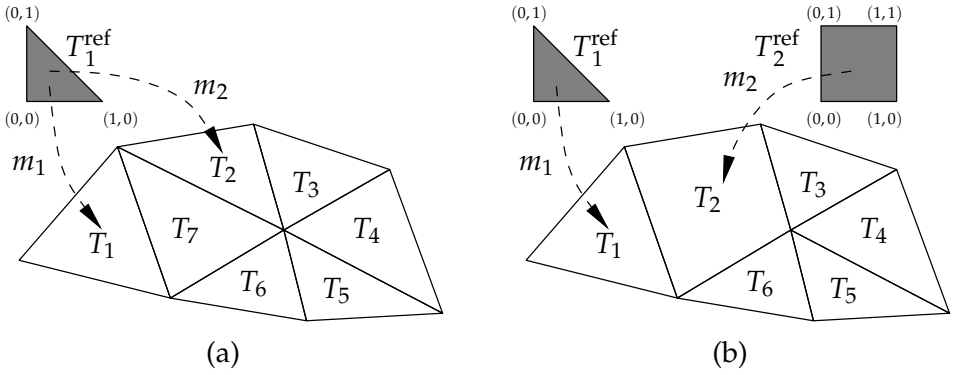


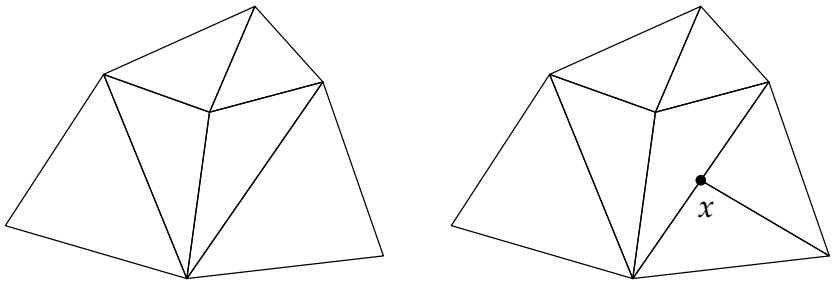
Abbildung A.1: **(a)** Ein simpliziales Gitter zu einem zweidimensionalen Gebiet. **(b)** Ein Gitter mit gemischten Elementen zu dem selben Gebiet. Die Transformationen der Referenzelements T_1^{ref} beziehungsweise T_2^{ref} auf die Elemente T_1 und T_2 sind jeweils exemplarisch durch gestrichelte Pfeile dargestellt.

Eine Kodimension-c-Entität des Elements T_i ist eine Menge, die sich als Bild einer Kodimension-c-Entität des Referenzelements T_i^{ref} unter der Transformation m_i darstellen lässt. Die Definitionen von Knoten, Facetten und Kanten für Referenzelemente übertragen sich entsprechend. Die Menge aller Knoten eines Elementes $T \in \mathcal{T}$ bezeichnen wir mit knoten(T), die Menge aller Knoten des Gitters $\mathcal{T}$ bezeichnen wir mit knoten$(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}}$ knoten(T).

Ein Gitter heißt *konform*, falls für T_i, $T_j \in \mathcal{T}$ der Schnitt $S := \overline{T_i} \cap \overline{T_j}$ entweder leer oder eine Kodimension-c-Entität von T_i und T_j ist, siehe Abbildung A.2 (a).

[2]Für $d = 2$ ist ein Simplex ein Dreieck, für $d = 3$ ein Tetraeder.
[3]Für $d = 2$ ist ein Hyperwürfel ein Quadrat, für $d = 3$ ein normaler Würfel.

Dieses Konzept erweitern wir, indem wir maximal einen sogenannten *hängenden Knoten* pro Facette zulassen, wie in Abbildung A.2 (b) illustriert. Wir definieren die Menge der *Freiheitsgrade* FG als die Menge aller nicht hängenden Knoten, die nicht auf dem Dirichletrand liegen. FG hängt also vom Problem ab und ist somit keine rein gitterspezifische Menge.



(a) (b)

Abbildung A.2: **(a)** Ein konformes, simpliziales Gitter zu einem zweidimensionalen Gebiet Ω. **(b)** Ein Gitter, das aufgrund des hängenden Knotens x nicht konform, aber trotzdem zulässig ist.

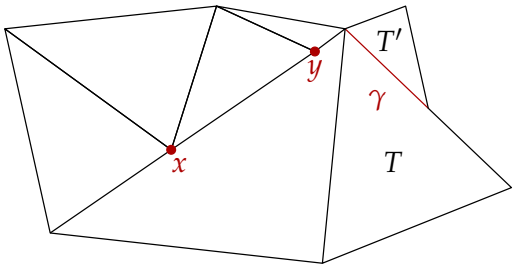


Abbildung A.3: Ein Beispiel für ein nicht zulässiges Gitter. Pro Kante ist maximal ein hängender Knoten zulässig. Außerdem ist das Liniensegment γ eine Kante von T', jedoch nicht von T.

Eine wichtige Kenngröße für ein Gitter $\mathcal{T}$ ist der *Diskretisierungsparameter* oder auch die *Gitterweite* h, der durch

$$h := \sup_{T \in \mathcal{T}} \operatorname{diam}(T) \tag{A.6}$$

definiert ist. Dabei ist

$$\operatorname{diam}(T) := \inf\{\delta \in \mathbf{R} \mid T \subset B_\delta(x) \text{ für ein } x \in \mathbf{R}^d\} \tag{A.7}$$

der *Durchmesser* von $T \in \mathcal{T}$ und $B_\epsilon(x) := \{z \in \mathbf{R}^d \mid \|x - z\| < \epsilon\}$ die offene Kugel mit Radius ϵ um x. Außerdem schreiben wir $\mathcal{T}_h$ um anzudeuten, dass der zu $\mathcal{T}$ gehörende Diskretisierungsparameter h ist.

Anhang B

Notationen

$\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen.
$\mathbf{N}$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.
$\overline{X}$	Abschluss der Menge $X \subset \mathbf{R}^d$.
$\partial_x u$	Partielle Ableitung nach x von u.
∇u	Gradient von u.
Δu	Laplaceoperator angewandt auf u.
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	Euklidisches Skalarprodukt für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d$.
$\inf D$	Infimum der Menge $D \subset \mathbf{R}$.
$\sup D$	Supremum der Menge $D \subset \mathbf{R}$.
$B_\epsilon(x)$	Offene Kugel in $\mathbf{R}^d$ mit Radius ϵ um x.
μ	Multiindex, $\mu \in \mathbf{N}^d$.
x^μ	Für μ Multiindex, $x^\mu := \prod_{i=1}^d x_i^{\mu_i}$.
Ω	Offenes und zusammenhängendes Raumgebiet.
$\overline{\Omega}$	Abschluss des Gebiets Ω.
d	Dimension des Raumgebiets Ω.
$\partial\Omega$	Der Rand des Raumgebiets Ω.
Γ_N	Neumann-Teil des Randes $\partial\Omega$.
Γ_D	Dirichlet-Teil des Randes $\partial\Omega$.
$\mathcal{D}$	Gleichmäßig elliptischer Differentialopertator in Gleichung (2.1).
u	Gesuchte Lösung zu einer Differentialgleichung.
u_k	Numerische Lösung in Iteration k.
e_k	Fehler der numerischen Lösung in Iteration k.
$K\nabla u$	Fluss der Funktion u.
$[K\nabla u_k \cdot \nu]_{\partial T}$	Sprung des Flusses über die Elementberandungen.
q	Quellterm im Gebiet Ω, rechte Seite.
g	Vorgabe auf dem Dirichletrand Γ_D.
J	Vorgabe auf dem Neumannrand Γ_N.
K	Diffusionsmatrix der elliptischen Gleichung.

m, M	Elliptizitätskonstante und Stetigkeitskonstante von K.
$\mathcal{W}$	Raum der klassischen Lösungen zu Gleichung (2.1).
$\mathcal{V}$	Raum der schwachen Lösungen in Gleichung (2.3).
$\mathcal{V}_0$	Raum der Testfunktionen in Gleichung (2.3).
$\mathcal{S}$	Finite-Element-Raum für ein Gitter $\mathcal{T}$.
$\mathcal{S}_g$	Teilraum von $\mathcal{S}$, der auf den Dirichletknoten mit der Vorgabe g übereinstimmt.
$\mathcal{S}_0$	Teilraum von $\mathcal{S}$, der auf den Dirichletknoten 0 ist.
$\mathcal{S}_h$	Finite-Element-Raum für ein Gitter $\mathcal{T}_h$.
$L^2(\Omega)$	Raum der auf Ω quadratintegrierbaren Funktionen.
$(\bullet, \bullet)_0$	Skalarprodukt von $L^2(\Omega)$.
$\|\bullet\|_0$	Durch $(\bullet, \bullet)_0$ induzierte Norm von $L^2(\Omega)$.
$H^s(\Omega)$	Raum der Funktionen mit schwachen Ableitungen bis zur Ordnung $s \in \mathbf{R}$.
$(\bullet, \bullet)_s$	Skalarprodukt von $H^s(\Omega)$.
$\|\bullet\|_s$	Durch $(\bullet, \bullet)_s$ induzierte Norm von $H^s(\Omega)$.
$\|\bullet\|_s$	Seminorm von $H^s(\Omega)$.
$\|\bullet\|_{\mathrm{E}}$	Energienorm zu Gleichung (2.3).
$\bullet\|_D$	Restriktionsoperator, Restriktion einer Funktion auf D.
$\gamma_{\Gamma_\mathrm{D}}(\bullet)$	Spuroperator, Spur einer Funktion auf dem Dirichletrand Γ_D.
$\mathcal{T}$	Gitter zu Ω.
$\mathcal{T}_h$	Gitter zu Ω mit Diskretisierungsparameter h.
$\mathcal{T}_k$	Gitter zu Ω in der k-ten Iteration.
$\mathscr{T}$	Familie von Gittern, $\mathscr{T} = \{\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k, \ldots\}$.
T	Ein Element $T \in \mathcal{T}$.
∂T	Rand eines Elementes $T \in \mathcal{T}$.
h	Diskretisierungsparameter zu einem Gitter, $h = \sup_{T \in \mathcal{T}} \operatorname{diam}(T)$.
h_T	Abkürzung für $\operatorname{diam}(T)$.
$\operatorname{diam}(T)$	Durchmesser von $T \in \mathcal{T}$.
$\gamma_T(f)$	Stetige Fortsetzung von f auf die Berandung von T.
A	Matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ des linearen Gleichungssystems nach der Diskretisierung.
b	Rechte Seite $b \in \mathbf{R}^n$ des linearen Gleichungssystems nach der Diskretisierung.
n	Anzahl der Freiheitsgrade zu einem Gitter $\mathcal{T}$, $n = \|\mathrm{FG}\|$.
FG	Menge der Freiheitsgrade.
$\eta_{\mathrm{EE},T}$	Residualer Energienormindikator beziehungsweise dessen Wert auf T.
η_{EE}	Residualer Energienormschätzer.
$\eta_{\mathrm{EM,T}}$	Analytischer Energienormindikator beziehungsweise dessen Wert auf T.
η_{EM}	Analytisches Energienormfehler.
$\eta_{\mathrm{ZZ},T}$	Fehlerindikator nach Zienkiewicz-Zhu beziehungsweise dessen Wert auf T.
α	Parameter der Verfeinerungsstrategien im Intervall $[0, 1]$.

Abbildungsverzeichnis

2.1 Finite-Element-Knotenbasis in einer Dimension 11

3.1 Illustration zu Indikator $\eta_{ZZ,T}$ nach Zienkiewicz-Zhu 20
3.2 Hierarchisches Gitter in einer Dimension 23
3.3 Hängender Knoten durch Verfeinerung 24
3.4 Bisektion eines Dreiecks und eines Tetraeders 25
3.5 Reguläre Unterteilung eines Dreiecks 25
3.6 Reguläre Unterteilung eines Rechtecks und eines Würfels 26
3.7 Abschluss für Dreiecks- und Viereckgitter 27

4.2.1 Wellen: Lösung 31
4.2.2 Wellen: Grobgitter und adaptiv verfeinertes Gitter 32
4.2.3 Wellen: Vergleich Gitterbibliotheken 33
4.2.4 Wellen: Bewertung Energienormschätzer & Vergleich Strategien 34
4.3.1 Einspringende Ecke: Lösung 35
4.3.2 Einspringende Ecke: Grobgitter und adaptiv verfeinertes Gitter 36
4.3.3 Einspringende Ecke: Vergleich Gitterbibliotheken 38
4.3.4 Einspringende Ecke: Bewertung η_{EE}-Schätzer zur Messung & Indikation . . 39
4.3.5 Einspringende Ecke: Vergleich Parameter α für Strategie 1, 2 & 3, $\eta_{EE,T}$ . . . 40
4.3.6 Einspringende Ecke: Vergleich Parameter α für Strategie 1, 2 & 3, $\eta_{ZZ,T}$ . . . 41
4.3.7 Einspringende Ecke: Vergleich Strategien 42
4.3.8 Einspringende Ecke: Adaptive versus globale Verfeinerung 43
4.4.1 Geschlitzter Würfel: Lösung, Grob- und Feingitter 45
4.4.2 Geschlitzter Würfel: Vergleich Gitterbibliotheken 47
4.4.3 Geschlitzter Würfel: Bewertung η_{EE}-Schätzer zur Messung & Indikation . 48
4.4.4 Geschlitzter Würfel: Vergleich Parameter α für Strategie 1, 2 & 3, $\eta_{EE,T}$ . . 49
4.4.5 Geschlitzter Würfel: Vergleich Parameter α für Strategie 1, 2 & 3, $\eta_{ZZ,T}$ . . 50
4.4.6 Geschlitzter Würfel: Vergleich Strategien 51
4.4.7 Geschlitzter Würfel: Adaptive versus globale Verfeinerung 52
4.4.8 Geschlitzter Würfel $\varepsilon = 1$: Adaptive versus globale Verfeinerung 53
4.5.1 Schachbrett: Lösung 54
4.5.2 Schachbrett: Grobgitter und adaptiv verfeinertes Gitter 55
4.5.3 Schachbrett: Vergleich Strategien 55

A.1 Simpliziales Gitter und Gitter mit gemischten Elementen 60
A.2 Konforme und nicht konforme zulässige Gitter 61
A.3 Nicht zulässiges Gitter 61

Literaturverzeichnis

[Alt06] Alt, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis*. 5., überarb. Aufl. Springer Verlag, 2006

[AO00] Ainsworth, Mark ; Oden, J. T.: *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 2000

[Bas94] Bastian, P.: *Parallele Adaptive Mehrgitterverfahren*, Universität Stuttgart, Dissertation, 1994

[Bas08] Bastian, P.: *Finite-Elemente-Verfahren und schnelle Löser*. Internet. `http://www.ipvs.uni-stuttgart.de/abteilungen/sgs/lehre/lehrveranstaltungen/vorlesungen/SS08/FES_SS08/de`. Version: 2008. – Universität Stuttgart

[Bey97] Bey, J.: *Finite-Volumen und Mehrgitterverfahren für elliptische Randwertprobleme*, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Dissertation, Juni 1997

[BR03] Bangerth, W. ; Rannacher, R.: *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Birkäuser, 2003

[Bra03] Braess, D.: *Finite Elemente, Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. 3., korrigierte u. erg. Aufl. Springer Verlag, 2003

[Dun08] *Dune Homepage*. Internet. Version: Mai 2008. `http://www.dune-project.org/`

[EEHJ96] Eriksson, K. ; Estep, D. ; Hansbo, P. ; Johnson, C.: *Computational Differential Equations*. Studentlitteratur, 1996

[Hac86] Hackbusch, W.: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, 1986

[Ran08] Rannacher, R.: *Numerische Mathematik 2 (Numerik Partieller Differentialgleichungen)*. Internet. `http://numerik.iwr.uni-heidelberg.de/~lehre/notes/num2/numerik2.pdf`. Version: 2008. – Universität Heidelberg

[Ver96] Verfürth, Rüdiger: *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. John Wiley & Sons and B. G. Teubner Publishers, 1996

[ZZ87] Zienkiewicz, O. C. ; Zhu, J. Z.: A Simple Error Estimator And Adaptive Procedure For Practical Engineering Analysis. In: *International Journal For Numerical Methods In Engineering* Vol. 24 (1987), S. 337–357

[ZZ91] Zienkiewicz, O. C. ; Zhu, J. Z.: Adaptivity And Mesh Generation. In: *International Journal For Numerical Methods In Engineering* Vol. 32 (1991), S. 783–810

Alle URLs wurden zuletzt am 17. Juni 2008 geprüft.

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen benutzt zu haben.

(Alexander Lauser)